

Tema 8: Razonamiento sobre programas

Informática (2012–13)

José A. Alonso Jiménez

Grupo de Lógica Computacional
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Sevilla

Tema 8: Razonamiento sobre programas

1. Razonamiento ecuacional

Cálculo con longitud

Propiedad de intercambia

Inversa de listas unitarias

Razonamiento ecuacional con análisis de casos

2. Razonamiento por inducción sobre los naturales

Esquema de inducción sobre los naturales

Ejemplo de inducción sobre los naturales

3. Razonamiento por inducción sobre listas

Esquema de inducción sobre listas

Asociatividad de ++

[] es la identidad para ++ por la derecha

Relación entre length y ++

Relación entre take y drop

La concatenación de listas vacías es vacía

4. Equivalencia de funciones

Tema 8: Razonamiento sobre programas

1. Razonamiento ecuacional

Cálculo con longitud

Propiedad de intercambia

Inversa de listas unitarias

Razonamiento ecuacional con análisis de casos

2. Razonamiento por inducción sobre los naturales

3. Razonamiento por inducción sobre listas

4. Equivalencia de funciones

5. Propiedades de funciones de orden superior

Cálculo con longitud

► Programa:

```
longitud []          = 0                -- longitud.1
longitud (_:xs) = 1 + longitud xs      -- longitud.2
```

► Propiedad: $\text{longitud } [2,3,1] = 3$

► Demostración:

```
longitud [2,3,1]
= 1 + longitud [2,3]                [por longitud.2]
= 1 + (1 + longitud [3])            [por longitud.2]
= 1 + (1 + (1 + longitud []))       [por longitud.2]
= 1 + (1 + (1 + 0))                 [por longitud.1]
= 3
```

Tema 8: Razonamiento sobre programas

1. Razonamiento ecuacional

Cálculo con longitud

Propiedad de intercambia

Inversa de listas unitarias

Razonamiento ecuacional con análisis de casos

2. Razonamiento por inducción sobre los naturales

3. Razonamiento por inducción sobre listas

4. Equivalencia de funciones

5. Propiedades de funciones de orden superior

Propiedad de intercambia

- ▶ Programa:

```
intercambia :: (a,b) -> (b,a)
intercambia (x,y) = (y,x)      -- intercambia
```

- ▶ Propiedad: $\text{intercambia} (\text{intercambia} (x,y)) = (x,y)$.

- ▶ Demostración:

```
intercambia (intercambia (x,y))
= intercambia (y,x)           [por intercambia]
= (x,y)                       [por intercambia]
```

Propiedad de intercambia

Comprobación con QuickCheck

► Propiedad:

```
prop_intercambia :: Eq a => a -> a -> Bool
prop_intercambia x y =
    intercambia (intercambia (x,y)) == (x,y)
```

► Comprobación:

```
*Main> quickCheck prop_intercambia
+++ OK, passed 100 tests.
```

Tema 8: Razonamiento sobre programas

1. Razonamiento ecuacional

Cálculo con longitud

Propiedad de intercambia

Inversa de listas unitarias

Razonamiento ecuacional con análisis de casos

2. Razonamiento por inducción sobre los naturales

3. Razonamiento por inducción sobre listas

4. Equivalencia de funciones

5. Propiedades de funciones de orden superior

Inversa de listas unitarias

- ▶ Inversa de una lista:

```

inversa :: [a] -> [a]
inversa []      = []                -- inversa.1
inversa (x:xs) = inversa xs ++ [x] -- inversa.2

```

- ▶ Prop.: $\text{inversa } [x] = [x]$

```

inversa [x]
= inversa (x:[])      [notación de lista]
= (inversa []) ++ [x] [inversa.2]
= [] ++ [x]          [inversa.1]
= [x]                 [def. de ++]

```

Inversa de listas unitarias

Comprobación con QuickCheck

► Propiedad:

```
prop_inversa_unitaria :: Eq a => a -> Bool
prop_inversa_unitaria x =
    inversa [x] == [x]
```

► Comprobación:

```
*Main> quickCheck prop_inversa_unitaria
+++ OK, passed 100 tests.
```

