

# Ejercicios de Lógica informática (2004–05)

## Tema 2: Deducción natural proposicional

José A. Alonso Jiménez

## 1. Implicaciones

1.  $p, p \rightarrow q \vdash q$

1 :  $p, p \rightarrow q$  premisas

2 :  $q$   $\rightarrow$ e 1.2,1.1

2.  $p \rightarrow q, q \rightarrow r, p \vdash r$

1 :  $p \rightarrow q, q \rightarrow r, p$  premisas

2 :  $q$   $\rightarrow$ e 1.1,1.3

3 :  $r$   $\rightarrow$ e 1.2,2

3.  $p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p \vdash r$

1 :  $p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p$  premisas

2 :  $q$   $\rightarrow$ e 1.2,1.3

3 :  $q \rightarrow r$   $\rightarrow$ e 1.1,1.3

4 :  $r$   $\rightarrow$ e 3,2

4.  $p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$

1 :  $p \rightarrow q, q \rightarrow r$  premisas

2 :  $p$  supuesto

3 :  $q$   $\rightarrow$ e 1.1,2

4 :  $r$   $\rightarrow$ e 1.2,3

5 :  $p \rightarrow r$   $\rightarrow$ i 2-4

5.  $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash q \rightarrow (p \rightarrow r)$

1 :  $p \rightarrow (q \rightarrow r)$  premisa

2 :  $q$  supuesto

3 :  $p$  supuesto

4 :  $q \rightarrow r$   $\rightarrow$ e 1,3

5 :  $r$   $\rightarrow$ e 4,2

6 :  $p \rightarrow r$   $\rightarrow$ i 3-5

7 :  $q \rightarrow (p \rightarrow r)$   $\rightarrow$ i 2-6

6.  $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$

1 :	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	premisa
2 :	$p \rightarrow q$	supuesto
3 :	$p$	supuesto
4 :	$q$	$\rightarrow$ e 2,3
5 :	$q \rightarrow r$	$\rightarrow$ e 1,3
6 :	$r$	$\rightarrow$ e 5,4
7 :	$p \rightarrow r$	$\rightarrow$ i 3-6
8 :	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$	$\rightarrow$ i 2-7

7.  $p \vdash q \rightarrow p$

1 :	$p$	premisa
2 :	$q$	supuesto
3 :	$p$	hyp 1
4 :	$q \rightarrow p$	$\rightarrow$ i 2-3

8.  $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$

1 :	$p$	supuesto
2 :	$q$	supuesto
3 :	$p$	hyp 1
4 :	$q \rightarrow p$	$\rightarrow$ i 2-3
5 :	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$	$\rightarrow$ i 1-4

9.  $p \rightarrow q \vdash (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$

1 :	$p \rightarrow q$	premisa
2 :	$q \rightarrow r$	supuesto
3 :	$p$	supuesto
4 :	$q$	$\rightarrow$ e 1,3
5 :	$r$	$\rightarrow$ e 2,4
6 :	$p \rightarrow r$	$\rightarrow$ i 3-5
7 :	$(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$	$\rightarrow$ i 2-6

10.  $p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow s)) \vdash r \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow s))$

1 :	$p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow s))$	premisa
2 :	$r$	supuesto
3 :	$q$	supuesto
4 :	$p$	supuesto
5 :	$q \rightarrow (r \rightarrow s)$	$\rightarrow e$ 1,4
6 :	$r \rightarrow s$	$\rightarrow e$ 5,3
7 :	$s$	$\rightarrow e$ 6,2
8 :	$p \rightarrow s$	$\rightarrow i$ 4-7
9 :	$q \rightarrow (p \rightarrow s)$	$\rightarrow i$ 3-8
10 :	$r \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow s))$	$\rightarrow i$ 2-9

11.  $\vdash (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$

1 :	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	supuesto
2 :	$p \rightarrow q$	supuesto
3 :	$p$	supuesto
4 :	$q$	$\rightarrow e$ 2,3
5 :	$q \rightarrow r$	$\rightarrow e$ 1,3
6 :	$r$	$\rightarrow e$ 5,4
7 :	$p \rightarrow r$	$\rightarrow i$ 3-6
8 :	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$	$\rightarrow i$ 2-7
9 :	$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$	$\rightarrow i$ 1-8

12.  $(p \rightarrow q) \rightarrow r \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$

