# Lógica computacional

*José A. Alonso Jiménez*
Febrero de 1997

Depto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

# Contenido

# Capítulo 1

# Preliminares

## 1.1 Cadenas

**1.1.1 Definición** Sea $\Sigma$ un conjunto no vacío.

1. Una **cadena de longitud** $n$ en $\Sigma$ es una aplicación $u : n \to \Sigma$.
2. La **longitud** de la cadena $u$ se representa por $|u|$.
3. El conjunto de las cadenas de longitud $n$ en $\Sigma$ se representa por $\Sigma^n$.
4. $\Sigma^* = \bigcup_{n \geq 0} \Sigma^n$.
5. Las **cadenas** en $\Sigma$ son los elementos de $\Sigma^*$.
6. La **cadena vacía** es el único elemento de $\Sigma^0$ y se representa por $\Lambda$.
7. Si $u \in \Sigma^*$ y $0 < i \leq |u|$, entonces $u_i = u(i-1)$.
8. Si $u \in \Sigma^n$, la cadena $u$ se representa por $u_1 \dots u_n$.

**1.1.2 Definición** Dadas dos cadenas $u \in \Sigma^m$ y $v \in \Sigma^n$, su **concatenación** (representada por $u.v$ ó $uv$) es la cadena $w \in \Sigma^{m+n}$ definida por

$$w(i) = \begin{cases} u(i), & \text{si } 0 \leq i < m; \\ v(i-m), & \text{si } m \leq i < m+n. \end{cases}$$

**1.1.3 Lema**

1. $\Lambda$ es elemento neutro para la concatenación.
2. La concatenación es asociativa.
3. La concatenación no es conmutativa.

**1.1.4 Nota** Para disminuir el número de paréntesis se usará el convenio de asociar por la derecha. Por ejemplo, se escribirá $uvw$ en lugar de $u.(v.w)$.

**1.1.5 Definición** Sean $u, v \in \Sigma^*$.

1. Se dice que $u$ es un **prefijo** de $v$ (ó $v$ es un **sufijo** de $u$), y se representa por $u \leq v$, si existe $w \in \Sigma^*$ tal que $v = uw$.

2. Se dice que $u$ es un **prefijo propio** de $v$ (ó $v$ es un **sufijo propio** de $u$), y se representa por $u < v$, si $u \leq v$ y $u \neq v$.

## 1.2 Inducción y recursión

**1.2.1 Nota** En esta sección usaremos la siguiente notación:

1. $A$ es un conjunto no vacío.

2. $F$ es un conjunto de operaciones en $A$; es decir, para cada $f \in F$, existe un $n > 0$ tal que $f : A^n \to A$.

3. $\alpha$ es una aplicación de $F$ en $\mathbb{N}$ tal que para cada $f \in F$, $f : A^{\alpha(f)} \to A$. Se dice que $\alpha(f)$ es la aridad de $f$.

4. $X$ es un subconjunto no vacío de $A$.

**1.2.2 Definición** Sea $Y \subseteq A$.

1. $Y$ es **cerrado bajo** $F$ si para todo $f \in F$ y todo $y_1, \ldots, y_{\alpha(f)} \in Y$, se tiene que $f(y_1, \ldots, y_{\alpha(f)}) \in Y$.

2. $Y$ es **inductivo sobre** $X$ si $X \subseteq Y$ e $Y$ es cerrado bajo $F$.

**1.2.3 Definición** La **clausura transitiva** de $X$ es

$$X^+ = \bigcap \{Y \subseteq A : Y \text{ es inductivo sobre } X\}.$$

**1.2.4 Lema** $X^+$ es el menor subconjunto inductivo de $A$ que contiene a $X$ y es cerrado bajo $F$.

**1.2.5 Definición**

1. La sucesión $(X_i)_{i \geq 0}$ está definida recursivamente por:

$$\begin{array}{ll} X_0 & = X \\ X_{i+1} & = X_i \cup \{f(x_1, \ldots, x_n) : f \in F, n = \alpha(f), (x_1, \ldots, x_n) \in X_i^n\} \end{array}$$

2. El conjunto **engendrado por** $X$ **mediante** $F$ es

$$X_+ = \bigcup_{i \geq 0} X_i$$

**1.2.6 Lema** $X^+ = X_+$

**1.2.7 Teorema** (**Principio de inducción para** $X_+$)
Si $Y \subseteq X_+$ es inductivo sobre $X$, entonces $Y = X_+$.

**1.2.8 Definición** Se dice que $X_+$ está **libremente generado por** $X$ **mediante** $F$ si se verifican las siguientes condiciones:

1. Para toda $f \in F$, la restricción de $f$ a $X_+^{\alpha(f)}$ es inyectiva.
2. Para toda $f, g \in F$, si $f \neq g$ entonces $rang(f) \cap rang(g) = \emptyset$.
3. Para toda $f \in F$, $rang(f) \cap X = \emptyset$.

**1.2.9 Nota** En lo que sigue, $X_{-1} = \emptyset$.

**1.2.10 Lema** Si $X_+$ está libremente generado por $X$ mediante $F$, entonces para todo $i \geq 0$, se verifican:

1. Si $f \in F$, $n = \alpha(f)$ y $(x_1, \dots, x_n) \in X_i^n - X_{i-1}^n$, entonces $f(x_1, \dots, x_n) \notin X_i$.
2. $X_{i-1} \neq X_i$.

**1.2.11 Teorema** (**de recursión**)
Sea $B$ un conjunto no vacío, $G$ un conjunto de operaciones en $B$, $\beta : G \to \mathbb{N}$ y $d : F \to G$ tales que

1. para toda $g \in G$, $g$ es una aplicación de $B^{\beta(g)}$ en $B$.
2. para toda $f \in F$, $\beta(d(f)) = \alpha(f)$.

Si $X_+$ está generado libremente por $X$ mediante $F$, entonces para cada aplicación $h : X \to B$ existe una única aplicación $\hat{h} : X_+ \to B$ tal que:

1. Para todo $x \in X$, $\hat{h}(x) = h(x)$.
2. Para todo $f \in F$, $(x_1, \dots, x_n) \in X_+^n$,

   $$\hat{h}(x)(f(x_1, \dots, x_n)) = g(\hat{h}(x_1), \dots, \hat{h}(x_n)),$$

   donde $n = \alpha(f)$ y $g = d(f)$.

# Capítulo 2

# Sintaxis de la lógica proposicional

## 2.1 El lenguaje de la lógica proposicional

**2.1.1 Definición** El **alfabeto proposicional** $\Sigma_0$ consta de:

1. Un conjunto numerable $SP$ de **símbolos proposicionales**: $p_0, p_1, \dots$.
2. Las **conectivas lógicas**: $\neg$ (negación) y $\vee$ (disyunción).
3. **Símbolos auxiliares**: "(" y ")".

**2.1.2 Definición** El conjunto $PROP$ de las **fórmulas (proposicionales)** es el conjunto engendrado por $SP$ mediante las aplicaciones $C_\neg : \Sigma_0^* \to \Sigma_0^*$ y $C_\vee : \Sigma_0^* \times \Sigma_0^* \to \Sigma_0^*$ definidas por:

$$\begin{array}{l} C_\neg(F) = \neg F \\ C_\vee(F, G) = (F \vee G) \end{array}$$

**2.1.3 Lema (Principio de inducción para fórmulas)**
Sea $S \subseteq PROP$ tal que:

1. $SP \subseteq S$;
2. si $F \in S$, entonces $\neg F \in S$;
3. si $F, G \in S$, entonces $(F \vee G) \in S$.

Entonces $S = PROP$.

**2.1.4 Ejemplo** El conjunto $PROP$ es el menor subconjunto de $\Sigma_0^*$ tal que:

1. $SP \subseteq S$
2. Si $F \in S$, entonces $\neg F \in S$.
3. Si $F, G \in S$, entonces $(F \vee G) \in S$.

**2.1.5 Ejemplo**

1. Las siguientes cadenas son fórmulas:

$$p_1, \quad (p_1 \vee \neg p_0), \quad \neg(p_1 \vee p_1)$$

2. Las siguientes cadenas no son fórmulas:

$$(p_1), \quad p_1 \vee \neg p_0$$

**2.1.6 Nota**

1. Los símbolos $p, q, r, \ldots$ representarán símbolos proposicionales.
2. Los símbolos $F, G, H, \ldots$ representarán fórmulas.

**2.1.7 Nota** Se usarán las siguientes abreviaturas:

1. $(F \wedge G)$ en lugar de $\neg(\neg F \vee \neg G)$.
2. $(F \to G)$ en lugar de $(\neg F \vee G)$.
3. $(F \leftrightarrow G)$ en lugar de $((F \to G) \wedge (G \to F))$.
4. $\left(\bigvee_{i=1}^{n} F_i\right)$ en lugar de $(F_1 \vee (F_2 \vee \ldots \vee (F_{n-1} \vee F_n) \ldots))$.
5. $\left(\bigwedge_{i=1}^{n} F_i\right)$ en lugar de $(F_1 \wedge (F_2 \wedge \ldots \wedge (F_{n-1} \wedge F_n) \ldots))$.

## 2.2 Libre generación del conjunto de las fórmulas

**2.2.1 Lema**

1. Todas las fórmulas tienen el mismo número de paréntesis izquierdos que derechos.
2. Si $F'$ es un prefijo propio de una fórmula $F$, entonces $F'$ es la cadena vacía, una cadena no vacía de símbolos de negación o contiene un exceso de paréntesis izquierdos.

3. Ningún prefijo propio de una fórmula es una fórmula.

**2.2.2 Teorema** El conjunto $PROP$ de las fórmulas proposicionales está libremente generado por el conjunto de los símbolos proposicionales y las conectivas lógicas.

**2.2.3 Corolario (recursión sobre fórmulas)**
Sea $X$ un conjunto no vacío, $f : X \to X$ y $g : X^2 \to X$. Para cada función $h : SP \to X$, existe una única función $\hat{h} : PROP \to X$ tal que:

1. Para todo $p_i \in SP$, $\hat{h}(p_i) = h(p_i)$.
2. Para toda $F \in PROP$, $\hat{h}(\neg F) = f(\hat{h}(F))$.
3. Para toda $F, G \in PROP$, $\hat{h}((F \vee G)) = g(\hat{h}(F), \hat{h}(G))$.

**2.2.4 Definición** El conjunto $Subf(F)$ de las **subfórmulas** de una fórmula $F$ se define recursivamente por:

$$Subf(F) = \begin{cases} \{F\}, & \text{si } F \text{ es una variable proposicional;} \\ \{F\} \cup Subf(G), & \text{si } F = \neg G; \\ \{F\} \cup Subf(G) \cup Subf(H), & \text{si } F = G \vee H; \end{cases}$$

**2.2.5 Nota** Para disminuir el número de paréntesis, se introducen los siguientes convenios:

1. Pueden eliminarse los paréntesis externos.
2. Las conectivas tienen una precedencia de asociación. De mayor a menor, están ordenadas por: $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$.
3. Cuando una conectiva se usa repetidamente, se asocia por la derecha.

**2.2.6 Ejemplo**

1. $F \wedge G \to \neg F \vee G$ es una abreviatura de $((F \wedge G) \to (\neg F \vee G))$
2. $F \vee G \vee H$ es una abreviatura de $(F \vee (G \vee H))$

# Capítulo 3

# Semántica de la lógica proposicional

## 3.1 La semántica de las proposiciones

**3.1.1 Definición** Los elementos del conjunto $2 = \{0, 1\}$ se llaman **valores de verdad**. Se dice que 0 es el valor **falso** y el 1 es el valor **verdadero**.

**3.1.2 Definición**

1. La **función de verdad** de la negación es $H_\neg : 2 \to 2$ definida por:

$$H_\neg(i) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = 0; \\ 0, & \text{si } i = 1. \end{cases}$$

2. La **función de verdad** de la disyunción es $H_\vee : 2 \times 2 \to 2$ definida por:

$$H_\vee(i, j) = \begin{cases} 0, & \text{si } i = j = 0; \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

**3.1.3 Definición** Una **valoración de verdad** es una aplicación $v : SP \to 2$.

**3.1.4 Lema** Para cada valoración de verdad $v$ existe una única aplicación $\hat{v} : PROP \to 2$ tal que:

1. Para todo $p_i \in SP$, $\hat{v}(p_i) = v(p_i)$.
2. Para toda $F \in PROP$, $\hat{v}(\neg F) = H_\neg(\hat{v}(F))$.
3. Para toda $F, G \in PROP$, $\hat{v}((F \vee G)) = H_\vee(\hat{v}(F), \hat{v}(G))$.

Se dice que $\hat{v}(F)$ es el **valor de verdad** de $F$ respecto de $v$.

**3.1.5 Lema** Sea $F$ una fórmula y $v, v'$ dos valoraciones. Si $v(p) = v'(p)$ para todos los símbolos proposicionales de $F$, entonces $\hat{v}(F) = \widehat{v'}(F)$.

**3.1.6 Definición**

1. La **función de verdad** de la conjnción es $H_\wedge : 2 \times 2 \to 2$ definida por:

$$H_\wedge(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j = 1; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

2. La **función de verdad** del condicional es $H_\to : 2 \times 2 \to 2$ definida por:

$$H_\to(i,j) = \begin{cases} 0, & \text{si } i = 1, j = 0; \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

3. La **función de verdad** del bicondicional es $H_\leftrightarrow : 2 \times 2 \to 2$ definida por:

$$H_\leftrightarrow(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

**3.1.7 Lema** Sea $v$ una valoración de verdad.

1. $\hat{v}((F \wedge G)) = H_\wedge(\hat{v}(F), \hat{v}(G))$.
2. $\hat{v}((F \to G)) = H_\to(\hat{v}(F), \hat{v}(G))$.
3. $\hat{v}((F \leftrightarrow G)) = H_\leftrightarrow(\hat{v}(F), \hat{v}(G))$.

**3.1.8 Ejemplo** Sea $F = p \vee q \to p$ y $v$ una valoración de verdad tal que $v(p) = 0$ y $v(q) = 1$. Entonces $\hat{v}(F) = 0$.

## 3.2 Tautologías

**3.2.1 Definición** Sea $F$ una fórmula, $\Gamma$ un conjunto de fórmulas y $v$ una valoración de verdad.

1. La valoración $v$ **satisface** a $F$ (o es un **modelo** de $F$), y se representa por $v \models F$, si $\hat{v}(F) = 1$. En caso contrario, se dice que $v$ **falsifica** a $F$ y se representa por $v \not\models F$.

2. La valoración $v$ **satisface** a $\Gamma$ (o es un **modelo** de $\Gamma$), y se representa por $v \models \Gamma$, si $\hat{v}(F) = 1$ para toda $F \in \Gamma$. En caso contrario, se dice que $v$ **falsifica** a $\Gamma$ y se representa por $v \not\models \Gamma$.

**3.2.2 Definición** Sea $F$ una fórmula y $\Gamma$ un conjunto de fórmulas.

1. $F$ (resp. $\Gamma$) es **consistente** (o **satisfacible**) si tiene modelos. En caso contrario, es **inconsistente** (o **insatisfacible**).

2. $F$ es una **tautología**, y se representa por $\models F$, si $\hat{v}(F) = 1$ para todas las valoraciones de verdad.

3. $F$ es **consecuencia taulógica** de $\Gamma$, y se representa por $\Gamma \models F$, si $\hat{v}(F) = 1$ para todos los modelos de $\Gamma$.

**3.2.3 Nota** Si $\Gamma = \{F_1, \dots, F_n\}$, se escribirá $F_1, \dots, F_n \models G$ en lugar de $\{F_1, \dots, F_n\} \models G$.

**3.2.4 Ejemplo**

1. $p \lor q$ y $\{p, q\}$ son consistentes.
2. $p \land \neg p$ y $\{p, p \to q, \neg q\}$ son inconsistentes.
3. $p \to p$ es una tautología y $p \to q$ no lo es.
4. $p, p \to q \models q$.