Tema 8: Razonamiento sobre programas

1. Razonamiento ecuacional

Cálculo con longitud

Propiedad de intercambia

Inversa de listas unitarias

Razonamiento ecuacional con análisis de casos

2. Razonamiento por inducción sobre los naturales

3. Razonamiento por inducción sobre listas

4. Equivalencia de funciones

5. Propiedades de funciones de orden superior

Razonamiento ecuacional con análisis de casos

- ▶ Negación lógica:

Prelude

```
not :: Bool -> Bool
not False = True
not True  = False
```

- ▶ Prop.: $\text{not} (\text{not } x) = x$

- ▶ Demostración por casos:

- ▶ Caso 1: $x = \text{True}$:

$$\begin{aligned} \text{not} (\text{not True}) &= \text{not False} && [\text{not}.2] \\ &= \text{True} && [\text{not}.1] \end{aligned}$$

- ▶ Caso 2: $x = \text{False}$:

$$\begin{aligned} \text{not} (\text{not False}) &= \text{not True} && [\text{not}.1] \\ &= \text{False} && [\text{not}.2] \end{aligned}$$

Razonamiento ecuacional con análisis de casos

Comprobación con QuickCheck

► Propiedad:

```
prop_doble_negacion :: Bool -> Bool
prop_doble_negacion x =
  not (not x) == x
```

► Comprobación:

```
*Main> quickCheck prop_doble_negacion
+++ OK, passed 100 tests.
```

Tema 8: Razonamiento sobre programas

1. Razonamiento ecuacional
2. Razonamiento por inducción sobre los naturales
 - Esquema de inducción sobre los naturales
 - Ejemplo de inducción sobre los naturales
3. Razonamiento por inducción sobre listas
4. Equivalencia de funciones
5. Propiedades de funciones de orden superior

Esquema de inducción sobre los números naturales

Para demostrar que todos los números naturales tienen una propiedad P basta probar:

1. Caso base $n=0$:

$P(0)$.

2. Caso inductivo $n=(m+1)$:

Suponiendo $P(m)$ demostrar $P(m+1)$.

En el caso inductivo, la propiedad $P(n)$ se llama la hipótesis de inducción.

Tema 8: Razonamiento sobre programas

1. Razonamiento ecuacional
2. Razonamiento por inducción sobre los naturales
 - Esquema de inducción sobre los naturales
 - Ejemplo de inducción sobre los naturales
3. Razonamiento por inducción sobre listas
4. Equivalencia de funciones
5. Propiedades de funciones de orden superior

Ejemplo de inducción sobre los naturales: Propiedad

- ▶ `(replicate n x)` es la lista formada por n elementos iguales a x .

Por ejemplo,

```
| replicate 3 5  ~>  [5,5,5]
```

```
Prelude
replicate :: Int -> a -> [a]
replicate 0 _ = []
replicate n x = x : replicate (n-1) x
```

- ▶ Prop.: `length (replicate n x) = n`

Ejemplo de inducción sobre los naturales: Demostración

- ▶ Caso base ($n=0$):

```
length (replicate 0 x)
= length []                [por replicate.1]
= 0                        [por def. length]
```

- ▶ Caso inductivo ($n=m+1$):

```
length (replicate (m+1) x)
= length (x:(replicate m x)) [por replicate.2]
= 1 + length (replicate m x) [por def. length]
= 1 + m                       [por hip. ind.]
= m + 1                       [por conmutativa de +]
```

Ejemplo de inducción sobre los naturales: Verificación

Verificación con QuickCheck:

- Especificación de la propiedad:

```
prop_length_replicate :: Int -> Int -> Bool
prop_length_replicate n xs =
    length (replicate m xs) == m
    where m = abs n
```

- Comprobación de la propiedad:

```
*Main> quickCheck prop_length_replicate
OK, passed 100 tests.
```

Tema 8: Razonamiento sobre programas

1. Razonamiento ecuacional
2. Razonamiento por inducción sobre los naturales
3. Razonamiento por inducción sobre listas
 - Esquema de inducción sobre listas
 - Asociatividad de ++
 - [] es la identidad para ++ por la derecha
 - Relación entre length y ++
 - Relación entre take y drop
 - La concatenación de listas vacías es vacía
4. Equivalencia de funciones

Esquema de inducción sobre listas

Para demostrar que todas las listas finitas tienen una propiedad P basta probar:

1. Caso base $xs = []$:
 $P([])$.
2. Caso inductivo $xs = (y : ys)$:
Suponiendo $P(ys)$ demostrar $P(y : ys)$.

En el caso inductivo, la propiedad $P(ys)$ se llama la hipótesis de inducción.