1 :	$(p \rightarrow q) \rightarrow r$	premisa
2 :	$p$	supuesto
3 :	$q$	supuesto
4 :	$p$	supuesto
5 :	$q$	hyp 3
6 :	$p \rightarrow q$	$\rightarrow i$ 4-5
7 :	$r$	$\rightarrow e$ 1,6
8 :	$q \rightarrow r$	$\rightarrow i$ 3-7
9 :	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$\rightarrow i$ 2-8

## 2. Conjunciones

13.  $p, q \vdash p \wedge q$

- 1 :  $p, q$     premisas  
 2 :  $p \wedge q$      $\wedge i$  1.1,1.2

14.  $p \wedge q \vdash p$

- 1 :  $p \wedge q$     premisa  
 2 :  $p$      $\wedge e$  1

15.  $p \wedge q \vdash q$

- 1 :  $p \wedge q$     premisa  
 2 :  $q$      $\wedge e$  1

16.  $p \wedge (q \wedge r) \vdash (p \wedge q) \wedge r$

- 1 :  $p \wedge (q \wedge r)$     premisa  
 2 :  $q \wedge r$      $\wedge e$  1  
 3 :  $r$      $\wedge e$  2  
 4 :  $q$      $\wedge e$  2  
 5 :  $p$      $\wedge e$  1  
 6 :  $p \wedge q$      $\wedge i$  5,4  
 7 :  $(p \wedge q) \wedge r$      $\wedge i$  6,3

17.  $(p \wedge q) \wedge r \vdash p \wedge (q \wedge r)$

- 1 :  $(p \wedge q) \wedge r$     premisa  
 2 :  $r$      $\wedge e$  1  
 3 :  $p \wedge q$      $\wedge e$  1  
 4 :  $q$      $\wedge e$  3  
 5 :  $q \wedge r$      $\wedge i$  4,2  
 6 :  $p$      $\wedge e$  3  
 7 :  $p \wedge (q \wedge r)$      $\wedge i$  6,5

18.  $p \wedge q \vdash p \rightarrow q$

- 1 :  $p \wedge q$     premisa  
 2 :  $p$     supuesto  
 3 :  $q$      $\wedge e$  1  
 4 :  $p \rightarrow q$      $\rightarrow i$  2–3

19.  $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \vdash p \rightarrow (q \wedge r)$
- |     |  |                     |
|-----|--|---------------------|
| 1 : | $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ | premisa             |
| 2 : | $p \rightarrow r$                            | $\wedge e$ 1        |
| 3 : | $p \rightarrow q$                            | $\wedge e$ 1        |
| 4 : | $p$  | supuesto            |
| 5 : | $r$  | $\rightarrow e$ 2,4 |
| 6 : | $q$  | $\rightarrow e$ 3,4 |
| 7 : | $q \wedge r$                                 | $\wedge i$ 6,5      |
| 8 : | $p \rightarrow (q \wedge r)$                 | $\rightarrow i$ 4-7 |

20.  $p \rightarrow (q \wedge r) \vdash (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$
- |      |  |                     |
|------|--|---------------------|
| 1 :  | $p \rightarrow (q \wedge r)$                 | premisa             |
| 2 :  | $p$  | supuesto            |
| 3 :  | $q \wedge r$                                 | $\rightarrow e$ 1,2 |
| 4 :  | $q$  | $\wedge e$ 3        |
| 5 :  | $p \rightarrow q$                            | $\rightarrow i$ 2-4 |
| 6 :  | $p$  | supuesto            |
| 7 :  | $q \wedge r$                                 | $\rightarrow e$ 1,6 |
| 8 :  | $r$  | $\wedge e$ 7        |
| 9 :  | $p \rightarrow r$                            | $\rightarrow i$ 6-8 |
| 10 : | $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ | $\wedge i$ 5,9      |

21.  $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash (p \wedge q) \rightarrow r$
- |     |                                   |                     |
|-----|-----------------------------------|---------------------|
| 1 : | $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ | premisa             |
| 2 : | $p \wedge q$                      | supuesto            |
| 3 : | $q$                               | $\wedge e$ 2        |
| 4 : | $p$                               | $\wedge e$ 2        |
| 5 : | $q \rightarrow r$                 | $\rightarrow e$ 1,4 |
| 6 : | $r$                               | $\rightarrow e$ 5,3 |
| 7 : | $(p \wedge q) \rightarrow r$      | $\rightarrow i$ 2-6 |