**3.2.5 Nota**

1. El **problema de la consistencia** (o de la satisfacibilidad) consiste en dada una fórmula determinar si es consistente.
2. El **problema de la tautología** consiste en dada una fórmula determinar si es una tautología.

**3.2.6 Lema** Una fórmula $F$ es una tautología syss $\neg F$ es inconsistente.

**3.2.7 Lema** Dadas las fórmulas $F_1, \dots, F_n, G$, son equivalentes:

1. $F_1, \dots, F_n \models G$.
2. $\models \bigwedge_{i=1}^{n} F_i \to G$.
3. $\{F_1, \dots, F_n, \neg G\}$ es inconsistente.

**3.2.8 Lema** $\Gamma \models F$ syss $\Gamma \cup \{\neg F\}$ es inconsistente.

## 3.3 Métodos de verificación de tautologías

**3.3.1 Definición** Sea $F$ una fórmula y $p_{i_1}, \dots, p_{i_n}$ los símbolos proposicionales que ocurren en $F$ con $i_1 < \dots < i_n$. La **función de verdad** de $F$ es la aplicación $H_F : 2^n \to 2$ definida por:

$$H_F(j_1, \dots, j_n) = \hat{v}(F),$$

donde $v$ es una valoración de verdad tal que $v(p_{i_k}) = j_k$ para $k \in \{1, \dots, n\}$.

**3.3.2 Definición** La **tabla de verdad** de una fórmula $F$ es el grafo de su función de verdad.

**3.3.3 Ejemplo** La tabla de verdad de la fórmula

$$F = (p_1 \land \neg p_2) \lor (p_2 \land \neg p_1)$$

es

| $p_1$ | $p_2$ | $F$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

**3.3.4 Nota** Para facilitar los cálculos, suelen añadirse columnas para subfórmulas de $F$.

**3.3.5 Nota (Método de las tablas de verdad)**

1. Una fórmula $F$ es consistente syss $1 \in rang(H_F)$ (i.e., en la columna de $F$ aparece algún 1).

2. Una fórmula $F$ es una tautología syss $\{1\} = rang(H_F)$ (i.e., en la columna de $F$ sólo aparecen 1).

**3.3.6 Ejemplo** Comprobar que $p \land (p \to q) \to q$ es una tautología.

**3.3.7 Nota (Método de reducción)**
Se supone que en una valoración de verdad desconocida, el valor de verdad de $F$ es 0. Entonces, $F$ es una tautología syss de este supuesto se sigue una contradicción.

Los valores supuestos o deducidos para $F$ y sus subfórmulas se colocan debajo de sus conectivas principales.

**3.3.8 Nota**

1. El método de las tablas de verdad es exponencial, en el sentido de que la verificación de una fórmula con $n$ símbolos proposicionales puede requerir la evaluación de $2^n$ valoraciones para $F$.

2. El problema de la consistencia es NP-completo.

# Capítulo 4

# Completitud funcional y compacidad

## 4.1 Completitud funcional

**4.1.1 Definición** Una **función de verdad** $n$–aria es una aplicación de $2^n$ en 2.

**4.1.2 Teorema (de completitud funcional)**
Para cada función de verdad $n$–aria $g$ existe una fórmula $F$ tal que $H_F = g$ y las únicas conectivas de $F$ están en $\{\neg, \vee, \wedge\}$.

**4.1.3 Corolario** Existen procedimientos de forma que para cada función de verdad $g$ encuentran una fórmula $F$ tal que $H_F = g$ y las únicas conectivas de $F$ están en $\{\neg, \vee, \wedge\}$.

**4.1.4 Ejemplo** Sea $g$ la función de verdad definida por

| $i_1$ | $i_2$ | $g$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

Calcular una fórmula $F$ tal que $H_F = g$.

## 4.2 Compacidad

**4.2.1 Definición** Un conjunto de fórmulas $\Gamma$ es **finitamente consistente** si cualquier subconjunto finito de $\Gamma$ es consistente.

**4.2.2 Lema** Si $\Gamma$ es finitamente consistente, entonces $\Gamma \cup \{F\}$ ó $\Gamma \cup \{\neg F\}$ es finitamente consistente.

**4.2.3 Definición** Un conjunto de fórmulas $\Gamma$ es **completo** si para cualquier fórmula $F$ se tiene $F \in \Gamma$ ó $\neg F \in \Gamma$.

**4.2.4 Lema** Si $\Gamma$ es un conjunto finitamente consistente, entonces existe un conjunto finitamente consistente y completo que contiene a $\Gamma$.

**4.2.5 Teorema (de compacidad)**
Si un conjunto de fórmula es finitamente consistente, entonces es consistente.

**4.2.6 Corolario** Un conjunto de fórmulas es consistente syss es finitamente consistente.

**4.2.7 Corolario** Si $\Gamma \models F$, entonces existe un conjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que $\Gamma_0 \models F$.

# Capítulo 5

# Equivalencia y formas normales

## 5.1 Equivalencia

**5.1.1 Definición** Dos fórmulas $F$ y $G$ son equivalentes, y se representa por $F \equiv G$, si $\hat{v}(F) = \hat{v}(G)$ para toda valoración $v$.

**5.1.2 Lema**

1. $F \equiv G$ syss $\models F \leftrightarrow G$.
2. La relación $\equiv$ es de equivalencia en $PROP$.

**5.1.3 Lema**

1. Si $F \equiv F'$, entonces $\neg F \equiv \neg F'$.
2. Si $F \equiv F'$, $G \equiv G'$ y $* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, entonces $F * G \equiv F' * G'$.

**5.1.4 Teorema (de sustitución)**
Sea $G$ una subfórmula de $F$ y $F'$ la fórmula obtenida sustituyendo una ocurrencia de $G$ en $F$ por $G'$. Si $G \equiv G'$, entonces $F \equiv F'$.

**5.1.5 Lema** Las siguientes equivalencias se verifican para todas las fórmulas:

1. Idempotencia:
$$F \vee F \equiv F \qquad F \wedge F \equiv F$$
2. Conmutatividad:
$$F \vee G \equiv G \vee F \qquad F \wedge G \equiv G \wedge F$$
3. Asociatividad:
$$F \vee (G \vee H) \equiv (F \vee G) \vee H \qquad F \wedge (G \wedge H) \equiv (F \wedge G) \wedge H$$
4. Absorción:
$$F \wedge (G \vee H) \equiv F \qquad F \vee (G \wedge H) \equiv F$$

5. Distributividad:

$$F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H) \qquad F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$$

6. Doble negación:

$$\neg\neg F \equiv F$$

7. Leyes de de Morgan:

$$\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G \qquad \neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$$

8. Leyes de tautologías: Si $F$ es una tautología, entonces

$$F \wedge G \equiv G \qquad F \vee G \equiv F$$

9. Leyes de inconsistentes: Si $F$ es inconsistente, entonces

$$F \wedge G \equiv F \qquad F \vee G \equiv G$$

**5.1.6 Ejemplo** Usar las anteriores equivalencias y el teorema de sustitución para demostrar que

$$(F \vee (G \vee H)) \wedge (H \vee \neg F) \equiv (G \wedge \neg F) \vee H.$$

**5.1.7 Lema**

1. Leyes de de Morgan:

$$\neg\left(\bigwedge_{i=1}^{n} F_i\right) \equiv \bigvee_{i=1}^{n} \neg F_i \qquad \neg\left(\bigvee_{i=1}^{n} F_i\right) \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} \neg F_i$$

2. Distributividad:

$$\left(\bigvee_{i=1}^{m} F_i\right) \wedge \left(\bigvee_{j=1}^{n} G_j\right) \equiv \bigvee_{i=1}^{m} \left(\bigvee_{j=1}^{n} (F_i \wedge G_j)\right)$$

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{m} F_i\right) \vee \left(\bigwedge_{j=1}^{n} G_j\right) \equiv \bigwedge_{i=1}^{m} \left(\bigwedge_{j=1}^{n} (F_i \vee G_j)\right)$$

## 5.2 Formas normales

**5.2.1 Definición**

1. Un **literal** es un símbolo proposicional o su negación.
2. Un literal es **positivo** si es un símbolo proposicional y **negativo**, en caso contrario.

3. Usaremos la letra $L$ (posiblemente con índices) para representar literales.

4. El **complementario** de un literal $L$ es

$$\overline{L} = \begin{cases} \neg p & \text{si } L = p; \\ p & \text{si } L = \neg p; \end{cases}$$

5. Los literales $L$ y $L'$ son **complementarios** si $L' = \overline{L}$.

6. Una **cláusula conjuntiva** (ó $\wedge$–**cláusula**) $C$ es una conjunción de un conjunto finito de literales; i.e., $C = \bigwedge\limits_{i=1}^{n} L_i$

7. Una **cláusula disjuntiva** (ó $\vee$–**cláusula**) $D$ es una disyunción de un conjunto finito de literales; i.e., $D = \bigvee\limits_{i=1}^{n} L_i$

8. Una fórmula $F$ está en **forma normal conjuntiva (FNC)** si es una conjunción de un conjunto de cláusulas disjuntivas; i.e.,

$$F = \bigwedge_{i=1}^{n} \left( \bigvee_{j=1}^{m_i} L_{i,j} \right)$$

9. Una fórmula $F$ está en **forma normal disjuntiva (FND)** si es una disyunción de un conjunto de cláusulas conjuntivas; i.e.,

$$F = \bigvee_{i=1}^{n} \left( \bigwedge_{j=1}^{m_i} L_{i,j} \right)$$

10. $F$ es una **forma normal conjuntiva de** $G$ si $F$ está en forma normal conjuntiva y $F \equiv G$.

11. $F$ es una **forma normal disjuntiva de** $G$ si $F$ está en forma normal disjuntiva y $F \equiv G$.

**5.2.2 Teorema** Para cada fórmula $F$ existe una fórmula $G_1$ y una fórmula $G_2$ tal que $G_1$ es una forma normal conjuntiva de $F$ y $G_2$ es una forma normal disyuntiva de $F$.

**5.2.3 Nota (Algoritmo de normalización)**
*Entrada:* Una fórmula $F$.
*Salida:* Una forma normal conjuntiva de $F$, $G$.

*Procedimiento:* Sustituir en $F$, mientras sea posible, las subfórmulas:

| | |
|---|---|
| $(G \leftrightarrow H)$ | por $((G \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow G))$ |
| $(G \rightarrow H)$ | por $(\neg G \vee H)$ |
| $\neg\neg G$ | por $G$ |
| $\neg(G \vee H)$ | por $(\neg G \wedge \neg H)$ |
| $\neg(G \wedge H)$ | por $(\neg G \vee \neg H)$ |
| $(G_1 \vee (G_2 \wedge G_3))$ | por $((G_1 \vee G_2) \wedge (G_1 \vee G_3))$ |
| $((G_1 \wedge G_2) \vee G_3))$ | por $((G_1 \vee G_3) \wedge (G_2 \vee G_3))$ |

**5.2.4 Nota** Intercambiando el papel de las conectivas $\vee$ y $\wedge$ en el algoritmo anterior se obtiene una forma normal disyuntiva de la fórmula.

**5.2.5 Nota** A partir de la demostración del teorema de completitud funcional, puede diseñarse otro algoritmo para el cálculo de las formas normales.

## 5.3 Formas normales y validez

**5.3.1 Lema** Sean $L_1, \dots, L_n$ literales. Son equivalentes:

1. $\bigvee_{i=1}^{n} L_i$ es una tautología.
2. $\bigwedge_{i=1}^{n} L_i$ es inconsistente
3. $\{L_1, \dots, L_n\}$ contiene un par de literales complementarios.

**5.3.2 Teorema**

1. Una fórmula en forma normal conjuntiva es una tautología syss cada una de sus cláusulas disjuntivas es una tautología.
2. Una fórmula en forma normal disjuntiva es inconsistente syss cada una de sus cláusulas conjuntivas es inconsistente.

**5.3.3 Algoritmo (de inconsistencia mediante FND)**

*Entrada:* Una fórmula $F$.

*Salida:* `Consistente`, si $F$ es consistente; `Inconsistente`, en caso contrario.

*Procedimiento:*

Sean $G$ una forma normal disjuntiva de $F$
    $G_1, \dots, G_n$ las $\wedge$–cláusulas de $G$
Desde $i = 1$ hasta $n$
    si en $G_i$ no ocurren literales complementarios,
        entonces devolver `Consistente` y parar.
Devolver `Inconsistente` y parar.

**5.3.4 Algoritmo (de validez mediante FNC)**

*Entrada:* Una fórmula $F$

*Salida:* `Tautologia`, si $F$ es una tautología; `No-tautologia`, en caso contrario.

*Procedimiento:*

Sean $G$ una forma normal conjuntiva de $F$
    $G_1, \dots, G_n$ las $\vee$–cláusulas de $G$
Desde $i = 1$ hasta $n$
    si en $G_i$ ocurren literales complementarios,
      entonces devolver `No-tautologia` y parar.
Devolver `Tautologia` y parar.

# Capítulo 6

# Cláusulas proposicionales

## 6.1 Cláusulas

**6.1.1 Definición**

1. Una **cláusula** es un conjunto finito de literales.
2. La **cláusula vacía** es el conjunto vacío y se representa por $\Box$.

**6.1.2 Nota** Usaremos las siguientes variables sintácticas:

1. $L$ para literales.
2. $C, D$ para cláusulas.
3. $S$ para conjuntos de cláusulas.

**6.1.3 Definición** Sea $C$ una cláusula.

1. El conjunto de los literales positivos de $C$ es
$$C_+ = C \cap SP$$
2. El conjunto de los literales negativos de $C$ es
$$C_- = C - C_+$$

**6.1.4 Definición** Sea $v$ una valoración de verdad.

1. Para cada literal $L$,
$$v'(L) = \begin{cases} v(p), & \text{si } L = p; \\ 1 - v(p), & \text{si } L = \neg p. \end{cases}$$
2. Para cada cláusula $C$,
$$v''(C) = 1 \text{ syss existe un } L \in C \text{ tal que } v'(L) = 1$$

3. Para cada conjunto de cláusulas $S$,

$$v'''(S) = 1 \text{ syss para todo } C \in S, v''(C) = 1$$

**6.1.5 Lema** Sea $v$ una valoración.

1. $v''(\square) = 0$.
2. $v'''(\emptyset) = 1$.

**6.1.6 Nota** En lo que sigue, escribiremos $v(L), v(C)$ ó $v(S)$ en lugar de $v'(L), v''(C)$ ó $v'''(S)$

**6.1.7 Definición** Sea $v$ una valoración.

1. $v$ es un **modelo** de $C$ (ó $C$ es **válida** en $v$), $v \models C$, si $v(C) = 1$.
2. $v$ es un **modelo** de $S$ (ó $S$ es **válida** en $v$), $v \models S$, si $v(S) = 1$.

**6.1.8 Definición**

1. $C$ (resp. $S$) es **consistente** si tiene un modelo. En caso contrario, es **inconsistente**.
2. $C$ es una **tautología**, $\models C$, si $v(C) = 1$ para toda valoración $v$.
3. $C$ es **consecuencia** de $S$, $S \models C$, si $v(C) = 1$ para todos los modelos $v$ de $S$.

**6.1.9 Lema** $C$ es una tautología syss contiene un par de literales complementarios.

**6.1.10 Nota**

1. Si $S \subseteq S'$ y $S'$ es consistente, entonces $S$ es consistente.
2. Si $\square \in S$, entonces $S$ es inconsistente.

## 6.2 Cláusulas y fórmulas

**6.2.1 Definición**

1. El conjunto de fórmulas correspondiente a la cláusula $C \neq \square$ es

$$Form(C) = \left\{ \bigvee_{i=1}^{n} L_i : C = \{L_1, \dots, L_n\} \right\}$$

2. El conjunto de fórmulas correspondiente al conjunto de cláusulas $C \neq \emptyset$ es
$$Form(S) = \left\{ \bigwedge_{i=1}^{n} F_i : S = \{C_1, \dots, C_n\}, F_i \in Form(C_i) \right\}$$

**6.2.2 Lema**

1. Si $F, G \in Form(C)$, entonces $F \equiv G$.
2. Si $F, G \in Form(S)$, entonces $F \equiv G$.

**6.2.3 Definición**

1. $C$ y $F$ son **equivalentes**, $C \equiv F$, si $v''(C) = \hat{v}(F)$ para toda valoración $v$.
2. $S$ y $F$ son **equivalentes**, $S \equiv F$, si $v'''(S) = \hat{v}(F)$ para toda valoración $v$.
3. $S$ y $S'$ son **equivalentes**, $S \equiv S'$, si $v'''(S) = v'''(S')$ para toda valoración $v$.