Tema 8: Razonamiento sobre programas

1. Razonamiento ecuacional
2. Razonamiento por inducción sobre los naturales
3. Razonamiento por inducción sobre listas
 - Esquema de inducción sobre listas
 - Asociatividad de ++**
 - [] es la identidad para ++ por la derecha
 - Relación entre length y ++
 - Relación entre take y drop
 - La concatenación de listas vacías es vacía
4. Equivalencia de funciones

Asociatividad de ++

- ▶ Programa:

```
Prelude
(++) :: [a] -> [a] -> [a]
[]    ++ ys = ys          -- ++.1
(x:xs) ++ ys = x : (xs ++ ys) -- ++.2
```

- ▶ Propiedad: $xs++(ys++zs)=(xs++ys)++zs$
- ▶ Comprobación con QuickCheck:

```
prop_asociativa_conc :: [Int] -> [Int] -> [Int] -> Bool
prop_asociativa_conc xs ys zs =
  xs++(ys++zs)==(xs++ys)++zs
```

```
Main> quickCheck prop_asociatividad_conc
OK, passed 100 tests.
```

Asociatividad de ++

- ▶ Demostración por inducción en xs:
 - ▶ Caso base $xs=[]$: Reduciendo el lado izquierdo

$$\begin{aligned}
 &xs++(ys++zs) \\
 &= []++(ys++zs) && \text{[por hipótesis]} \\
 &= ys++zs && \text{[por ++.1]}
 \end{aligned}$$

y reduciendo el lado derecho

$$\begin{aligned}
 &(xs++ys)++zs \\
 &= ([]++ys)++zs && \text{[por hipótesis]} \\
 &= ys++zs && \text{[por ++.1]}
 \end{aligned}$$

Luego, $xs++(ys++zs)=(xs++ys)++zs$

Asociatividad de ++

- ▶ Demostración por inducción en xs:
 - ▶ Caso inductivo $xs=a:as$: Suponiendo la hipótesis de inducción

$$as++(ys++zs)=(as++ys)++zs$$

hay que demostrar que

$$(a:as)++(ys++zs)=((a:as)++ys)++zs$$

$$(a:as)++(ys++zs)$$

$$= a:(as++(ys++zs)) \quad [\text{por ++.2}]$$

$$= a:((as++ys)++zs) \quad [\text{por hip. ind.}]$$

$$= (a:(as++ys))++zs \quad [\text{por ++.2}]$$

$$= ((a:as)++ys)++zs \quad [\text{por ++.2}]$$

Tema 8: Razonamiento sobre programas

1. Razonamiento ecuacional
2. Razonamiento por inducción sobre los naturales
3. Razonamiento por inducción sobre listas
 - Esquema de inducción sobre listas
 - Asociatividad de ++
 - [] es la identidad para ++ por la derecha
 - Relación entre length y ++
 - Relación entre take y drop
 - La concatenación de listas vacías es vacía
4. Equivalencia de funciones

[] es la identidad para ++ por la derecha

- ▶ Propiedad: $xs++[] = xs$
- ▶ Comprobación con QuickCheck:

```
prop_identidad_concatenacion :: [Int] -> Bool
prop_identidad_concatenacion xs = xs++[] == xs
```

```
|Main> quickCheck prop_identidad_concatenacion
|OK, passed 100 tests.
```

$[]$ es la identidad para ++ por la derecha

► Demostración por inducción en xs:

► Caso base $xs=[]$:

$$xs++ []$$

$$= []++ []$$

$$= [] \quad \text{[por ++.1]}$$

► Caso inductivo $xs=(a:as)$: Suponiendo la hipótesis de inducción

$$as++ [] = as$$

hay que demostrar que

$$(a:as)++ [] = (a:as)$$

$$(a:as)++ []$$

$$= a:(as++ []) \quad \text{[por ++.2]}$$

$$= a:as \quad \text{[por hip. ind.]}$$

Tema 8: Razonamiento sobre programas

1. Razonamiento ecuacional
2. Razonamiento por inducción sobre los naturales
3. Razonamiento por inducción sobre listas
 - Esquema de inducción sobre listas
 - Asociatividad de `++`
 - `[]` es la identidad para `++` por la derecha
 - Relación entre `length` y `++`**
 - Relación entre `take` y `drop`
 - La concatenación de listas vacías es vacía
4. Equivalencia de funciones