22.  $(p \wedge q) \rightarrow r \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$

1 :	$(p \wedge q) \rightarrow r$	premisa
2 :	$p$	supuesto
3 :	$q$	supuesto
4 :	$p \wedge q$	$\wedge i$ 2,3
5 :	$r$	$\rightarrow e$ 1,4
6 :	$q \rightarrow r$	$\rightarrow i$ 3-5
7 :	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$\rightarrow i$ 2-6

### 3. Disyunciones

23.  $p \vdash p \vee q$

1 :	$p$	premisa
2 :	$p \vee q$	$\vee$ intro 1

24.  $q \vdash p \vee q$

1 :	$q$	premisa
2 :	$p \vee q$	$\vee$ intro 1

25.  $p \vee q \vdash q \vee p$

1 :	$p \vee q$	premisa
2 :	$p$	supuesto
3 :	$q \vee p$	$\vee$ intro 2
4 :	$q$	supuesto
5 :	$q \vee p$	$\vee$ intro 4
6 :	$q \vee p$	$\vee e$ 1,2-3,4-5

26.  $q \rightarrow r \vdash (p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$

1 :	$q \rightarrow r$	premisa
2 :	$p \vee q$	supuesto
3 :	$p$	supuesto
4 :	$p \vee r$	$\vee$ intro 3
5 :	$q$	supuesto
6 :	$r$	$\rightarrow$ e 1,5
7 :	$p \vee r$	$\vee$ intro 6
8 :	$p \vee r$	$\vee$ e 2,3-4,5-7
9 :	$(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$	$\rightarrow$ i 2-8

27.  $p \vee p \vdash p$

1 :	$p \vee p$	premisa
2 :	$p$	supuesto
3 :	$p$	supuesto
4 :	$p$	$\vee$ e 1,2-2,3-3

28.  $p \vdash p \vee p$

1 :	$p$	premisa
2 :	$p \vee p$	$\vee$ intro 1

29.  $p \vee (q \vee r) \vdash (p \vee q) \vee r$

1 :	$p \vee (q \vee r)$	premisa
2 :	$p$	supuesto
3 :	$p \vee q$	$\vee$ intro 2
4 :	$(p \vee q) \vee r$	$\vee$ intro 3
5 :	$q \vee r$	supuesto
6 :	$q$	supuesto
7 :	$p \vee q$	$\vee$ intro 6
8 :	$(p \vee q) \vee r$	$\vee$ intro 7
9 :	$r$	supuesto
10 :	$(p \vee q) \vee r$	$\vee$ intro 9
11 :	$(p \vee q) \vee r$	$\vee$ e 5,6-8,9-10
12 :	$(p \vee q) \vee r$	$\vee$ e 1,2-4,5-11



30.  $(p \vee q) \vee r \vdash p \vee (q \vee r)$

1 :	$(p \vee q) \vee r$	premisa
2 :	$p \vee q$	supuesto
3 :	$p$	supuesto
4 :	$p \vee (q \vee r)$	$\vee$ intro 3
5 :	$q$	supuesto
6 :	$q \vee r$	$\vee$ intro 5
7 :	$p \vee (q \vee r)$	$\vee$ intro 6
8 :	$p \vee (q \vee r)$	$\vee$ e 2,3–4,5–7
9 :	$r$	supuesto
10 :	$q \vee r$	$\vee$ intro 9
11 :	$p \vee (q \vee r)$	$\vee$ intro 10
12 :	$p \vee (q \vee r)$	$\vee$ e 1,2–8,9–11

31.  $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

1 :	$p \wedge (q \vee r)$	premisa
2 :	$q \vee r$	$\wedge$ e 1
3 :	$p$	$\wedge$ e 1
4 :	$q$	supuesto
5 :	$p \wedge q$	$\wedge$ i 3,4
6 :	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee$ intro 5
7 :	$r$	supuesto
8 :	$p \wedge r$	$\wedge$ i 3,7
9 :	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee$ intro 8
10 :	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee$ e 2,4–6,7–9

32.  $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash p \wedge (q \vee r)$