**6.2.4 Lema**

1. Si $F \in Form(C)$, entonces $C \equiv F$.
2. Si $F \in Form(S)$, entonces $S \equiv F$.

**6.2.5 Teorema** Para cada fórmula $F$ existe un conjunto de cláusulas $S$ tal que $S \equiv F$.

**6.2.6 Definición** Un conjunto de cláusulas $S$ es una **forma clausal** de la fórmula $F$ si $S \equiv F$.

**6.2.7 Nota** Existe un algoritmo que para cada fórmula $F$ devuelve una forma clausal de $F$.

**6.2.8 Teorema (de compacidad para conjuntos de cláusulas)**
Un conjunto de cláusulas $S$ es inconsistente syss existe $S' \subseteq S$ finito e inconsistente.

# Capítulo 7

# El algoritmo de Davis–Putnam

## 7.1 Las reglas de Davis–Putnam

**7.1.1 Teorema (Regla de tautología)**
Si $C \in S$ es una tautología, entonces $S$ es consistente syss $S - \{C\}$ es consistente.

**7.1.2 Definición**

1. $S_{L^+} = \{C \in S : L \in C\}$
2. $S_{L^-} = \{C \in S : \overline{L} \in C\}$
3. $S_{L^0} = \{C \in S : L \notin C, \overline{L} \notin C\}$.
4. $S_{L=0} = S_{L^0} \cup \{C - \{L\} : C \in S_{L^+}\}$
5. $S_{L=1} = S_{L^0} \cup \left\{C - \{\overline{L}\} : C \in S_{L^-}\right\}$

**7.1.3 Nota**

1. $S = S_{L^+} \cup S_{L^-} \cup S_{L^0}$
2. $S_{L^-} = S_{\overline{L}^+}$
3. $S_{L=1} = S_{\overline{L}=0}$

**7.1.4 Lema** Sea $v$ una valoración.

1. Si $v(L) = 0$, entonces $v(S) = v\left(S_{L=0}\right)$
2. Si $v(L) = 1$, entonces $v(S) = v\left(S_{L=1}\right)$

**7.1.5 Teorema (Regla de bifurcación)**
$S$ es consistente syss $S_{L=0}$ ó $S_{L=1}$ es consistente.

**7.1.6 Definición** $L$ es un **literal puro** de $S$ si $L \in \bigcup S$ y $\overline{L} \notin \bigcup S$.

**7.1.7 Teorema (Regla de los literales puros)**
Si $L$ es un literal puro de $S$, entonces $S$ es consistente syss $S_{L^0}$ es consistente.

**7.1.8 Definición** Una **cláusula unitaria** es una cláusula con un elemento.

**7.1.9 Teorema (Regla de las cláusulas unitarias)**
Si $\{L\} \in S$, entonces $S$ es consistente syss $S_{L=1}$ es consistente.

## 7.2 El algoritmo de Davis–Putnam

**7.2.1 Algoritmo (de Davis–Putnam)**
*Entrada:* Un conjunto finito de cláusulas, $S$.
*Salida:* `Consistente`, si $S$ es consistente; `Inconsistente`, en caso contrario.
*Procedimiento DP(S)*

$$\text{DP-AUX}(S - \{C : C \text{ es una tautologia}\}, \emptyset)$$

*Procedimiento DP–AUX(S,T)*

**si** $S = \emptyset$
  **entonces devolver** `Consistente`
  **e.o.c. si** $\square \in S$
    **entonces si** $T = \emptyset$
      **entonces devolver** `Inconsistente`
      **e.o.c.** DP–AUX(primero($T$), resto($T$))
    **e.o.c. si** $L$ es un literal puro de $S$
      **entonces** DP–AUX($S_{L^0}$, $T$)
      **e.o.c. si** $\{L\}$ es una clausula unitaria de $S$
        **entonces** DP–AUX($S_{L^1}$, $T$)
        **e.o.c. sea** $L$ un literal en $S$
          DP–AUX($S_{L=0}$, cons($S_{L=1}, T$))

**7.2.2 Ejemplo** Utilizar el algoritmo anterior para comprobar que:

1. $\{\{\neg p, q\}, \{p\}, \{\neg q\}\}$ es consistente.
2. $\{\{p, q, \neg r, s\}, \{\neg q, \neg p, \neg r, s\}, \{\neg q, \neg p, \neg r\}\}$ es consistente.
3. $\{\{\neg q, p\}, \{r, p\}, \{\neg p, \neg q\}, \{\neg p, s\}, \{q, \neg r\}, \{q, \neg s\}\}$ es inconsistente.

**7.2.3 Teorema** El algoritmo anterior es correcto.

## 7.3 Inconsistencia minimal y subsunción

**7.3.1 Definición** La cláusula $C$ **subsume** a la cláusula $D$ si $C \subset D$.

**7.3.2 Teorema (Regla de subsunción)**
Sean $C, D \in S$. Si $C$ subsume a $D$, entonces $S$ es consistente syss $S - \{D\}$ es consistente.

**7.3.3 Nota** El algoritmo de Davis–Putnam puede modificarse para utilizar la regla de subsunción.

**7.3.4 Definición** Un conjunto finito de cláusulas $S$ es **inconsistente minimal** si $S$ es inconsistente y todo $S' \subset S$ es consistente.

**7.3.5 Lema** Si $S$ es inconsistente, entonces existe un $S' \subseteq S$ inconsistente minimal.

**7.3.6 Lema** Si $S$ es inconsistente minimal, entonces

1. no existen $C, D \in S$ tales que $C \subset D$.

2. $S$ no contiene literales puros.

# Capítulo 8

# Resolución proposicional

## 8.1 Sistema de resolución

**8.1.1 Definición** Sean $C, D$ dos cláusulas y $L \in C_1$ tal que $\overline{L} \in C_2$, la **resolvente** de $C$ y $D$ respecto de $L$ es

$$res_L(C, D) = (C - \{L\}) \cup (D - \{\overline{L}\})$$

El **conjunto de resolventes** de $C_1$ y $C_2$ es

$$Res(C_1, C_2) = \{res_L(C_1, C_2) : L \in C_1, \overline{L} \in C_2\}$$

**8.1.2 Definición** Sea $S$ un conjunto de cláusulas.

1. La sucesión $(C_1, \dots, C_n)$ es una **deducción por resolución** a partir de $S$ si para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ se verifica una de las siguientes condiciones:

   (a) $C_i \in S$.

   (b) existen $j, k < i$ tales que $C_i \in Res(C_j, C_k)$.

2. La cláusula $C$ es **deducible por resolución** a partir de $S$, $S \vdash C$, si existe una deducción por resolución a partir de $S$, $(C_1, \dots, C_n)$, tal que $C_n = C$.

3. La sucesión $(C_1, \dots, C_n)$ es una **refutación por resolución** de $S$ si es una deducción por resolución a partir de $S$ y $C_n = \square$.

4. $S$ es **refutable** si $S \vdash \square$.

**8.1.3 Nota** La refutabilidad de un conjunto de cláusulas puede ilustrarse mediante grafos de refutación.

**8.1.4 Definición** Sean $C, D$ dos cláusulas. El **conjunto de resolventes** de $C$ y $D$ es

$$Res(C, D) = \{res_L(C, D) : L \in C, \overline{L} \in D\}$$

**8.1.5 Definición** Sea $S$ un conjunto de cláusulas.

1. $Res(S) = S \cup (\bigcup\{Res(C_1, C_2) : C_1, C_2 \in S\})$.
2. La sucesión $(Res^n(S))_{n \geq 0}$ está definida por:

$$\begin{array}{l} Res^0(S) = S \\ Res^{n+1} = Res(Res^n(S)) \end{array}$$

3. $Res^*(S) = \bigcup_{n\geq 0} Res^n(S)$

**8.1.6 Lema** $S \vdash C$ syss $C \in Res^*(S)$.

## 8.2 Correción y completitud de la resolución

**8.2.1 Lema (de resolución)**
Si $R$ es una resolvente de $C_1$ y $C_2$, entonces los conjuntos $\{C_1, C_2\}$ y $\{C_1, C_2, R\}$ son equivalentes.

**8.2.2 Corolario** $S \equiv Res^*(S)$.

**8.2.3 Teorema (de corrección)**
Si $S \vdash \square$, entonces $S$ es inconsistente.

**8.2.4 Teorema (de completitud)**
Si $S$ es inconsistente, entonces $S \vdash \square$.

**8.2.5 Corolario** $S$ es inconsistente syss $S \vdash \square$.

## 8.3 Estrategias de resolución

**8.3.1 Algoritmo (de resolución por saturación)**
*Entrada:* Un conjunto finito de cláusulas, $S$.
*Salida:* `Consistente`, si $S$ es consistente; `Inconsistente`, en caso contrario.
*Procedimiento:*

> **Hacer** $S' := \emptyset$
> **mientras que** $(\square \notin S)$ **y** $(S \neq S')$
>     **hacer** $S' := S$
>           $S := Res(S)$
> **si** $(\square \in S)$
>   **entonces devolver** `Inconsistente`
>   **e.o.c devolver** `Consistente`

**8.3.2 Teorema** El algoritmo anterior es correcto.

**8.3.3 Ejemplo** Aplicar el algoritmo anterior al conjunto

$$S = \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$$

**8.3.4 Definición** El **simplificado** de un conjunto finito de cláusulas $S$ es el conjunto obtenido de $S$ suprimiendo las tautologías y las cláusulas subsumidas por otras; es decir,

$$Simp(S) = S - \{C \in S : (C \text{ es una tautología}) \text{ ó } (\text{existe } D \in S \text{ tal que } D \subset C)\}$$

**8.3.5 Algoritmo (de resolución por saturación con simplificación)**
*Entrada:* Un conjunto finito de cláusulas, $S$.
*Salida:* `Consistente`, si $S$ es consistente; `Inconsistente`, en caso contrario.
*Procedimiento:*

**Hacer** $S' := \emptyset$
**mientras que** $(\square \notin S)$ **y** $(S \neq S')$
  **hacer** $S' := S$
    $S := Simp(Res(S))$
**si** $(\square \in S)$
  **entonces devolver** `Inconsistente`
  **e.o.c devolver** `Consistente`

**8.3.6 Teorema** El algoritmo anterior es correcto.

# Capítulo 9

# Refinamientos de resolución

## 9.1 Resolución semántica

**9.1.1 Definición** Una **interpretación** $I$ es un conjunto de símbolos proposicionales.

**9.1.2 Definición** La **valoración correspondiente** a la interpretación $I$ está definida por

$$v_I(p) = \begin{cases} 1, & \text{si } p \in I; \\ 0, & \text{si } p \notin I; \end{cases}$$

**9.1.3 Definición** Sea $I$ una interpretación.

1. $I$ es un **modelo** de una cláusula $C$, $I \models C$, si $v_I(C) = 1$.

2. $I$ es un **modelo** de un conjunto de cláusulas $S$, $I \models S$, si $v_I(S) = 1$.

**9.1.4 Definición** Sea $S$ un conjunto de cláusulas e $I$ una interpretación.

1. El conjunto de las cláusulas de $S$ verdaderas en $I$ es

$$S_T(I) = \{C \in S : I \models C\}.$$

2. El conjunto de las cláusulas de $S$ falsas en $I$ es

$$S_F(I) = S - S_T(I).$$

**9.1.5 Definición** Sea $S$ un conjunto de cláusulas e $I$ una interpretación.

1. La sucesión $(C_1, \dots, C_n)$ es una **deducción por $I$–resolución** a partir de $S$ si para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ se verifica una de las siguientes condiciones:

   (a) $C_i \in S$.

   (b) existen $j, k < i$ tales que $C_i \in Res(C_j, C_k)$ y una de las cláusulas $C_j, C_k$ pertenece a $S_T(I)$ y la otra a $S_F(I)$.

2. La cláusula $C$ es **deducible por $I$–resolución** a partir de $S$, $S \vdash_I C$, si existe una deducción por $I$–resolución a partir de $S$, $(C_1, \dots, C_n)$, tal que $C_n = C$.

**9.1.6 Definición** Sea $S$ un conjunto de cláusulas e $I$ una interpretación.

1. El conjunto de las resolventes de $S$ respecto de $I$ es

$$Res_I(S) = S \cup \left( \bigcup \{Res(C_1, C_2) : C_1 \in S_T(I), C_2 \in S_F(I)\} \right)$$

2. La sucesión $(Res_I^n(S))_{n \geq 0}$ está definida por:

$$\begin{array}{l} Res_I^0(S) = S \\ Res_I^{n+1} = Res_I(Res_I^n(S)) \end{array}$$

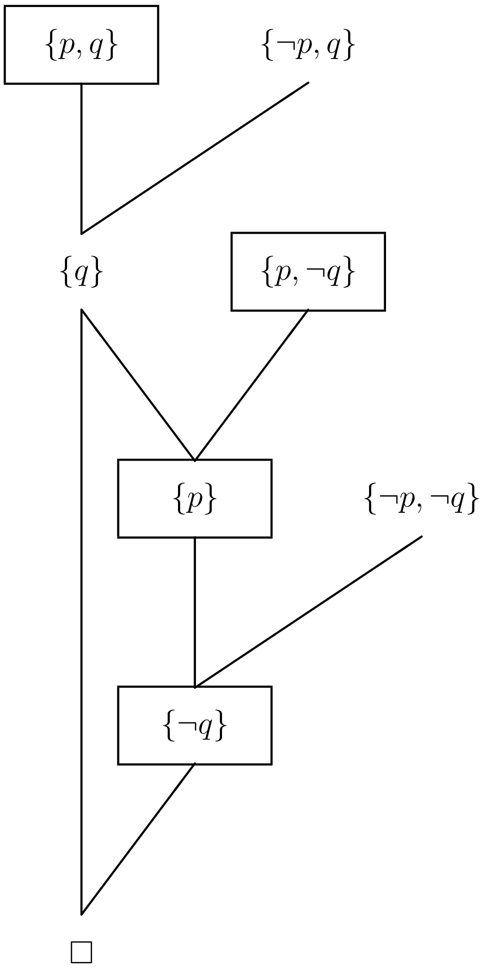
3. $Res_I^*(S) = \bigcup_{n \geq 0} Res_I^n(S)$

**9.1.7 Lema** $S \vdash_I C$ syss $C \in Res_I^*(S)$.

**9.1.8 Ejemplo** Sea $S = \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$ e $I = \{p\}$. Entonces

$$(\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{q\}, \{p, \neg q\}, \{p\}, \{\neg p, \neg q\}, \{\neg q\}, \square)$$

es una $I$–resolución a partir de $S$. Puede ilustrarse mediante el siguiente diagrama en el que se han encuadrado los elementos de $S_T(I)$.




**9.1.9 Teorema (de corrección y completitud de la resolución semántica)**
Sea $I$ una interpretación. Un conjunto de cláusulas $S$ es inconsistente syss $S \vdash_I \square$.

## 9.2 Resolución $\mathrm{P}_1$ y $\mathrm{N}_1$

**9.2.1 Definición** Una cláusula es **positiva** si todos sus literales son positivos.

**9.2.2 Definición** Sea $S$ un conjunto de cláusulas.

1. La sucesión $(C_1, \dots, C_n)$ es una **deducción por $P_1$–resolución** a partir de $S$ si para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ se verifica una de las siguientes condiciones:
   (a) $C_i \in S$.
   (b) existen $j, k < i$ tales que $C_i \in Res(C_j, C_k)$ y una de las cláusulas $C_j, C_k$ es positiva.
2. La cláusula $C$ es **deducible por $P_1$–resolución** a partir de $S$, $S \vdash_P C$, si existe una deducción por $P_1$–resolución a partir de $S$, $(C_1, \dots, C_n)$, tal que $C_n = C$.