Relación entre length y ++

► Programas:

```
length :: [a] -> Int
length []      = 0                -- length.1
length (x:xs) = 1 + n_length xs  -- length.2
```

```
(++) :: [a] -> [a] -> [a]
[]      ++ ys = ys                -- ++.1
(x:xs) ++ ys = x : (xs ++ ys)    -- ++.2
```

► Propiedad: $\text{length}(xs++ys) = (\text{length } xs) + (\text{length } ys)$

Relación entre length y ++

- ▶ Comprobación con QuickCheck:

```
prop_length_append :: [Int] -> [Int] -> Bool
prop_length_append xs ys =
  length(xs++ys)==(length xs)+(length ys)
```

```
|Main> quickCheck prop_length_append
|OK, passed 100 tests.
```

- ▶ Demostración por inducción en xs:

- ▶ Caso base xs=[]:
 - length ([] ++ ys)
 - = length ys [por ++.1]
 - = 0 + (length ys) [por aritmética]
 - = (length []) + (length ys) [por length.1]

Relación entre length y ++

► Demostración por inducción en xs:

- Caso inductivo xs=(a:as): Suponiendo la hipótesis de inducción

$$\text{length}(as++ys) = (\text{length } as) + (\text{length } ys)$$

hay que demostrar que

$$\text{length}((a:as)++ys) = (\text{length } (a:as)) + (\text{length } ys)$$

$$\begin{aligned}
 & \text{length}((a:as)++ys) \\
 &= \text{length}(a:(as++ys)) && \text{[por ++.2]} \\
 &= 1 + \text{length}(as++ys) && \text{[por length.2]} \\
 &= 1 + ((\text{length } as) + (\text{length } ys)) && \text{[por hip. ind.]} \\
 &= (1 + (\text{length } as)) + (\text{length } ys) && \text{[por aritmética]} \\
 &= (\text{length } (a:as)) + (\text{length } ys) && \text{[por length.2]}
 \end{aligned}$$

Tema 8: Razonamiento sobre programas

1. Razonamiento ecuacional
2. Razonamiento por inducción sobre los naturales
3. Razonamiento por inducción sobre listas
 - Esquema de inducción sobre listas
 - Asociatividad de ++
 - [] es la identidad para ++ por la derecha
 - Relación entre length y ++
 - Relación entre take y drop**
 - La concatenación de listas vacías es vacía
4. Equivalencia de funciones

Relación entre take y drop

► Programas:

```
take :: Int -> [a] -> [a]
take 0 _      = []           -- take.1
take _ []     = []           -- take.2
take n (x:xs) = x : take (n-1) xs  -- take.3
```

```
drop :: Int -> [a] -> [a]
drop 0 xs     = xs           -- drop.1
drop _ []     = []           -- drop.2
drop n (_:xs) = drop (n-1) xs  -- drop.3
```

```
(++) :: [a] -> [a] -> [a]
[]      ++ ys = ys           -- ++.1
(x:xs) ++ ys = x : (xs ++ ys)  -- ++.2
```

Relación entre take y drop

- ▶ Propiedad: `take n xs ++ drop n xs = xs`
- ▶ Comprobación con QuickCheck:

```
prop_take_drop :: Int -> [Int] -> Property
prop_take_drop n xs =
  n >= 0 ==> take n xs ++ drop n xs == xs
```

```
|Main> quickCheck prop_take_drop
|OK, passed 100 tests.
```

Relación entre take y drop

► Demostración por inducción en n:

► Caso base n=0:

take 0 xs ++ drop 0 xs

= [] ++ xs

= xs

[por take.1 y drop.1]

[por ++.1]

► Caso inductivo n=m+1: Suponiendo la hipótesis de inducción 1

$(\forall xs :: [a]) \text{take } m \text{ xs } ++ \text{drop } m \text{ xs} = \text{xs}$

hay que demostrar que

$(\forall xs :: [a]) \text{take } (m+1) \text{ xs } ++ \text{drop } (m+1) \text{ xs} = \text{xs}$

Relación entre take y drop

Lo demostraremos por inducción en xs :