1 :	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	premisa
2 :	$p \wedge q$	supuesto
3 :	$q$	$\wedge e$ 2
4 :	$p$	$\wedge e$ 2
5 :	$q \vee r$	$\vee$ intro 3
6 :	$p \wedge (q \vee r)$	$\wedge i$ 4,5
7 :	$p \wedge r$	supuesto
8 :	$r$	$\wedge e$ 7
9 :	$p$	$\wedge e$ 7
10 :	$q \vee r$	$\vee$ intro 8
11 :	$p \wedge (q \vee r)$	$\wedge i$ 9,10
12 :	$p \wedge (q \vee r)$	$\vee e$ 1,2-6,7-11

33.  $p \vee (q \wedge r) \vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

1 :	$p \vee (q \wedge r)$	premisa
2 :	$p$	supuesto
3 :	$p \vee q$	$\vee$ intro 2
4 :	$p \vee r$	$\vee$ intro 2
5 :	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$\wedge i$ 3,4
6 :	$q \wedge r$	supuesto
7 :	$r$	$\wedge e$ 6
8 :	$q$	$\wedge e$ 6
9 :	$p \vee q$	$\vee$ intro 8
10 :	$p \vee r$	$\vee$ intro 7
11 :	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$\wedge i$ 9,10
12 :	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$\vee e$ 1,2-5,6-11

34.  $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \vdash p \vee (q \wedge r)$

1 :	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	premisa
2 :	$p \vee q$	$\wedge e$ 1
3 :	$p$	supuesto
4 :	$p \vee (q \wedge r)$	$\vee$ intro 3
5 :	$q$	supuesto
6 :	$p \vee r$	$\wedge e$ 1
7 :	$p$	supuesto
8 :	$p \vee (q \wedge r)$	$\vee$ intro 7
9 :	$r$	supuesto
10 :	$q \wedge r$	$\wedge i$ 5,9
11 :	$p \vee (q \wedge r)$	$\vee$ intro 10
12 :	$p \vee (q \wedge r)$	$\vee e$ 6,7–8,9–11
13 :	$p \vee (q \wedge r)$	$\vee e$ 2,3–4,5–12

35.  $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \vdash (p \vee q) \rightarrow r$

1 :	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$	premisa
2 :	$p \vee q$	supuesto
3 :	$p$	supuesto
4 :	$p \rightarrow r$	$\wedge e$ 1
5 :	$r$	$\rightarrow e$ 4,3
6 :	$q$	supuesto
7 :	$q \rightarrow r$	$\wedge e$ 1
8 :	$r$	$\rightarrow e$ 7,6
9 :	$r$	$\vee e$ 2,3–5,6–8
10 :	$(p \vee q) \rightarrow r$	$\rightarrow i$ 2–9

36.  $(p \vee q) \rightarrow r \vdash (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

1 :	$(p \vee q) \rightarrow r$	premisa
2 :	$p$	supuesto
3 :	$p \vee q$	$\vee$ intro 2
4 :	$r$	$\rightarrow$ e 1,3
5 :	$p \rightarrow r$	$\rightarrow$ i 2-4
6 :	$q$	supuesto
7 :	$p \vee q$	$\vee$ intro 6
8 :	$r$	$\rightarrow$ e 1,7
9 :	$q \rightarrow r$	$\rightarrow$ i 6-8
10 :	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$	$\wedge$ i 5,9

#### 4. Negaciones

37.  $p \vdash \neg \neg p$

1 :	$p$	premisa
2 :	$\neg \neg p$	$\neg \neg$ i 1

38.  $\neg p \vdash p \rightarrow q$

1 :	$\neg p$	premisa
2 :	$p$	supuesto
3 :	$\perp$	$\neg$ e 2,1
4 :	$q$	$\perp$ e 3
5 :	$p \rightarrow q$	$\rightarrow$ i 2-4

39.  $p \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow \neg p$

1 :	$p \rightarrow q$	premisa
2 :	$\neg q$	supuesto
3 :	$\neg \neg p$	supuesto
4 :	$p$	$\neg \neg$ e 3
5 :	$q$	$\rightarrow$ e 1,4
6 :	$\perp$	$\neg$ e 5,2
7 :	$\neg p$	RAA 3-6
8 :	$\neg q \rightarrow \neg p$	$\rightarrow$ i 2-7