**9.2.3 Definición** Sea $S$ un conjunto de cláusulas.

1. $S_P = \{C : C \text{ es positiva}\}$
2. El conjunto de las $P_1$ resolventes de $S$ es
$$Res_P(S) = S \cup \left( \bigcup \{Res(C_1, C_2) : C_1 \in S_P \text{ ó } C_2 \in S_P\} \right)$$
3. La sucesión $(Res_P^n(S))_{n \geq 0}$ está definida por:
$$\begin{array}{l} Res_P^0(S) = S \\ Res_P^{n+1} = Res_P(Res_P^n(S)) \end{array}$$
4. $Res_P^*(S) = \bigcup\limits_{n \geq 0} Res_P^n(S)$

**9.2.4 Lema** $S \vdash_P C$ syss $C \in Res_P^*(S)$.

**9.2.5 Teorema (de corrección y completitud de la $P_1$–resolución)** Un conjunto de cláusulas $S$ es inconsistente syss $S \vdash_P \square$.

**9.2.6 Definición** Una cláusula es **negativa** si todos sus literales son negativos.

**9.2.7 Definición** Sea $S$ un conjunto de cláusulas.

1. La sucesión $(C_1, \dots, C_n)$ es una **deducción por $N_1$–resolución** a partir de $S$ si para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ se verifica una de las siguientes condiciones:
   (a) $C_i \in S$.
   (b) existen $j, k < i$ tales que $C_i \in Res(C_j, C_k)$ y una de las cláusulas $C_j, C_k$ es negativa.
2. La cláusula $C$ es **deducible por $N_1$–resolución** a partir de $S$, $S \vdash_N C$, si existe una deducción por $N_1$–resolución a partir de $S$, $(C_1, \dots, C_n)$, tal que $C_n = C$.

**9.2.8 Definición** Sea $S$ un conjunto de cláusulas.

1. $S_N = \{C : C \text{ es negativa}\}$
2. El conjunto de las $N_1$ resolventes de $S$ es

$$Res_N(S) = S \cup \left(\bigcup \{Res(C_1, C_2) : C_1 \in S_N \text{ ó } C_2 \in S_N\}\right)$$

3. La sucesión $(Res_N^n(S))_{n \geq 0}$ está definida por:

$$\begin{array}{l} Res_N^0(S) = S \\ Res_N^{n+1} = Res_N(Res_N^n(S)) \end{array}$$

4. $Res_N^*(S) = \bigcup\limits_{n \geq 0} Res_N^n(S)$

**9.2.9 Lema** $S \vdash_N C$ syss $C \in Res_N^*(S)$.

**9.2.10 Teorema (de corrección y completitud de la $N_1$–resolución)** Un conjunto de cláusulas $S$ es inconsistente syss $S \vdash_N \square$.

## 9.3 Resolución lineal

**9.3.1 Definición** Sea $S$ un conjunto de cláusulas.

1. La sucesión $(C_0, C_1, \dots, C_n)$ es una **resolución lineal** a partir de $S$ si se cumplen las siguientes condiciones:

   (a) $C_0 \in S$;

   (b) para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, existe un $B \in S \cup \{C_0, \dots, C_{i-1}\}$ tal que $C_i \in Res(C_{i-1}, B)$.

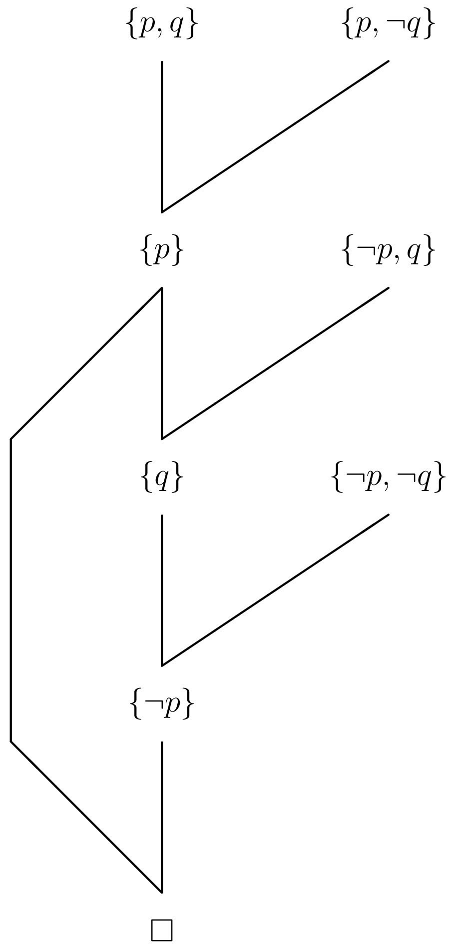
   La cláusula $C_0$ se llama **cláusula base**, las $C_i$ se llaman **cláusulas centrales** y las $B$ se llaman **cláusulas laterales**.

2. La cláusula $C$ es **deducible por resolución lineal** a partir de $S$, $S \vdash_L C$, si existe una deducción por resolución lineal a partir de $S$, $(C_0, \dots, C_n)$, tal que $C_n = C$.

**9.3.2 Ejemplo** Sea $S = \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$. Entonces

$$(\{p, q\}, \{p\}, \{q\}, \square)$$

es una resolución lineal a partir de $S$. Puede ilustrarse mediante el siguiente diagrama.




**9.3.3 Teorema (de corrección y completitud de la resolución lineal)** Un conjunto de cláusulas $S$ es inconsistente syss $S \vdash_L \square$.

## 9.4 Resolución con soporte

**9.4.1 Definición** Sea $S$ un conjunto de cláusulas y $T \subseteq S$ tal que $S - T$ es consistente.

1. La sucesión $(C_1, \ldots, C_n)$ es una **deducción por resolución con soporte** $T$ a partir de $S$ si para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ se verifica una de las siguientes condiciones:
   (a) $C_i \in S$.
   (b) existen $j, k < i$ tales que $C_i \in Res(C_j, C_k)$ y una de las cláusulas $C_j, C_k$ no pertenece a $S - T$.
2. La cláusula $C$ es **deducible por resolución con soporte** $T$ a partir de $S$, $S \vdash_T C$, si existe una deducción por resolución con soporte $T$ a partir de $S$, $(C_1, \ldots, C_n)$, tal que $C_n = C$.

**9.4.2 Definición** Sea $S$ un conjunto de cláusulas y $T \subseteq S$ tal que $S - T$ es consistente,

1. El conjunto de las resolventes de $S$ con soporte en $T$ es

$$Res_T(S) = S \cup \left(\bigcup\{Res(C_1, C_2) : C_1 \notin S - T \text{ ó } C_2 \notin S - T\}\right)$$

2. La sucesión $(Res_T^n(S))_{n\geq 0}$ está definida por:

$$\begin{array}{l} Res_T^0(S) = S \\ Res_T^{n+1} = Res_T(Res_T^n(S)) \end{array}$$

3. $Res_T^*(S) = \bigcup\limits_{n\geq 0} Res_T^n(S)$

**9.4.3 Lema** $S \vdash_T C$ syss $C \in Res_T^*(S)$.

**9.4.4 Teorema (de corrección y completitud de la resolución con soporte)**
Sea $S$ un conjunto de cláusulas y $T \subseteq S$ tal que $S-T$ es consistente. Entonces $S$ es inconsistente syss $S \vdash_T \Box$.

## 9.5 Resolución unidad y por entradas

**9.5.1 Definición** Sea $S$ un conjunto de cláusulas.

1. La sucesión $(C_1, \dots, C_n)$ es una **deducción por resolución unidad** a partir de $S$ si para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ se verifica una de las siguientes condiciones:
   (a) $C_i \in S$.
   (b) existen $j, k < i$ tales que $C_i \in Res(C_j, C_k)$ y una de las cláusulas $C_j, C_k$ es una cláusula unitaria.
2. La cláusula $C$ es **deducible por resolución unitaria** a partir de $S$, $S \vdash_U C$, si existe una deducción por resolución unidad a partir de $S$, $(C_1, \dots, C_n)$, tal que $C_n = C$.

**9.5.2 Lema (Corrección de la resolución unidad)**
Si $S \vdash_U \Box$, entonces $S$ es inconsistente.

**9.5.3 Definición** Sea $S$ un conjunto de cláusulas.

1. El conjunto de las resolventes unidad de $S$ es

$$Res_U(S) = S \cup \left(\bigcup\{Res(C_1, C_2) : C_1 \text{ ó } C_2 \text{ es una cláusula unitaria}\}\right)$$

2. La sucesión $(Res_U^n(S))_{n\geq 0}$ está definida por:

$$\begin{array}{l} Res_U^0(S) = S \\ Res_U^{n+1} = Res_U(Res_U^n(S)) \end{array}$$

3. $Res_U^*(S) = \bigcup_{n\geq 0} Res_U^n(S)$

**9.5.4 Lema** $S \vdash_U C$ syss $C \in Res_U^*(S)$.

**9.5.5 Ejemplo** Si $S = \{\{p,q\},\{p,\neg q\},\{\neg p,q\},\{\neg p,\neg q\}\}$, entonces $Res_U^*(S) = S$.

**9.5.6 Nota (Incompletitud de la resolución unidad)**
Existen conjuntos inconsistentes $S$ para los cuales $S \not\vdash_U \square$.

**9.5.7 Definición** Sea $S$ un conjunto de cláusulas.

1. La sucesión $(C_1,\dots,C_n)$ es una **deducción por resolución por entradas** a partir de $S$ si para todo $i \in \{1,\dots,n\}$ se verifica una de las siguientes condiciones:
   (a) $C_i \in S$.
   (b) existen $j,k < i$ tales que $C_i \in Res(C_j,C_k)$ y una de las cláusulas $C_j,C_k$ pertenece a $S$.
2. La cláusula $C$ es **deducible por resolución por entradas** a partir de $S$, $S \vdash_E C$, si existe una deducción por resolución por entradas a partir de $S$, $(C_1,\dots,C_n)$, tal que $C_n = C$.

**9.5.8 Lema (Corrección de la resolución por entradas)**
Si $S \vdash_E \square$, entonces $S$ es inconsistente.

**9.5.9 Definición** Sea $S$ un conjunto de cláusulas.

1. El conjunto de las resolventes por entradas de $S$ es
$$Res_E(S) = S \cup \left(\bigcup \{Res(C_1, C_2) : C_1 \in S \text{ ó } C_2 \in S\}\right)$$

2. La sucesión $(Res_E^n(S))_{n\geq 0}$ está definida por:
$$\begin{array}{l} Res_E^0(S) = S \\ Res_E^{n+1} = Res_E(Res_E^n(S)) \end{array}$$

3. $Res_E^*(S) = \bigcup_{n\geq 0} Res_E^n(S)$

**9.5.10 Lema** $S \vdash_E C$ syss $C \in Res_E^*(S)$.

**9.5.11 Ejemplo** Si $S = \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$, entonces $Res_E^*(S) = S \cup \{\{p\}, \{q\}, \{\neg p\}, \{\neg q\}\}$.

**9.5.12 Nota (Incompletitud de la resolución por entrada)**
Existen conjuntos inconsistentes $S$ para los cuales $S \not\vdash_E \square$.

**9.5.13 Teorema** $S \vdash_U \square$ syss $S \vdash_E \square$.

# Capítulo 10

# Cláusulas de Horn

## 10.1 Cláusulas de Horn

**10.1.1 Definición** Una cláusula $C$ es una **cláusula de** HORN si contiene como máximo un literal positivo.

**10.1.2 Definición**

1. Las cláusulas de Horn se clasifican en **negativas** (si tiene todos sus literales negativos) y **definidas** (si tiene un literal positivo).

2. Las cláusulas definidas se clasifican en **hechos** (si son unitarias) y **reglas**.

**10.1.3 Lema**

1. $\{\neg p_1, \dots, \neg p_n, q\} \equiv \bigwedge\limits_{i=1}^{n} p_i \rightarrow q$

2. $\{\neg p_1, \dots, \neg p_n\} \equiv \neg \left( \bigwedge\limits_{i=1}^{n} p_i \right)$

**10.1.4 Lema** Sea $S$ un conjunto de cláusulas de Horn tal que $\square \notin S$.

1. Si $S$ no contiene cláusulas negativas, entonces $S$ es consistente.

2. Si $S$ no contiene hechos, entonces $S$ es consistente.

## 10.2 Resolución y cláusulas de Horn

**10.2.1 Teorema (completitud de la resolución unidad para cláusulas de Horn)**
Sea $S$ un conjunto de cláusulas de Horn. Si $S$ es inconsistente, entonces $S \vdash_U \square$.

**10.2.2 Corolario (completitud de la resolución por entradas para cláusulas de Horn)**
Sea $S$ un conjunto de cláusulas de Horn. Si $S$ es inconsistente, entonces $S \vdash_E \square$.

**10.2.3 Algoritmo**

*Entrada:* Un conjunto finito de cláusulas de Horn, $S$.

*Salida:* `Consistente`, si $S$ es consistente; `Inconsistente`, en caso contrario.

*Procedimiento:*

$$\begin{array}{l}
\textbf{Hacer } S_1 := \{C \in S : C \text{ es un hecho}\} \\
\qquad\quad S_2 := S - S_1 \\
\textbf{mientras que } S_1 \neq \emptyset \textbf{ y } (\square \notin S_2) \\
\qquad \textbf{hacer } C_1 := \mathit{primero}(S_1) \\
\qquad\qquad\quad L \in C_1 \\
\qquad \textbf{si } \overline{L} \notin \bigcup S_2 \\
\qquad\quad \textbf{entonces } S_1 := S_1 - \{C_1\} \\
\qquad\quad \textbf{e.o.c.} \qquad C_2 := \mathit{primero}(\{C \in S_2 : \overline{L} \in C\}) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad S_2 := S_2 - \{C_2\} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad C_3 := \mathit{res}(C_1, C_2) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \textbf{si } C_3 \text{ es un hecho} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \textbf{entonces } S_1 := S_1 \cup \{C_3\} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \textbf{e.o.c. } S_2 := S_2 \cup \{C_3\} \\
\textbf{si } S = \emptyset \\
\quad \textbf{entonces devolver } \texttt{Consistente} \\
\quad \textbf{e.o.c devolver } \texttt{Inconsistente}
\end{array}$$

**10.2.4 Teorema** El algoritmo anterior es correcto y su complejidad es de orden $n^2$, donde $n = \sum_{C \in S} |C|$.

## 10.3 Resolución SLD

**10.3.1 Definición** Sea $S$ un conjunto de cláusulas de Horn.

1. La sucesión $(C_0, C_1, \dots, C_n)$ es una **resolución SLD** a partir de $S$ si se cumplen las siguientes condiciones:
   (a) $C_0 \in S$ es una cláusula negativa;
   (b) para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, existe una cláusula no negativa $B \in S$ tal que $C_i \in \mathit{Res}(C_{i-1}, B)$.

   La cláusula $C_0$ se llama **cláusula base**, las $C_i$ se llaman **cláusulas centrales** y las $B$ se llaman **cláusulas laterales**.

2. La cláusula $C$ es **deducible por resolución SLD** a partir de $S$, $S \vdash_{SLD} C$, si existe una deducción por resolución SLD a partir de $S$, $(C_0, \dots, C_n)$, tal que $C_n = C$.