- ▶ Caso base $xs=[]$:

$$\begin{aligned} & \text{take } (m+1) [] ++ \text{drop } (m+1) [] \\ &= [] ++ [] && \text{[por take.2 y drop.2]} \\ &= [] && \text{[por ++.1]} \end{aligned}$$

- ▶ Caso inductivo $xs=(a:as)$: Suponiendo la hip. de inducción 2

$$\text{take } (m+1) as ++ \text{drop } (m+1) as = as$$

hay que demostrar que

$$\begin{aligned} & \text{take } (m+1) (a:as) ++ \text{drop } (m+1) (a:as) = (a:as) \\ & \text{take } (m+1) (a:as) ++ \text{drop } (m+1) (a:as) \\ &= (a:(\text{take } m as)) ++ (\text{drop } m as) && \text{[take.3 y drop.3]} \\ &= (a:(\text{take } m as) ++ (\text{drop } m as)) && \text{[por ++.2]} \\ &= a:as && \text{[por hip. de ind. 1]} \end{aligned}$$

Tema 8: Razonamiento sobre programas

1. Razonamiento ecuacional
2. Razonamiento por inducción sobre los naturales
3. Razonamiento por inducción sobre listas
 - Esquema de inducción sobre listas
 - Asociatividad de ++
 - [] es la identidad para ++ por la derecha
 - Relación entre length y ++
 - Relación entre take y drop
 - La concatenación de listas vacías es vacía
4. Equivalencia de funciones

La concatenación de listas vacías es vacía

► Programas:

```

Prelude
null :: [a] -> Bool
null []           = True           -- null.1
null (_:_)       = False          -- null.2

(++) :: [a] -> [a] -> [a]
[] ++ ys         = ys              -- (++).1
(x:xs) ++ ys     = x : (xs ++ ys) -- (++).2

```

► Propiedad: `null xs = null (xs ++ xs)`.

La concatenación de listas vacías es vacía

► Demostración por inducción en xs :

► Caso 1: $xs = []$: Reduciendo el lado izquierdo

```

null xs
= null []           [por hipótesis]
= True             [por null.1]

```

y reduciendo el lado derecho

```

null (xs ++ xs)
= null ([] ++ [])   [por hipótesis]
= null []           [por (++).1]
= True              [por null.1]

```

Luego, $null\ xs = null\ (xs\ ++\ xs)$.

La concatenación de listas vacías es vacía

- ▶ Demostración por inducción en xs :
 - ▶ Caso $xs = (y:ys)$: Reduciendo el lado izquierdo

$$\begin{aligned} & \text{null } xs \\ &= \text{null } (y:ys) && \text{[por hipótesis]} \\ &= \text{False} && \text{[por null.2]} \end{aligned}$$

y reduciendo el lado derecho

$$\begin{aligned} & \text{null } (xs ++ xs) \\ &= \text{null } ((y:ys) ++ (y:ys)) && \text{[por hipótesis]} \\ &= \text{null } (y:(ys ++ (y:ys))) && \text{[por (++).2]} \\ &= \text{False} && \text{[por null.2]} \end{aligned}$$

Luego, $\text{null } xs = \text{null } (xs ++ xs)$.

Equivalencia de funciones

- ▶ Programas:

```

inversa1, inversa2 :: [a] -> [a]
inversa1 []        = []
inversa1 (x:xs)    = inversa1 xs ++ [x]

```

```

inversa2 xs = inversa2Aux xs []
  where inversa2Aux []      ys = ys
        inversa2Aux (x:xs) ys = inversa2Aux xs (x:ys)

```

- ▶ Propiedad: `inversa1 xs = inversa2 xs`
- ▶ Comprobación con QuickCheck:

```

prop_equiv_inversa :: [Int] -> Bool
prop_equiv_inversa xs = inversa1 xs == inversa2 xs

```

Equivalencia de funciones

- Demostración: Es consecuencia del siguiente lema:

$$\text{inversa1 } xs \ ++ \ ys = \text{inversa2Aux } xs \ ys$$

En efecto,

$$\begin{aligned} & \text{inversa1 } xs \\ &= \text{inversa1 } xs \ ++ \ [] && \text{[por identidad de ++]} \\ &= \text{inversa2Aux } xs \ ++ \ [] && \text{[por el lema]} \\ &= \text{inversa2 } xs && \text{[por el inversa2.1]} \end{aligned}$$