40.  $p \vee q, \neg q \vdash p$

- 1 :  $p \vee q, \neg q$     premisas
- 2 :  $p$     supuesto
- 3 :  $q$     supuesto
- 4 :  $\perp$      $\neg e$  3,1.2
- 5 :  $p$      $\perp e$  4
- 6 :  $p$      $\vee e$  1.1,2-2,3-5

41.  $p \vee q, \neg p \vdash q$

- 1 :  $p \vee q, \neg p$     premisas
- 2 :  $p$     supuesto
- 3 :  $\perp$      $\neg e$  2,1.2
- 4 :  $q$      $\perp e$  3
- 5 :  $q$     supuesto
- 6 :  $q$      $\vee e$  1.1,2-4,5-5

42.  $p \vee q \vdash \neg(\neg p \wedge \neg q)$

- 1 :  $p \vee q$     premisa
- 2 :  $\neg p \wedge \neg q$     supuesto
- 3 :  $p$     supuesto
- 4 :  $\neg p$      $\wedge e$  2
- 5 :  $\perp$      $\neg e$  3,4
- 6 :  $q$     supuesto
- 7 :  $\neg q$      $\wedge e$  2
- 8 :  $\perp$      $\neg e$  6,7
- 9 :  $\perp$      $\vee e$  1,3-5,6-8
- 10 :  $\neg(\neg p \wedge \neg q)$      $\neg i$  2-9

43.  $p \wedge q \vdash \neg(\neg p \vee \neg q)$ 

1 :	$p \wedge q$	premisa
2 :	$\neg\neg(\neg p \vee \neg q)$	supuesto
3 :	$\neg p \vee \neg q$	$\neg\neg$ e 2
4 :	$\neg p$	supuesto
5 :	$p$	$\wedge$ e 1
6 :	$\perp$	$\neg$ e 5,4
7 :	$\neg q$	supuesto
8 :	$q$	$\wedge$ e 1
9 :	$\perp$	$\neg$ e 8,7
10 :	$\perp$	$\vee$ e 3,4-6,7-9
11 :	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	RAA 2-10

44.  $\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge \neg q$ 

1 :	$\neg(p \vee q)$	premisa
2 :	$p$	supuesto
3 :	$p \vee q$	$\vee$ intro 2
4 :	$\perp$	$\neg$ e 3,1
5 :	$\neg p$	$\neg$ i 2-4
6 :	$q$	supuesto
7 :	$p \vee q$	$\vee$ intro 6
8 :	$\perp$	$\neg$ e 7,1
9 :	$\neg q$	$\neg$ i 6-8
10 :	$\neg p \wedge \neg q$	$\wedge$ i 5,9

45.  $\neg p \wedge \neg q \vdash \neg(p \vee q)$

1 :	$\neg p \wedge \neg q$	premisa
2 :	$p \vee q$	supuesto
3 :	$p$	supuesto
4 :	$\neg p$	$\wedge e$ 1
5 :	$\perp$	$\neg e$ 3,4
6 :	$q$	supuesto
7 :	$\neg q$	$\wedge e$ 1
8 :	$\perp$	$\neg e$ 6,7
9 :	$\perp$	$\vee e$ 2,3-5,6-8
10 :	$\neg(p \vee q)$	$\neg i$ 2-9

46.  $\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$

1 :	$\neg p \vee \neg q$	premisa
2 :	$p \wedge q$	supuesto
3 :	$\neg p$	supuesto
4 :	$p$	$\wedge e$ 2
5 :	$\perp$	$\neg e$ 4,3
6 :	$\neg q$	supuesto
7 :	$q$	$\wedge e$ 2
8 :	$\perp$	$\neg e$ 7,6
9 :	$\perp$	$\vee e$ 1,3-5,6-8
10 :	$\neg(p \wedge q)$	$\neg i$ 2-9

47.  $\vdash \neg(p \wedge \neg p)$

1 :	$p \wedge \neg p$	supuesto
2 :	$\neg p$	$\wedge e$ 1
3 :	$p$	$\wedge e$ 1
4 :	$\perp$	$\neg e$ 3,2
5 :	$\neg(p \wedge \neg p)$	$\neg i$ 1-4

48.  $p \wedge \neg p \vdash q$ 

1 :  $p \wedge \neg p$     premisa  
 2 :  $\neg p$          $\wedge e$  1  
 3 :  $p$              $\wedge e$  1  
 4 :  $\perp$             $\neg e$  3,2  
 5 :  $q$              $\perp e$  4