**10.3.2 Nota** El nombre de SLD viene de "Linear resolution whit Selection function for Definite clauses".

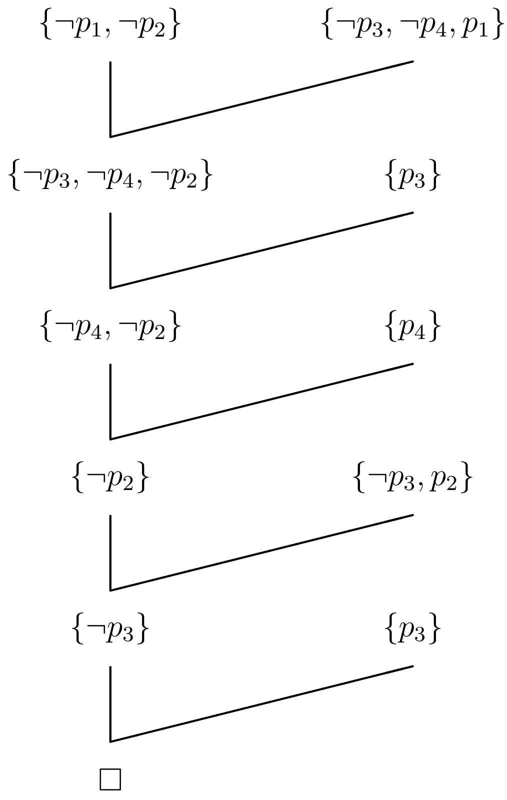
**10.3.3 Ejemplo** Sea

$$S = \{\{p_3\}, \{p_4\}, \{\neg p_1, \neg p_2\}, \{\neg p_3, \neg p_4, p_1\}, \{\neg p_3, p_2\}, \{\neg p_1, \neg p_2\}\}.$$

Entonces

$$(\{\neg p_1, \neg p_2\}, \{\neg p_3, \neg p_4, \neg p_2\}, \{\neg p_4, \neg p_2\}, \{\neg p_2\}, \{\neg p_3\}, \Box\})$$

es una resolución SLD partir de $S$. Puede ilustrarse mediante el siguiente diagrama.




**10.3.4 Teorema (de corrección y completitud de la resolución SLD)** Un conjunto de cláusulas de Horn $S$ es inconsistente syss $S \vdash_{SLD} \Box$.

# Capítulo 11

# Sintaxis de la lógica de primer orden

## 11.1 El lenguaje de la lógica de primer orden

**11.1.1 Definición** El **alfabeto** de un lenguaje de primer orden **L** consta de:

1. Un conjunto numerable de **variables**: $V = \{x_0, x_1, \ldots\}$.
2. Las **conectivas lógicas**: $\neg$ (negación) y $\vee$ (disyunción).
3. El **cuantificador existencial**: $\exists$ (existe).
4. **Símbolos auxiliares**: "(" y ")".
5. Un conjunto finito o numerable (posiblemente vacío) de **símbolos de función** $SF = \{f_0, f_1, \ldots\}$ y una función **rango** ó **aridad**, $r$, que asigna a cada $f \in SF$ un entero no negativo, $r(f)$, llamado el rango del símbolo de función $f$.
6. Un conjunto finito o numerable (posiblemente vacío) de **símbolos de predicados** $SP = \{p_0, p_1, \ldots\}$ y una función **rango** ó **aridad**, $r$, que asigna a cada $p \in SP$ un entero no negativo, $r(p)$, llamado el rango del símbolo de predicado $p$.

Los conjuntos $V, SF$ y $SP$ son disjuntos.

**11.1.2 Nota**

1. Los símbolos de función de aridad 0 se llaman **constantes**.
2. El conjunto de las constantes se representa por $SC$.
3. Los símbolos de predicado de aridad 0 son símbolos proposicionales.

**11.1.3 Definición** Sea **L** un lenguaje de primer orden y $\Gamma = V \cup SF$. Para cada $f \in SF - SC$ de rango $n$ se define la aplicación $C_f : (\Gamma^*)^n \to \Gamma^*$ por:

$$C_f(t_1, \dots, t_n) = ft_1 \dots f_n$$

El conjunto $TERM_{\mathbf{L}}$ de los **términos** de **L** es el conjunto engendrado por $V \cup SC$ mediante las aplicaciones $C_f$.

**11.1.4 Nota** Más informalmente, los términos de **L** se definen por:

1. Las variables y las constantes de **L** son términos de **L**.
2. Si $t_1, \dots, t_n$ son términos de **L** y $f$ es un símbolo de función de **L** de aridad $n$, entonces $ft_1 \dots t_n$ es un término de **L**.

**11.1.5 Lema (Principio de inducción para términos)**
Sea $S \subseteq TERM$ tal que:

1. $V \cup SC \subseteq S$;
2. si $f$ es un símbolo de función de aridad $n > 0$ y $(t_1, \dots, t_n) \in S^n$, entonces $ft_1 \dots t_n \in S$.

Entonces $S = TERM$.

**11.1.6 Definición** Las **fórmulas atómicas** de un lenguaje de primer orden **L** son las expresiones de la forma $pt_1 \dots t_n$, donde $p$ es un símbolo de predicado de aridad $n$ y $t_1, \dots, t_n$ son términos.

**11.1.7 Definición** Sea **L** un lenguaje de primer orden y

$$\Sigma = V \cup SF \cup SP \cup \{\neg, \vee, \exists, (, )\}$$

Se definen las aplicaciones

$$\begin{array}{l} C_\neg : \Sigma^* \to \Sigma^* \\ C_\vee : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^* \\ E_i : \Sigma^* \to \Sigma^* \end{array}$$

por:

$$\begin{array}{l} C_\neg(F) = \neg F \\ C_\vee(F, G) = (F \vee G) \\ E_i(F) = \exists x_i F \end{array}$$

El conjunto $FORM_{\mathbf{L}}$ de las **fórmulas** de **L** es el conjunto engendrado por el conjunto de las fórmulas atómicas de **L** mediante las aplicaciones $C_\neg, C_\vee, E_i$.

**11.1.8 Nota** Más informalmente, las fórmulas de **L** se definen por:

1. Las fórmulas atómicas de **L** son fórmulas de **L**.
2. Si $F$ y $G$ son fórmulas de **L**, entonces $\neg F$ y $(F \vee G)$ también lo son.
3. Si $x_i$ es una variable y $F$ es una fórmula de **L**, entonces $\exists x_i F$ también lo es.

**11.1.9 Lema (Principio de inducción para fórmulas)**
Sea $S \subseteq FORM$ tal que:

1. si $F$ es una fórmula atómica, entonces $F \in S$;
2. si $F \in S$, entonces $\neg F \in S$;
3. si $F, G \in S$, entonces $(F \vee G) \in S$;
4. si $F \in S$, entonces $\exists x_i F \in S$.

Entonces $S = FORM$.

**11.1.10 Nota**

1. Los símbolos $x, y, z, \dots$ representarán variables.
2. Los símbolos $a, b, c, \dots$ representarán constantes.
3. Los símbolos $f, g, h, \dots$ representarán símbolos de funciones.
4. Los símbolos $p, q, r, \dots$ representarán símbolos de predicados.
5. Los símbolos $t_1, t_2, \dots$ representarán términos.
6. Los símbolos $F, G, H, \dots$ representarán fórmulas.

**11.1.11 Nota** Se usarán las siguientes abreviaturas:

1. $(F \wedge G)$ en lugar de $\neg(\neg F \vee \neg G)$.
2. $(F \rightarrow G)$ en lugar de $(\neg F \vee G)$.
3. $(F \leftrightarrow G)$ en lugar de $((F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F))$.
4. $\left( \bigvee_{i=1}^{n} F_i \right)$ en lugar de $(F_1 \vee (F_2 \vee \ldots \vee (F_{n-1} \vee F_n) \ldots))$.
5. $\left( \bigwedge_{i=1}^{n} F_i \right)$ en lugar de $(F_1 \wedge (F_2 \wedge \ldots \wedge (F_{n-1} \wedge F_n) \ldots))$.
6. $\forall x_i F$ en lugar de $\neg \exists x_i \neg F$.

## 11.2 Libre generación de términos y fórmulas

**11.2.1 Lema** Sea $\Gamma = V \cup SF$ y $K : \Gamma^* \to \mathbb{N}$ definida por:

$$K(w) = \begin{cases} 1, & \text{si } w \text{ es una variable;} \\ 1-n, & \text{si } w \text{ es un símbolo de función de aridad } n; \\ K(w_1)+\ldots+K(w_n), & \text{si } w = w_1 \ldots w_n \in \Gamma^* - \Gamma \end{cases}$$

Entonces $K(t) = 1$ para todo término $t$.

**11.2.2 Lema** Si $t'$ es un sufijo propio no vacío de un término $t$, entonces $t'$ es una concatenación de uno o más términos.

**11.2.3 Lema** Ningún prefijo propio de un término es un término.

**11.2.4 Teorema** El conjunto $TERM$ de los términos está libremente generado por las variables, las constantes y las aplicaciones $C_f$.

**11.2.5 Lema** Sea **L** un lenguaje de primer orden,

$$\Sigma = V \cup SF \cup SP \cup \{\neg, \vee, \exists, (, )\}$$

y $K : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ definida por:

$$K(w) = \begin{cases} 1, & \text{si } w \text{ es una variable;} \\ 0, & \text{si } w = \neg \\ -1, & \text{si } w = \vee \\ -1, & \text{si } w = \exists \\ -1, & \text{si } w = ( \\ 1, & \text{si } w = ) \\ 1-n, & \text{si } w \text{ es un símbolo de función de aridad } n; \\ 1-n, & \text{si } w \text{ es un símbolo de predicado de aridad } n; \\ K(w_1)+\ldots+K(w_n), & \text{si } w = w_1 \ldots w_n \in \Sigma^* - \Sigma \end{cases}$$

1. Si $F$ es una fórmula, entonces $K(F) = 1$.
2. Si $w$ es un prefijo propio de una fórmula, entonces $K(w) \leq 0$.

**11.2.6 Lema** Ningún prefijo propio de una fórmula es una fórmula.

**11.2.7 Teorema** El conjunto $FORM$ de las fórmulas está libremente generado por las fórmulas atómicas y las aplicaciones $C_\neg, C_\vee$ y $E_i$.

**11.2.8 Nota**

1. Para disminuir el número de paréntesis se usan los mismos convenios que en el caso proposicional.
2. A veces, escribiremos:

| | | |
|---|---|---|
| $f(t_1, \ldots, t_n)$ | en lugar de | $ft_1 \ldots t_n$ |
| $p(t_1, \ldots, t_n)$ | en lugar de | $pt_1 \ldots t_n$ |
| $(\exists x_i)[F]$ | en lugar de | $\exists x_i F$ |
| $(\forall x_i)[F]$ | en lugar de | $\forall x_i F$ |

## 11.3 Variables libres y ligadas

**11.3.1 Definición** El conjunto $Libre(t)$ de las **variables libres** de un término $t$ se define recursivamente por:

$$Libre(t) = \begin{cases} \{x\}, & \text{si } t = x \text{ es una variable;} \\ Libre(t_1) \cup \ldots \cup Libre(t_n), & \text{si } t = ft_1 \ldots t_n \end{cases}$$

**11.3.2 Definición** El conjunto $Libre(F)$ de las **variables libres** de una fórmula $F$ se define recursivamente por:

$$Libre(F) = \begin{cases} Libre(t_1) \cup \ldots \cup Libre(t_n), & \text{si } t = pt_1 \ldots t_n \\ Libre(G) & \text{si } F = \neg G; \\ Libre(G) \cup Libre(H) & \text{si } F = (G \vee H); \\ Libre(G) - \{x_i\} & \text{si } F = \exists x_i G; \end{cases}$$

**11.3.3 Definición**

1. Un término $t$ es **cerrado** si $Libre(t) = \emptyset$.
2. Una fórmula $F$ es **cerrada** si $Libre(F) = \emptyset$.
3. Una **sentencia** es una fórmula cerrada.
4. Una fórmula es **abierta** si no contiene cuantificadores.

**11.3.4 Definición** El conjunto $Ligada(F)$ de las **variables ligadas** de una fórmula $F$ se define recursivamente por:

$$Ligada(F) = \begin{cases} Ligada(t_1) \cup \ldots \cup Ligada(t_n), & \text{si } t = pt_1 \ldots t_n \\ Ligada(G) & \text{si } F = \neg G; \\ Ligada(G) \cup Ligada(H) & \text{si } F = (G \vee H); \\ Ligada(G) \cup \{x_i\} & \text{si } F = \exists x_i G; \end{cases}$$

**11.3.5 Nota** En general, $Libre(F) \cap Ligada(F) \neq \emptyset$.

## 11.4 Sustituciones

**11.4.1 Definición**

1. Una **sustitución** $\theta$ es una aplicación del conjunto $V$ de las variables en el conjunto $TERM$ de los términos.
2. El **dominio** de una sustitución $\theta$ es

$$D(\theta) = \{x \in V : \theta(x) \neq x\}$$

3. Una sustitución $\theta$ es **finita** si $D(\theta)$ es finito.

**11.4.2 Nota** En lo que sigue, sólo consideraremos sustituciones finitas y omitiremos el adjetivo.

**11.4.3 Nota** Por $\{(x_1, t_1), \dots, (x_n, t_n)\}$ representaremos la sustitución $\theta$ definida por

$$\theta(x) = \begin{cases} t_i, & \text{si } x = x_i; \\ x, & \text{si } x \in V - \{x_1, \dots, x_n\} \end{cases}$$

**11.4.4 Teorema** Para cada sustitución $\theta$ existe una única aplicación $\hat{\theta}$ de $TERM$ en $TERM$ definida por:

$$\hat{\theta}(t) = \begin{cases} \theta(t), & \text{si } t \text{ es una variable;} \\ f\hat{\theta}(t_1)\dots\hat{\theta}(t_n), & \text{si } t = ft_1 \dots t_n \end{cases}$$

En lo sucesivo, escribiremos $\theta(t)$ en lugar de $\hat{\theta}(t)$.

**11.4.5 Definición** Sean $s$ y $t$ dos términos. El término resultante de sustituir en $s$ la variable $x$ por el término $t$ es

$$s[x/t] = \theta(s),$$

donde $\theta = \{(x, t)\}$.

**11.4.6 Definición** Sean $F$ una fórmula y $t$ un término. La fórmula resultante de sustituir en $F$ la variable $x$ por el término $t$ se define recursivamente por:

$$F[x/t] = \begin{cases} pt_1[x/t] \dots t_n[x/t], & \text{si } F = pt_1 \dots t_n; \\ \neg F[x/t], & \text{si } F = \neg G; \\ G[x/t] \vee H[x/t], & \text{si } F = G \vee H: \\ \exists y G[x/t], & \text{si } F = \exists y G \text{ y } x \neq y; \\ \exists x G, & \text{si } F = \exists x G; \end{cases}$$

**11.4.7 Definición** Una variable $x$ de $F$ es **sustituible** por el término $t$ si se cumple una de las siguientes condiciones:

1. $F$ es atómica;
2. $F = \neg G$ y $x$ es sustituible por $t$ en $G$;
3. $F = G \vee H$ y $x$ es sustituible por $t$ en $G$ y en $H$;
4. $F = \exists x G$;
5. $F = \exists y G$, $x \neq y$, $y \notin Libre(t)$ y $x$ es sustituible por $t$ en $G$.

**11.4.8 Nota**

1. En lo sucesivo, al escribir $F[x/t]$, supondremos que $x$ es sustituible por $t$ en $F$.

2. Si una fórmula $F$ contiene una variable libre $x$, escribiremos $F$ como $F(x)$ y abreviaremos $F[x/t]$ por $F(t)$.

**11.4.9 Definición** El conjunto $Subf(F)$ de las **subfórmulas** de una fórmula $F$ se define recursivamente por:

$$Subf(F) = \begin{cases} \{F\}, & \text{si } F \text{ es atómica;} \\ \{F\} \cup Subf(G), & \text{si } F = \neg G; \\ \{F\} \cup Subf(G) \cup Subf(H), & \text{si } F = G \vee H; \\ \{F\} \cup (\bigcup \{Subf(G[x/t]) : \ t \text{ es un término}\}), & \text{si } F = \exists x G; \end{cases}$$

# Capítulo 12

# Semántica de la lógica de primer orden

## 12.1 Semántica de los términos y las fórmulas

**12.1.1 Definición** Sea $\mathbf{L}$ un lenguaje de primer orden. Una **L–estructura** (o, simplemente, **estructura**) es un par $\mathbf{M} = (M, I)$ donde $M$ es un conjunto no vacío llamado el **universo** (o **dominio**) de la estructura e $I$ es una aplicación llamada la **interpretación** de la estructura tal que:

1. Para cada constante $c$, $I(c) \in M$.
2. Para cada símbolo de función de aridad $n > 0$, $I(f) : M^n \to M$.
3. Para cada símbolo de predicado de aridad 0, $I(p) \in 2$.
4. Para cada símbolo de predicado de aridad $n > 0$, $I(p) : M^n \to 2$.