Equivalencia de funciones

► Demostración del lema: Por inducción en xs :

► Caso base $xs=[]$:

$$\begin{aligned}
 & \text{inversa1 } [] ++ ys \\
 &= [] ++ ys && \text{[por inversa1.1]} \\
 &= ys && \text{[por ++.1]} \\
 &= \text{inversa2Aux } [] ys && \text{[por inversa2Aux.1]}
 \end{aligned}$$

► Caso inductivo $xs=(a:as)$: La hipótesis de inducción es
 $(\forall ys :: [a]) \text{inversa1 } as ++ ys = \text{inversa2Aux } as ys$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
 & \text{inversa1 } (a:as) ++ ys \\
 &= (\text{inversa1 } as ++ [a]) ++ ys && \text{[por inversa1.2]} \\
 &= (\text{inversa1 } as) ++ ([a] ++ ys) && \text{[por asociativa de ++]} \\
 &= (\text{inversa1 } as) ++ (a:ys) && \text{[por ley unitaria]} \\
 &= (\text{inversa2Aux } as (a:ys)) && \text{[por hip. de inducción]} \\
 &= \text{inversa2Aux } (a:as) ys && \text{[por inversa2Aux.2]}
 \end{aligned}$$

Relación entre sum y map

- ▶ La función sum:

```
Prelude
sum :: [Int] -> Int
sum [] = 0
sum (x:xs) = x + sum xs
```

- ▶ Propiedad: $\text{sum } (\text{map } (2*) \text{ xs}) = 2 * \text{sum } \text{xs}$
- ▶ Comprobación con QuickCheck:

```
prop_sum_map :: [Int] -> Bool
prop_sum_map xs = sum (map (2*) xs) == 2 * sum xs
```

```
*Main> quickCheck prop_sum_map
+++ OK, passed 100 tests.
```

Relación entre sum y map

Demostración de la propiedad por inducción en xs

► Caso []:

<code>sum (map (2*) xs)</code>	
<code>= sum (map (2*) [])</code>	[por hipótesis]
<code>= sum []</code>	[por map.1]
<code>= 0</code>	[por sum.1]
<code>= 2 * 0</code>	[por aritmética]
<code>= 2 * sum []</code>	[por sum.1]
<code>= 2 * sum xs</code>	[por hipótesis]

Relación entre sum y map

- Caso $xs=(y:ys)$: Entonces,

$$\text{sum (map (2*) xs)}$$

$$= \text{sum (map (2*) (y:ys))}$$

$$= \text{sum ((2*) y : (map (2*) ys))}$$

$$= (2*) y + (\text{sum (map (2*) ys)})$$

$$= (2*) y + (2 * \text{sum ys})$$

$$= (2 * y) + (2 * \text{sum ys})$$

$$= 2 * (y + \text{sum ys})$$

$$= 2 * \text{sum (y:ys)}$$

$$= 2 * \text{sum xs}$$

[por hipótesis]

[por map.2]

[por sum.2]

[por hip. de inducción]

[por (2*)]

[por aritmética]

[por sum.2]

[por hipótesis]

Comprobación de propiedades con argumentos funcionales

- ▶ La aplicación de una función a los elementos de una lista conserva su longitud:

```
prop_map_length (Function _ f) xs =  
    length (map f xs) == length xs
```

- ▶ En el inicio del fichero hay que escribir

```
import Test.QuickCheck.Function
```

- ▶ Comprobación

```
*Main> quickCheck prop_map_length  
+++ OK, passed 100 tests.
```


Bibliografía

1. H. C. Cunningham (2007) *Notes on Functional Programming with Haskell*.
2. J. Fokker (1996) *Programación funcional*.
3. G. Hutton *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2007.
 - ▶ Cap. 13: Reasoning about programs.
4. B.C. Ruiz, F. Gutiérrez, P. Guerrero y J.E. Gallardo. *Razonando con Haskell*. Thompson, 2004.
 - ▶ Cap. 6: Programación con listas.
5. S. Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*, Second Edition. Addison-Wesley, 1999.
 - ▶ Cap. 8: Reasoning about programs.
6. E.P. Wentworth (1994) *Introduction to Funcional Programming*.