49.  $\neg\neg p \vdash p$ 

1 :  $\neg\neg p$     premisa  
 2 :  $p$          $\neg\neg e$  1

50.  $\vdash p \vee \neg p$ 1 :  $p \vee \neg p$     LEM51.  $\vdash ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$ 

1 :	$(p \rightarrow q) \rightarrow p$	supuesto
2 :	$\neg p$	supuesto
3 :	$\neg(p \rightarrow q)$	MT 2,1
4 :	$p$	supuesto
5 :	$\perp$	$\neg e$ 4,2
6 :	$q$	$\perp e$ 5
7 :	$p \rightarrow q$	$\rightarrow i$ 4-6
8 :	$\perp$	$\neg e$ 7,3
9 :	$p$	RAA 2-8
10 :	$((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$	$\rightarrow i$ 1-9

52.  $\neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow q$ 

1 :  $\neg q \rightarrow \neg p$     premisa  
 2 :  $p$             supuesto  
 3 :  $\neg q$         supuesto  
 4 :  $\neg p$          $\rightarrow e$  1,3  
 5 :  $\perp$          $\neg e$  2,4  
 6 :  $q$             RAA 3-5  
 7 :  $p \rightarrow q$      $\rightarrow i$  2-6



53.  $\neg(\neg p \wedge q) \vdash p \vee q$

1 :	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	premisa
2 :	$p \vee \neg p$	LEM
3 :	$p$	supuesto
4 :	$p \vee q$	$\vee$ intro 3
5 :	$\neg p$	supuesto
6 :	$q \vee \neg q$	LEM
7 :	$q$	supuesto
8 :	$p \vee q$	$\vee$ intro 7
9 :	$\neg q$	supuesto
10 :	$\neg p \wedge \neg q$	$\wedge$ i 5,9
11 :	$\perp$	$\neg$ e 10,1
12 :	$p \vee q$	$\perp$ e 11
13 :	$p \vee q$	$\vee$ e 6,7-8,9-12
14 :	$p \vee q$	$\vee$ e 2,3-4,5-13

54.  $\neg(\neg p \vee \neg q) \vdash p \wedge q$

1 :	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	premisa
2 :	$\neg p$	supuesto
3 :	$\neg p \vee \neg q$	$\vee$ intro 2
4 :	$\perp$	$\neg$ e 3,1
5 :	$p$	RAA 2-4
6 :	$\neg q$	supuesto
7 :	$\neg p \vee \neg q$	$\vee$ intro 6
8 :	$\perp$	$\neg$ e 7,1
9 :	$q$	RAA 6-8
10 :	$p \wedge q$	$\wedge$ i 5,9

55.  $\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q$ 

1 :	$\neg(p \wedge q)$	premisa
2 :	$p \vee \neg p$	LEM
3 :	$p$	supuesto
4 :	$q \vee \neg q$	LEM
5 :	$q$	supuesto
6 :	$p \wedge q$	$\wedge$ i 3,5
7 :	$\perp$	$\neg$ e 6,1
8 :	$\neg p \vee \neg q$	$\perp$ e 7
9 :	$\neg q$	supuesto
10 :	$\neg p \vee \neg q$	$\vee$ intro 9
11 :	$\neg p \vee \neg q$	$\vee$ e 4,5-8,9-10
12 :	$\neg p$	supuesto
13 :	$\neg p \vee \neg q$	$\vee$ intro 12
14 :	$\neg p \vee \neg q$	$\vee$ e 2,3-11,12-13

56.  $\vdash (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ 

1 :	$(p \rightarrow q) \vee \neg(p \rightarrow q)$	LEM
2 :	$p \rightarrow q$	supuesto
3 :	$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$	$\vee$ intro 2
4 :	$\neg(p \rightarrow q)$	supuesto
5 :	$q$	supuesto
6 :	$p$	supuesto
7 :	$q$	hyp 5
8 :	$p \rightarrow q$	$\rightarrow$ i 6-7
9 :	$\perp$	$\neg$ e 8,4
10 :	$p$	$\perp$ e 9
11 :	$q \rightarrow p$	$\rightarrow$ i 5-10
12 :	$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$	$\vee$ intro 11
13 :	$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$	$\vee$ e 1,2-3,4-12