A veces, escribiremos $c_{\mathbf{M}}$, $f_{\mathbf{M}}$ ó $p_{\mathbf{M}}$ en lugar de $I(c)$, $I(f)$ ó $I(p)$, respectivamente.

**12.1.2 Definición** Sea $\mathbf{L}$ un lenguaje de primer orden y $\mathbf{M}$ una $\mathbf{L}$–estructura. Una **asignación** $\sigma$ es una aplicación del conjunto de las variables de $\mathbf{L}$ en el universo de $\mathbf{M}$. El conjunto de las asignaciones se representa por $M^V$.

**12.1.3 Teorema** Sea $\mathbf{M}$ una $\mathbf{L}$–estructura. Para cada asignación $\sigma$ existe una única aplicación $\hat{\sigma}$ de $TERM$ en $M$ definida por:

$$\hat{\sigma}(t) = \begin{cases} \sigma(t), & \text{si } t \text{ es una variable;} \\ f_{\mathbf{M}}(\hat{\sigma}(t_1), \dots, \hat{\sigma}(t_n)), & \text{si } t = ft_1 \dots t_n \end{cases}$$

En lo sucesivo, escribiremos $\sigma(t)$ ó $t_{\mathbf{M}}$ en lugar de $\hat{\sigma}(t)$.

**12.1.4 Definición** Sea $\mathbf{M}$ una $\mathbf{L}$–estructura, $m \in M$ y $\sigma \in V^M$. Se representa por $\sigma[x/m]$ la asignación $\sigma'$ definida por:

$$\sigma'(y) = \begin{cases} \sigma(y), & \text{si } y \neq x; \\ m, & \text{si } y = x. \end{cases}$$

**12.1.5 Definición** La aplicación $H_\exists : \mathbf{P}(2) \to 2$ está definida por

$$H_\exists(X) = \begin{cases} 1, & \text{si } 1 \in X; \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

**12.1.6 Teorema** Sea $\mathbf{M}$ una $\mathbf{L}$–estructura. Para cada asignación $\sigma$ existe una única aplicación $\hat{\sigma}$ de $FORM$ en 2 definida por:

$$\hat{\sigma}(F) = \begin{cases} p_{\mathbf{M}}(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n)), & \text{si } F = pt_1 \dots t_n; \\ H_\neg(G), & \text{si } F = \neg G; \\ H_\vee(G, H), & \text{si } F = G \vee H; \\ H_\exists(\{\widehat{\sigma[x/m]}(G) : m \in M\}), & \text{si } F = \exists x G; \end{cases}$$

En lo sucesivo, escribiremos $\sigma(F)$ ó $F_{\mathbf{M}}$ en lugar de $\hat{\sigma}(t)$.

**12.1.7 Lema** Sea $\mathbf{M}$ una $\mathbf{L}$–estructura y $\sigma$ una asignación.

1. $\sigma(F \wedge G) = H_\wedge(\sigma(F), \sigma(G))$.
2. $\sigma(F \to G) = H_\to(\sigma(F), \sigma(G))$.
3. $\sigma(F \leftrightarrow G) = H_\leftrightarrow(\sigma(F), \sigma(G))$.
4. $\sigma(\forall x F) = 1$ syss $\sigma[x/m](F) = 1$ para todo $m \in M$.
5. $\sigma(\exists x F) = 1$ syss $\sigma[x/m](F) = 1$ para algún $m \in M$.

## 12.2 Consistencia, validez y modelos

**12.2.1 Definición** Sea $\mathbf{L}$ un lenguaje de primer orden y $F$ una fórmula.

1. $F$ es **válida en** la $\mathbf{L}$–estructura $\mathbf{M}$ **respecto de** la asignación $\sigma$, $\mathbf{M} \models_\sigma F$, si $\sigma(F) = 1$.
2. $F$ es **válida en** la $\mathbf{L}$–estructura $\mathbf{M}$, $\mathbf{M} \models F$, si $\sigma(F) = 1$ para todas las asignaciones $\sigma$. En este caso, se dice que $\mathbf{M}$ es un **modelo** de $F$.
3. $F$ es **válida**, $\models F$, si es válida en todas las $\mathbf{L}$–estructuras.
4. $F$ es **consistente** (o **satisfacible**) si tiene algún modelo.

**12.2.2 Definición** Sea $\mathbf{L}$ un lenguaje de primer orden y $\Gamma$ un conjunto de fórmulas.

1. $\Gamma$ es **válido en** la $\mathbf{L}$–estructura $\mathbf{M}$ **respecto de** la asignación $\sigma$, $\mathbf{M} \models_\sigma \Gamma$, si $\sigma(F) = 1$ para toda $F \in \Gamma$.
2. $\Gamma$ es **válido en** la $\mathbf{L}$–estructura $\mathbf{M}$, $\mathbf{M} \models \Gamma$, si $\mathbf{M} \models_\sigma \Gamma$ para todas las asignaciones $\sigma$. En este caso, se dice que $\mathbf{M}$ es un **modelo** de $\Gamma$.

3. $\Gamma$ es **válido**, $\models \Gamma$, si es válido en todas las **L**–estructuras.

4. $\Gamma$ es **consistente** (o **satisfacible**) si tiene algún modelo.

**12.2.3 Definición** Sea **L** un lenguaje de primer orden y $\Gamma, \Gamma'$ dos conjuntos de fórmulas.

1. $\Gamma'$ es **consecuencia semántica** de $\Gamma$, $\Gamma \models \Gamma'$, si todos los modelos de $\Gamma$ también son modelos de $\Gamma'$.

2. La fórmula $F$ es **consecuencia semántica** de $\Gamma$, $\Gamma \models F$, si todos los modelos de $\Gamma$ también son modelos de $F$.

**12.2.4 Nota** Se escribirá $F_1, \dots, F_n \models G$ en lugar de $\{F_1, \dots, F_n\} \models G$.

**12.2.5 Lema** Sea **M** una **L**–estructura, $F$ una fórmula y $\sigma_1, \sigma_2$ dos asignaciones. Si $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$ para toda $x \in \mathit{Libre}(F)$, entonces $\sigma_1(F) = \sigma_2(F)$.

**12.2.6 Corolario** Si **M** es una **L**–estructura y $F$ es una fórmula cerrada, entonces $\mathbf{M} \models F$ ó $\mathbf{M} \models \neg F$.

**12.2.7 Lema** Sea $\Gamma = \{F_1, \dots, F_n\}$ un conjunto de fórmulas cerradas y $G$ una fórmula cerrada.

1. $\mathbf{M} \models \Gamma$ syss $\mathbf{M} \models \bigwedge_{i=1}^{n} F_i$.

2. $\Gamma \models F$ syss $\models \bigwedge_{i=1}^{n} F_i \to G$.

**12.2.8 Lema** Sea $\Gamma$ un conjunto de fórmulas cerradas y $F$ una fórmula cerrada. Entonces $\Gamma \models F$ syss $\Gamma \cup \{\neg F\}$ es inconsistente.

**12.2.9 Corolario** Una fórmula cerrada $F$ es válida syss $\neg F$ es inconsistente.

**12.2.10 Nota**

1. El **problema de la consistencia** (o de la satisfacibilidad) consiste en dada una fórmula determinar si es consistente.

2. El **problema de la validez** consiste en dada una fórmula determinar si es válida.

## 12.3 Semántica mediante extensiones de lenguajes

**12.3.1 Definición** Sea $\mathbf{M}$ una $\mathbf{L}$–estructura. El **lenguaje extendido** $\mathbf{L}(\mathbf{M})$ se obtiene añadiéndole al conjunto de constantes de $\mathbf{L}$ una nueva constante, $\mathbf{m}$, por cada elemento $m \in M$. La interpretación $I$ de la estructura $\mathbf{M}$ se extiende definiendo $I(\mathbf{m}) = m$ para las nuevas constantes.

**12.3.2 Lema** Sea $\mathbf{M}$ una $\mathbf{L}$–estructura, $\sigma$ una asignación, $x$ una variable, $m \in M$ y $\sigma' = \sigma[x/m]$.

1. $\sigma'(t) = \sigma(t[x/\mathbf{m}])$ para todo término $t$ de $\mathbf{L}$.
2. $\sigma'(F) = \sigma(F[x/\mathbf{m}])$ para todo fórmula $F$ de $\mathbf{L}$.

## 12.4 Fórmulas válidas

**12.4.1 Teorema** Sea $F$ una fórmula proposicional y $G$ una fórmula obtenida sustituyendo las variables proposicionales de $F$ por fórmulas del lenguaje de primer orden $\mathbf{L}$. Si $F$ es una tautología, entonces $G$ es válida.

**12.4.2 Definición** Sea $F$ una fórmula y $x_1, \dots, x_n$ las variable libres de $F$.

1. El **cierre universal** de $F$, $\forall(F)$, es la fórmula $\forall x_1 \dots \forall x_n F$.
2. El **cierre existencial** de $F$, $\exists(F)$, es la fórmula $\exists x_1 \dots \exists x_n F$.

**12.4.3 Lema**

1. $F$ es válida syss $\forall(F)$ es válida.
2. $F$ es consistente syss $\exists(F)$ es consistente .

**12.4.4 Definición** La fórmula $F'$ es una **instancia** de la fórmula $F$ si existe una sustitución $\sigma$ tal que $\sigma(F) = F'$.

**12.4.5 Lema** Sea $F'$ una instancia de la fórmula $F$.

1. Si $\models \forall(F)$, entonces $\models F'$.
2. Si $\models F'$, entonces $\models \exists(F)$.

**12.4.6 Definición** Dos fórmulas $F$ y $G$ son **equivalentes**, y se representa por $F \equiv G$, si $\models F \leftrightarrow G$.

**12.4.7 Lema** La relación $\equiv$ es de equivalencia en $FORM$.

**12.4.8 Lema**

1. Si $F \equiv F'$, entonces $\neg F \equiv \neg F'$.
2. Si $F \equiv F'$, $G \equiv G'$ y $* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, entonces $F * G \equiv F' * G'$.
3. Si $F \equiv F'$ y $Q \in \{\forall, \exists\}$, entonces $QxF \equiv QxF'$.

**12.4.9 Teorema (de sustitución)**
Sea $G$ una subfórmula de $F$ y $F'$ la fórmula obtenida sustituyendo una ocurrencia de $G$ en $F$ por $G'$. Si $G \equiv G'$, entonces $F \equiv F'$.

**12.4.10 Lema** Las siguientes equivalencias se verifican para todas las fórmulas:

1. Idempotencia:
$$F \vee F \equiv F \qquad F \wedge F \equiv F$$
2. Conmutatividad:
$$F \vee G \equiv G \vee F \qquad F \wedge G \equiv G \wedge F$$
3. Asociatividad:
$$F \vee (G \vee H) \equiv (F \vee G) \vee H \qquad F \wedge (G \wedge H) \equiv (F \wedge G) \wedge H$$
4. Absorción:
$$F \wedge (G \vee H) \equiv F \qquad F \vee (G \wedge H) \equiv F$$
5. Distributividad:
$$F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H) \qquad F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$$
6. Doble negación:
$$\neg\neg F \equiv F$$
7. Leyes de DE MORGAN:
$$\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G \qquad \neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$$

**12.4.11 Lema**

1. Leyes de DE MORGAN:
$$\neg\left(\bigwedge_{i=1}^{n} F_i\right) \equiv \bigvee_{i=1}^{n} \neg F_i \qquad \neg\left(\bigvee_{i=1}^{n} F_i\right) \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} \neg F_i$$

2. Distributividad:

$$\left(\bigvee_{i=1}^{m} F_i\right) \wedge \left(\bigvee_{j=1}^{n} G_j\right) \equiv \bigvee_{i=1}^{m}\left(\bigvee_{j=1}^{n}(F_i \wedge G_j)\right)$$

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{m} F_i\right) \vee \left(\bigwedge_{j=1}^{n} G_j\right) \equiv \bigwedge_{i=1}^{m}\left(\bigwedge_{j=1}^{n}(F_i \vee G_j)\right)$$

**12.4.12 Lema (propiedades de los cuantificadores)**

1. Reglas de dualidad:

$$\neg\forall x F \equiv \exists x \neg F \qquad \neg\exists x F \equiv \forall x \neg F$$

2. Reglas de distribución condicional:

$$\forall x(F \wedge G) \equiv \forall x F \wedge \forall x G \qquad \exists x(F \vee G) \equiv \exists x F \vee \exists x G$$

3. Reglas de distribución: Si $x$ no ocurre libre en $G$, entonces

$$\begin{array}{rcl} \forall x(F \wedge G) & \equiv & \forall x F \wedge G \\ \forall x(F \vee G) & \equiv & \forall x F \vee G \\ \exists x(F \wedge G) & \equiv & \exists x F \wedge G \\ \exists x(F \vee G) & \equiv & \exists x F \vee G \end{array}$$

4. Reglas de intercambio de cuantificadores:

$$\forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F \qquad \exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$$

**12.4.13 Nota** En general,

$$\forall x(F \vee G) \not\equiv \forall x F \vee \forall x G, \qquad \exists x(F \wedge G) \not\equiv \exists x F \wedge \forall x G$$

**12.4.14 Lema (cambio de variables ligadas)**
Si $y$ es una variable sustituible por $x$ en $F$ y no ocurre libre en $F$, entonces

$$\forall x F \equiv \forall y F[x/y] \qquad \exists x F \equiv \exists y F[x/y]$$

**12.4.15 Definición** Una fórmula $F$ es **rectificada** si todos los cuantificadores se aplican a variables distintas y $Libre(F) \cap Ligada(F) = \emptyset$

**12.4.16 Lema** Para cada fórmula $F$ existe una fórmula rectificada $F'$ tal que $F \equiv F'$.

# Capítulo 13

# Formas normales y cláusulas

## 13.1 Formas prenexas

**13.1.1 Definición** Una fórmula $F$ está en **forma prenexa** si es de la forma

$$Q_1 x_1 \dots Q_n x_n G$$

donde $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $x_i$ son variables distintas y $G$ es una fórmula abierta.

Se dice que $Q_1 x_1 \dots Q_n$ es el **prefijo** de $F$ y que $G$ es la **matriz** de $F$.

**13.1.2 Teorema** Para cada fórmula $F$ existe una fórmula equivalente $F'$ en forma prenexa.

**13.1.3 Nota** Existen algoritmos que para cada fórmula $F$ devuelven una fórmula equivalente $F'$ en forma prenexa.

**13.1.4 Corolario** Para cada fórmula $F$ existe una fórmula equivalente $F'$ en forma prenexa con su matriz en forma normal conjuntiva (resp. disyuntiva).

## 13.2 Formas de Skolem

**13.2.1 Definición** Para cada fórmula $F$, definimos su **forma de Skolem**, $Skolem(F)$, como el resultado del siguiente "algoritmo":

- Sea $F_1$ una fórmula en forma normal equivalente a $\exists(F)$.
- Si $F_1$ no contiene cuantificadores existenciales, entonces $Skolem(F)$ es $F_1$.
- Si $F_1$ es de la forma $\forall x_1 \dots \forall x_n \exists y G$, entonces

  $$Skolem(F) = Skolem(\forall x_1 \dots \forall x_n G[y/fx_1 \dots x_n]$$

  donde $f$ es un símbolo de función de aridad $n$ que no ocurre en $F$. En este caso, se dice que $f$ es una **función de Skolem**.

**13.2.2 Ejemplo**

1. La forma de Skolem de

$$(\exists x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)[p(x_1, x_2) \rightarrow q(x_3, x_4)]$$

   es

$$(\forall x_2)[p(a, x_2) \rightarrow q(f_1(x_2), f_2(x_2))]$$

2. La forma de Skolem de

$$(\exists x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)(\forall x_4)(\exists x_5)[p(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)]$$

   es

$$(\forall x_2)(\forall x_4)[p(a, x_2, f_1(x_2), x_4, f_2(x_2, x_4))]$$

**13.2.3 Lema** $\models Skolem(F) \rightarrow F$.

**13.2.4 Teorema** Una fórmula $F$ es inconsistente syss su forma de Skolem es inconsistente.

**13.2.5 Nota**

1. Una forma de Skolem es una forma prenexa cuyo prefijo no contiene cuantificadores existenciales.

2. A veces, se suprime el prefijo de las formas de Skolem (sobrentendiéndose que todas las variables que aparecen en la matriz están universalmente cuantificadas).

## 13.3 Formas clausales

**13.3.1 Definición** Una **forma clausal** es una forma de Skolem cuya matriz está en forma normal conjuntiva.

**13.3.2 Lema** Para cada forma de Skolem existe una forma clausal equivalente.

**13.3.3 Nota** Existe un algoritmo que para cada fórmula $F$ devuelve una fórmula $F'$ en forma clausal tal que $F$ es consistente syss $F'$ es consistente.

# Capítulo 14

# Cláusulas de primer orden

## 14.1 Cláusulas

**14.1.1 Definición** Sea **L** un lenguaje de primer orden.

1. Un **átomo** es una fórmula atómica de **L**.
2. Un **literal** es un átomo o su negación.
3. Un literal es **positivo** si es un átomo y **negativo**, en caso contrario.
4. El **complementario** de un literal $L$ es

$$\overline{L} = \begin{cases} \neg pt_1 \dots t_n & \text{si } L = pt_1 \dots t_n; \\ pt_1 \dots t_n & \text{si } L = \neg pt_1 \dots t_n; \end{cases}$$

5. Los literales $L$ y $L'$ son **complementarios** si $L' = \overline{L}$.
6. Una **cláusula** es un conjunto de literales.
7. La **cláusula vacía** es el conjunto vacío y se representa por $\square$.

**14.1.2 Nota** Usaremos las siguientes variables sintácticas:

1. $A, B, C$ para átomos.
2. $L$ para literales.
3. $C, D$ para cláusulas.
4. $S, P$ para conjuntos de cláusulas.

**14.1.3 Definición** Sea **M** una **L**–estructura y $\theta$ una sustitución

1. Para cada literal $L$,

$$\theta(L) = \begin{cases} p\theta(t_1) \dots \theta(t_n), & \text{si } L = pt_1 \dots t_n; \\ \neg p\theta(t_1) \dots \theta(t_n), & \text{si } L = \neg pt_1 \dots t_n; \end{cases}$$

2. Para cada cláusula $C$,

$$\theta(C) = \{\theta(L) : L \in C\}$$

3. Para cada conjunto de cláusulas $S$,

$$\theta(S) = \{\theta(C) : C \in S\}$$

**14.1.4 Definición** Sea $\mathbf{M}$ una $\mathbf{L}$–estructura y $\sigma$ una asignación.

1. Para cada literal $L$,

$$\sigma'(L) = \begin{cases} p_{\mathbf{M}}(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n)), & \text{si } L = pt_1 \dots t_n; \\ 1 - p_{\mathbf{M}}(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n)), & \text{si } L = \neg pt_1 \dots t_n; \end{cases}$$

2. Para cada cláusula $C$,

$$\sigma''(C) = 1 \text{ syss existe un } L \in C \text{ tal que } \sigma'(L) = 1$$

3. Para cada conjunto de cláusulas $S$,

$$\sigma'''(S) = 1 \text{ syss para todo } C \in S,\ \sigma''(C) = 1$$

**14.1.5 Lema** Sea $\mathbf{M}$ una $\mathbf{L}$–estructura y $\sigma$ una asignación.

1. $\sigma''(\square) = 0$.
2. $\sigma'''(\emptyset) = 1$.

**14.1.6 Nota** En lo que sigue, escribiremos $\sigma(L), \sigma(C)$ ó $\sigma(S)$ en lugar de $\sigma'(L), \sigma''(C)$ ó $\sigma'''(S)$

**14.1.7 Definición** Sea $\mathbf{L}$ un lenguaje de primer orden y $C$ una cláusula.

1. $C$ es **válida en** la $\mathbf{L}$–estructura $\mathbf{M}$ **respecto de** la asignación $\sigma$, $\mathbf{M} \models_\sigma C$, si $\sigma(C) = 1$.
2. $C$ es **válida en** la $\mathbf{L}$–estructura $\mathbf{M}$, $\mathbf{M} \models C$, si $\sigma(C) = 1$ para todas las asignaciones $\sigma$. En este caso, se dice que $\mathbf{M}$ es un **modelo** de $C$.
3. $C$ es **válida**, $\models C$, si es válida en todas las $\mathbf{L}$–estructuras.
4. $C$ es **consistente** (o **satisfacible**) si tiene algún modelo.

**14.1.8 Definición** Sea $\mathbf{L}$ un lenguaje de primer orden y $S$ un conjunto de cláusulas.

1. $S$ es **válido en** la $\mathbf{L}$–estructura $\mathbf{M}$ **respecto de** la asignación $\sigma$, $\mathbf{M} \models_\sigma S$, si $\sigma(F) = 1$ para toda $F \in S$.

2. $S$ es **válido en** la **L**–estructura **M**, $\mathbf{M} \models S$, si $\mathbf{M} \models_\sigma S$ para todas las asignaciones $\sigma$. En este caso, se dice que **M** es un **modelo** de $S$.

3. $S$ es **válido**, $\models S$, si es válido en todas las **L**–estructuras.

4. $S$ es **consistente** (o **satisfacible**) si tiene algún modelo.

**14.1.9 Definición** Sea **L** un lenguaje de primer orden y $S, S'$ dos conjuntos de cláusulas.

1. $S'$ es **consecuencia semántica** de $S$, $S \models S'$, si todos los modelos de $S$ también son modelos de $S'$.

2. La cláusula $C$ es **consecuencia semántica** de $S$, $S \models C$, si todos los modelos de $S$ también son modelos de $C$.

**14.1.10 Nota**

1. Si $S \subseteq S'$ y $S'$ es consistente, entonces $S$ es consistente.

2. Si $\square \in S$, entonces $S$ es inconsistente.

## 14.2 Cláusulas y fórmulas

**14.2.1 Definición**

1. El conjunto de fórmulas correspondiente a la cláusula $C \neq \square$ es

$$Form(C) = \left\{ \forall \left( \bigvee_{i=1}^{n} L_i \right) : C = \{L_1, \dots, L_n\} \right\}$$

2. El conjunto de fórmulas correspondiente al conjunto de cláusulas $C \neq \emptyset$ es

$$Form(S) = \left\{ \bigwedge_{i=1}^{n} F_i : S = \{C_1, \dots, C_n\}, F_i \in Form(C_i) \right\}$$

**14.2.2 Lema**

1. Si $F, G \in Form(C)$, entonces $F \equiv G$.

2. Si $F, G \in Form(S)$, entonces $F \equiv G$.

**14.2.3 Definición** Un conjunto de cláusulas $S$ es una **forma clausal** de la fórmula $F$ si son equiconsistentes (es decir, $F$ es consistente syss $S$ es consistente).

**14.2.4 Lema** Una forma clausal de la fórmula cerrada

$$\forall x_1 \dots \forall x_k \bigwedge_{i=1}^{n} \left( \bigvee_{j=1}^{m_i} L_{i,j} \right)$$

es

$$\{\{L_{i,j} : 1 \leq j \leq m_i\} : 1 \leq i \leq n\}$$

**14.2.5 Algoritmo**

*Entrada:* Un conjunto finito de fórmulas cerradas, $\Gamma$, y una fórmula cerrada, $G$.

*Salida:* Un conjunto de cláusulas, $S$, tal que $S$ es consistente syss $\Gamma \models G$.

*Procedimiento:*

- Sea $\Gamma_1 = \Gamma \cup \{\neg G\}$.
- Sea $\Gamma_2$ el conjunto de las formas prenexas de las fórmulas de $\Gamma_1$.
- Sea $\Gamma_3$ el conjunto de las formas de Skolem de las fórmulas de $\Gamma_2$.
- Sea $\Gamma_4$ el conjunto de las formas normales de las fórmulas de $\Gamma_3$.
- Sea $S_1$ el conjunto de las formas clausales de las fórmulas de $\Gamma_4$.
- Devolver $S = \bigcup S_1$.

**14.2.6 Ejemplo** Sea

$$\Gamma = \{(\forall x)[p(x) \to (\exists y)[r(y) \land q(x,y)]], \quad (\exists x)p(x)\}$$

y $G = (\exists x)(\exists y)q(x,y)$. Entonces,

$$\begin{array}{lll}
\Gamma_1 & = \{ & (\forall x)[p(x) \to (\exists y)[r(y) \land q(x,y)]], \\
 & & (\exists x)p(x), \\
 & & \neg(\exists x)(\exists y)q(x,y)\} \\
\Gamma_2 & = \{ & (\forall x)(\exists y)[\neg p(x) \lor (r(y) \land q(x,y))], \\
 & & (\exists x)p(x), \\
 & & (\forall x)(\forall y)\neg q(x,y)\} \\
\Gamma_3 & = \{ & (\forall x)[\neg p(x) \lor (r(f(x)) \land q(x,f(x)))], \\
 & & p(a), \\
 & & \neg q(x,y)\} \\
\Gamma_4 & = \{ & (\forall x)[(\neg p(x) \lor r(f(x))) \land (\neg p(x) \lor q(x,f(x)))], \\
 & & p(a), \\
 & & \neg q(x,y)\} \\
S_1 & = \{ & \{\{\neg p(x), r(f(x))\}, \{\neg p(x), q(x,f(x))\}\}, \\
 & & \{\{p(a)\}\}, \\
 & & \{\{\neg q(x,y)\}\}\} \\
S & = \{ & \{\neg p(x), r(f(x))\}, \\
 & & \{\neg p(x), q(x,f(x))\}, \\
 & & \{p(a)\}, \\
 & & \{\neg q(x,y)\}\}
\end{array}$$

# Capítulo 15

# Teorema de Herbrand

## 15.1 Modelos de Herbrand

**15.1.1 Nota** En lo que sigue, $\mathbf{L}$ es un lenguaje de primer orden cuyo conjunto de constantes es no vacío (en caso contrario, se le añade una constante, $a$).

**15.1.2 Definición**

1. El **universo de Herbrand** $U(\mathbf{L})$ de $\mathbf{L}$ es el conjunto de los términos cerrados de $\mathbf{L}$.

2. La **base de Herbrand** de $\mathbf{L}$, $B(\mathbf{L})$, es el conjunto de los átomos cerrados de $\mathbf{L}$.

**15.1.3 Definición** Una $\mathbf{L}$ estructura $\mathbf{M}$ es una **estructura de Herbrand** de $\mathbf{L}$ si:

1. El universo de $\mathbf{M}$ es el universo de Herbrand de $\mathbf{L}$; es decir,
$$M = U(\mathbf{L})$$

2. Para toda constante $c$ de $\mathbf{L}$,
$$c_{\mathbf{M}} = c$$

3. Para todo símbolo de función $f$ de aridad $n > 0$, y todo $t_1, \ \ldots, \ t_n \ \in \ U(\mathbf{L})$,
$$f_{\mathbf{M}}(t_1, \ldots, t_n) = ft_1 \ldots t_n$$

**15.1.4 Definición** Una **interpretación de Herbrand** de $\mathbf{L}$ es un subconjunto de la base de Herbrand de $\mathbf{L}$.

**15.1.5 Nota** Usaremos los símbolos $I, I_1, I_2, \ldots$ para representar interpretaciones de Herbrand.

**15.1.6 Lema** Sea $\mathbb{M}$ el conjunto de las estructuras de Herbrand de $\mathbf{L}$ e $\mathbb{I}$ el conjunto de las interpretaciones de Herbrand de $\mathbf{L}$. Las aplicaciones

$$\begin{array}{l} \Phi : \mathbf{M} \in \mathbb{M} \mapsto \Phi(\mathbf{M}) = \{A \in B_{\mathbf{L}} : \mathbf{M} \models A\} \in \mathbb{I} \\ \Psi : I \in \mathbb{I} \mapsto \Psi(I) = \mathbf{M} \in \mathbb{M}, \end{array}$$

donde $\mathbf{M}$ es la $\mathbf{L}$–estructura de Herbrand tal que para todo símbolo de predicado de aridad $n$ y para todo $t_1, \dots, t_n \in U(\mathbf{L})$,

$$p_{\mathbf{M}}(t_1, \dots, t_n) = 1 \text{ syss } pt_1 \dots t_n \in I,$$

son biyectivas. Además, $\Phi^{-1} = \Psi$.

**15.1.7 Nota** En lo sucesivo, identificaremos las estructuras de Herbrand de $\mathbf{L}$ y sus interpretaciones de Herbrand.

**15.1.8 Definición** Un **modelo de Herbrand** de un conjunto $\Gamma$ de fórmulas de $\mathbf{L}$ es una estructura de Herbrand de $\mathbf{L}$ que es un modelo de $\Gamma$.

**15.1.9 Nota** Los conceptos de universo, base, estructuras, interpretaciones y modelos de Herbrand definidos anteriormente para el lenguaje $\mathbf{L}$ se aplican a fórmulas, conjuntos de fórmulas, cláusulas y conjuntos de cláusulas, considerando en cada caso el lenguaje formado a partir de sus símbolos de funciones y predicados.

**15.1.10 Lema** Sea $I$ una interpretación de Herbrand y

$$C = \{A_1, \dots, A_n, \neg B_1, \dots, \neg B_m\}$$

una cláusula. Son equivalentes:

1. $I \models C$
2. Para toda sustitución $\theta : V \to U(C)$,

$$\{\theta(B_1), \dots, \theta(B_m)\} \subseteq I \quad \Longrightarrow \quad \{\theta(A_1), \dots, \theta(A_m)\} \cap I \neq \emptyset$$

**15.1.11 Lema** Sea $\mathbf{M}$ una $\mathbf{L}$–estructura de Herbrand y $\theta$ una asignación. Entonces,

$$\theta(F[x/t]) = \theta[x/t](F)$$

**15.1.12 Teorema** Si un conjunto de cláusulas $S$ es consistente, entonces tiene un modelo de Herbrand.

**15.1.13 Corolario** Un conjunto de cláusulas $S$ es inconsistente syss no tiene modelos de Herbrand.

**15.1.14 Corolario (Löwenheim–Skolem)**
Si $\Gamma$ es un conjunto de fórmulas consistente, entonces tiene un modelo numerable (i.e. su universo es un conjunto numerable).

## 15.2 Teorema de Herbrand

**15.2.1 Definición** Sea $S$ un conjunto finito de cláusulas.

1. La sustitución $\theta$ es **básica** si $rang(\theta) \subseteq U(S)$.
2. La cláusula $C'$ es una **instancia básica** de la cláusula $C \in S$ si existe una sustitución básica, $\theta$, tal que $C' = \theta(C)$.
3. La **extensión de Herbrand** de $S$; $E(S)$, es el conjunto de las instancias básicas de las cláusulas de $S$.

**15.2.2 Nota** Mediante la expansión de Herbrand asociamos a un conjunto finito de cláusulas de primer orden un conjunto (posiblemente infinito) de cláusulas del cálculo proposicional.

**15.2.3 Teorema (de Skolem–Herbrand–Gdel)**
Sea $S$ un conjunto finito de cláusulas. Entonces $S$ es consistente syss $E(S)$ es consistente (en el sentido de la lógica proposicional).

**15.2.4 Teorema (de Herbrand)**
Sea $S$ un conjunto finito de cláusulas. Entonces $S$ es inconsistente syss $E(S)$ contiene un subconjunto finito inconsistente (en el sentido de la lógica proposicional).

## 15.3 Métodos de deducción basados directamente en el teorema de Herbrand

**15.3.1 Definición** Sea $S$ un conjunto de cláusulas.

1. La sucesión $(U_i(S))_{i\geq 0}$ está definida por:

$$\begin{array}{lcl} U_0(S) & = & \left\{ \begin{array}{ll} \text{el conjunto de constantes de } S, & \text{si tiene alguna;} \\ \{a\}, & \text{en caso contrario.} \end{array} \right. \\ U_{i+1}(S) & = & U_i(S) \cup \{ft_1 \dots t_n : f \in SF; r(f) = n; t_1, \dots, t_n \in U_i(S)\} \end{array}$$

2. Para cada $i \geq 0$,

$$S_i = \{\theta(C) : C \in S \text{ y } \theta \text{ es una sustitución tal que } rang(\theta) \subseteq U_i(S)\}$$

**15.3.2 Lema** Sea $S$ un conjunto de cláusulas.

1. $U(L) = \bigcup\limits_{i \geq 0} U_i(S)$.
2. $S$ es inconsistente syss existe un $i \geq 0$ tal que $S_i$ es inconsistente.

**15.3.3 Algoritmo**
*Entrada:* Un conjunto finito de cláusulas, $S$.
*Salida:* `Inconsistente`, si $S$ es inconsistente.
*Procedimiento:*

**Hacer** $i := 0$
**mientras que** $S_i$ es consistente (en el sentido proposicional)
  **hacer** $i := i + 1$
**devolver** `Inconsistente`

**15.3.4 Nota** Para determinar la consistencia de los conjuntos $S_i$ se utilizan los algoritmos estudiados para la lógica proposicional; en particular, el algoritmo de Davis–Putnam.

**15.3.5 Ejemplo** Para el conjunto

$$S = \{\{q(x), \neg p(x)\}, \{p(f(x))\}, \{\neg q(f(x))\}\}$$

se obtiene

$S_0 = \{\{q(a), \neg p(a)\}, \{p(f(a))\}, \{\neg q(f(a))\}\}$ es consistente,
$S_1 = S_0 \cup \{\{q(f(a)), \neg p(f(a))\}, \{p(f(f(a)))\}, \{\neg q(f(f(a)))\}\}$ es inconsistente;

por tanto, $S$ es inconsistente.

**15.3.6 Teorema** Dado un conjunto finito de cláusulas, $S$, el algoritmo anterior termina tras un número finito de pasos syss $S$ es inconsistente.

**15.3.7 Corolario** Los problemas de consistencia y validez para la lógica de primer orden son semidecidibles.

## 15.4 Resolución básica

**15.4.1 Algoritmo (de resolución básica)**
*Entrada:* Un conjunto finito de cláusulas, $S$.
*Salida:* `Inconsistente`, si $S$ es inconsistente.
*Procedimiento:*

**Hacer** $i := 0$
**mientras que** $\square \notin Res^*(S_i)$
  **hacer** $i := i + 1$
**devolver** `Inconsistente`

**15.4.2 Teorema** Dado un conjunto finito de cláusulas, $S$, el algoritmo anterior termina tras un número finito de pasos syss $S$ es inconsistente.

**15.4.3 Nota** Los algoritmos anteriores requieren la generación de los conjuntos $S_i$ que pueden crecer exponencialmente. Por ejemplo, si

$$S = \{\{p(x, g(x), y, h(x, y), z, k(x, y, z))\}, \{\neg p(u, v, e(v), w, f(v, w), x)\}\},$$

entonces $|U_0(S)| = 1$, $|U_1(S)| = 6$, ..., y $|S_0| = 2$, $|S_1| = 4825$,.... El primer conjunto $S_i$ inconsistente es $S_5$ que tiene del orden de $10^{256}$ elementos.

# Capítulo 16

# Sustitución y unificación

## 16.1 Comparación de términos

**16.1.1 Nota** En lo que sigue, **L** es un lenguaje de primer orden y $T$ es el conjunto de sus términos.

**16.1.2 Definición** En $T$ se define la relación $\leq$ por

$$t_1 \leq t_2 \text{ syss existe una sustitución } \theta \text{ tal que } \theta(t_1) = t_2.$$

Si $t_1 \leq t_2$ se dice que $t_1$ es **menos particular** que $t_2$; o bien, que $t_2$ es una **instancia** de $t_1$.

**16.1.3 Ejemplo**

$$x \leq f(x, y) \leq f(g(y), y) \leq f(g(x), x) \leq f(g(a), a).$$

**16.1.4 Lema** La relación $\leq$ es un preorden en $T$ (i.e. es reflexiva y transitiva en $T$).

**16.1.5 Definición** En $T$ se define la relación $\equiv$ por

$$t_1 \equiv t_2 \text{ syss } t_1 \leq t_2 \wedge t_2 \leq t_1$$

Si $t_1 \equiv t_2$ se dice que $t_1$ y $t_2$ son **equivalentes**.

**16.1.6 Ejemplo** $f(g(x, a), y) \equiv f(g(x, a), z)$.

**16.1.7 Definición** Una **permutación** es una aplicación $\xi : V \to V$ biyectiva.

**16.1.8 Lema** Para cada permutación $\xi$ existe una única aplicación $\hat{\xi} : T \to T$ definida por:

$$\hat{\xi}(t) = \begin{cases} \xi(t), & \text{si } t \text{ es una variable;} \\ f\hat{\xi}(t_1), \dots, \hat{\xi}(t_n), & \text{si } t = ft_1 \dots t_n \end{cases}$$

En lo sucesivo, escribiremos $\xi(t)$ en lugar de $\hat{\xi}(t)$.

**16.1.9 Lema** $t_1 \equiv t_2$ syss existe una permutación $\xi$ tal que $\xi(t_1) = t_2$.

**16.1.10 Nota** Si $t_1 \equiv t_2$ se dice que $t_2$ es una **variante** de $t_1$.

**16.1.11 Lema** La relación $\equiv$ es de equivalencia en $T$.

**16.1.12 Definición**

1. Para cada témino $t$, representaremos por $[t]$ su clase de equivalencia; i.e.
$$[t] = \{t' \in T : t' \equiv t\}$$
2. Representaremos por $\mathbf{T}$ el conjunto cociente de $T$ respecto de $\equiv$; i.e.
$$\mathbf{T} = \{[t] : t \in T\}$$

**16.1.13 Definición** En $\mathbf{T}$ se define la relación

$$[t] \leq [t'] \text{ syss } t \leq t'$$

**16.1.14 Lema** La relación $\leq$ es un orden parcial en $\mathbf{T}$.

**16.1.15 Nota** El menor elemento de $\mathbf{T}$ es el conjunto de las variables.

**16.1.16 Definición**

1. El conjunto de variables de un término $t$ se representa por $var(t)$.
2. El número de variables distintas de un término $t$ se representa por $\nu(t)$.
3. El **tamaño** del término $t$ se define por:
$$|t| = \begin{cases} 0, & \text{si } t \text{ es una variable;} \\ 1 + \sum_{i=1}^{n} |t_i|, & \text{si } t = t_1 \dots t_n \end{cases}$$
4. La aplicación $\mu : T \to T$ está definida por:
$$\mu(t) = |t| - \nu(t)$$

**16.1.17 Definición**

1. En $T$ se define la relación
$$t_1 < t_2 \quad \Longleftrightarrow \quad (t_1 \leq t_2) \wedge \neg(t_2 \leq t_1)$$
2. En $\mathbf{T}$ se define la relación
$$[t_1] < [t_2] \quad \Longleftrightarrow \quad t_1 < t_2$$

**16.1.18 Lema** Si $t_1 < t_2$, entonces $\mu(t_1) < \mu(t_2)$.

**16.1.19 Lema**

1. La relación $<$ está bien fundamentada en $T$; i.e. no existen sucesiones infinitas decrecientes.
2. La relación $<$ es un buen orden (estricto) en $\mathbf{T}$.

**16.1.20 Definición** Sea $\varphi$ una biyección entre $T \times T$ y $V$. Definimos la operación binaria $\cap$ en $T$ por

$$t \cap t' = \begin{cases} f(t_1 \cap t'_1, \dots t_n \cap t'_n), & \text{si } t = f(t_1, \dots t_n) \text{ y } t' = f(t'_1, \dots t'_n) \\ \varphi(t, t'), & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

**16.1.21 Lema**

1. $t \cap t' \leq t$ y $t \cap t' \leq t'$
2. $t'' \leq t \wedge t'' \leq t' \quad \Longrightarrow \quad t'' \cap t \leq t'$

**16.1.22 Definición** En $\mathbf{T}$ se define la operación

$$[t] \cap [t'] = [t \cap t']$$

**16.1.23 Ejemplo** $[f(g(x, a), h(b))] \cap [f(g(y, c), d)] = [f(g(u, v), w)]$

**16.1.24 Lema** En $(\mathbf{T}, <)$, $[t] \cap [t']$ es el ínfimo de $t$ y $t'$.

**16.1.25 Nota** Representaremos por $\mathcal{T}$ el conjunto obtenido añadiéndole a $\mathbf{T}$ un mayor elemento $\top$.

**16.1.26 Teorema** $(\mathcal{T}, <)$ es un retículo completo.

**16.1.27 Corolario** Si dos términos $t$ y $t'$ tiene una cota superior (i.e. una instancia común $\theta(t) = \theta'(t')$), entonces tienen un supremo, que se representa por $t \cup t'$ y es único módulo $\equiv$.

**16.1.28 Ejemplo** $f(a, x_1, x_2) \cup f(x_3, x_3, x_4) \equiv f(a, a, x_5)$

## 16.2 Comparación de sustituciones

**16.2.1 Definición** En el conjunto de las sustituciones se define la relación

$$\theta \leq \theta' \text{ syss existe una sustitución } \theta'' \text{ tal que } \theta''\theta = \theta'.$$

Si $\theta \leq \theta'$ se dice que $\theta$ es **menos particular** que $\theta'$.

**16.2.2 Lema** La relación $\leq$ es reflexiva y transitiva en el conjunto de las sustituciones.

**16.2.3 Lema** Si **L** tiene símbolos de funciones, entonces

$$\theta \leq \theta' \text{ syss para todo término } t,\ \theta(t) \leq \theta'(t).$$

**16.2.4 Definición** En el conjunto de las sustituciones se define la relación

$$\theta \equiv \theta' \quad \Longleftrightarrow \quad \theta \leq \theta' \wedge \theta' \leq \theta$$

Si $\theta \equiv \theta'$ se dice que $\theta$ es **equivalente** a $\theta'$.

**16.2.5 Lema** $\theta \equiv \theta'$ syss existe una permutación $\xi$ tal que $\xi\theta = \theta'$.

**16.2.6 Lema** La relación $\equiv$ es de equivalencia en el conjunto de las sustituciones.

**16.2.7 Lema** Si **L** tiene símbolos de funciones, entonces

$$\theta \equiv \theta' \text{ syss para todo término } t,\ \theta(t) \equiv \theta'(t).$$

## 16.3 Unificación

**16.3.1 Definición** Sean $t_1, t_2$ dos términos.

1. Una sustitución $\theta$ es un **unificador** de $t_1$ y $t_2$ si $\theta(t_1) = \theta(t_1)$.
2. Representaremos por $u(t_1, t_2)$ el conjunto de los unificadores de $t_1$ y $t_2$.
3. $t_1$ y $t_2$ son **unificables** si $u(t_1, t_2) \neq \emptyset$.
4. $\theta$ es un **unificador de máxima generalidad** de $t_1$ y $t_2$ si $\theta \in u(t_1, t_2)$ y para todo $\theta' \in u(t_1, t_2)$, $\theta' \leq \theta$.
5. Representaremos por $umg(t_1, t_2)$ el conjunto de los unificadores de $t_1$ y $t_2$ de máxima generalidad.

**16.3.2 Ejemplo**

1. Los términos $t_1 = f(g(a), h(x))$ y $t_2 = f(y, y)$ no son unificables.
2. Los términos $t_1 = f(x, x)$ y $t_2 = f(y, g(y))$ no son unificables.
3. $t_1 = f(x, g(y))$ y $t_2 = f(a, z)$, entonces
   (a) $\theta_1 = \{(x, a), (z, g(b))\} \in u(t_1, t_2) - umg(t_1, t_2)$.
   (b) $\theta_2 = \{(x, a), (z, g(y))\} \in umg(t_1, t_2)$.
   (c) $\theta_3 = \{(x, a), (y, u), (z, g(u))\} \in umg(t_1, t_2) - \{\theta_2\}$

**16.3.3 Lema**

1. Si $\theta \in u(t_1, t_2)$, entonces $t_1 \cup t_2 \leq \theta(t_1)$.

2. Si $\theta \in umg(t_1, t_2)$, entonces $t_1 \cup t_2 \equiv \theta(t_1)$.

**16.3.4 Lema**

1. Si $\theta_1 \in u(t_1, t_2)$ y $\theta_1 \leq \theta_2$, entonces $\theta_2 \in u(t_1, t_2)$.

2. Si $\theta, \theta' \in umg(t_1, t_2)$, entonces $\theta \equiv \theta'$.

**16.3.5 Definición** Sea $N = \{t_1, \ldots, t_n\}$ un conjunto finito de términos.

1. Una sustitución $\theta$ es un **unificador** de $N$ si $\theta(t_1) = \ldots = \theta(t_n)$.

2. Representaremos por $u(N)$ el conjunto de los unificadores de $N$.

3. $N$ es **unificable** si $u(N) \neq \emptyset$.

4. $\theta$ es un **unificador de máxima generalidad** de $N$ si $\theta \in u(N)$ y para todo $\theta' \in u(N)$, $\theta' \leq \theta$.

5. Representaremos por $umg(N)$ el conjunto de los unificadores de $N$ de máxima generalidad.

**16.3.6 Definición**

1. Una **ecuación** en $T$ es un par ordenado de términos.

2. Utilizaremos los símbolos $E, E_1, E_2, \ldots$ para representar conjuntos finitos de ecuaciones.

**16.3.7 Definición** Sea $E = \{(t_i, t'_i) : 1 \leq i \leq n\}$ un conjunto finito de ecuaciones.

1. La sustitución $\theta$ es una **solución** de $E$ si $\theta(t_i) = \theta(t'_i)$ para $1 \leq i \leq n$.

2. El conjunto de las soluciones de $E$ se representa por $s(E)$.

3. La sustitución $\theta$ es una **solución de máxima generalidad** de $E$ si es una solución de $E$ y para cualquier solución $\theta'$ de $E$, $\theta' \leq \theta$.

4. El conjunto de las soluciones de $E$ de máxima generalidad se representa por $smg(E)$.

**16.3.8 Lema**

1. $u(t_1, t_2) = s(\{(t_1, t_2)\})$

2. $umg(t_1, t_2) = smg(\{(t_1, t_2)\})$

3. $u(\{t_1, \ldots, t_n\}) = s(\{(t_1, t_2), \ldots, (t_1, t_n)\})$

4. $umg(\{t_1, \ldots, t_n\}) = smg(\{(t_1, t_2), \ldots, (t_1, t_n)\})$

**16.3.9 Definición** Sea $E$ un conjunto finito de ecuaciones y $\theta$ una sustitución. Entonces,

$$\theta(E) = \{(\theta(t), \theta(t')) : (t, t') \in E\}$$

**16.3.10 Algoritmo (de simplificación)**

*Entrada:* Un conjunto finito de ecuaciones, $E$, y una sustitución, $\theta$.

*Salida:* `Sin solucion`, si $\theta(E)$ no tiene solución; una solución de $\theta(E)$ de máxima generalidad, en caso contrario.

*Procedimiento: Simpl*$(E, \theta)$

**si** $E = \emptyset$ **entonces devolver** $\theta$ y **parar**
**si** $E \neq \emptyset$ **entonces**
  **hacer** $(t, t') = car(E)$
    $E := E - \{(t, t')\}$
  **si** $t = ft_1 \dots t_n$ y $t' = ft'_1 \dots t'_n$,
    **entonces** $Simpl(E \cup \{(t_1, t'_1), \dots, (t_n, t'_n)\}, \theta)$
  **si** $t = ft_1 \dots t_n$, $t' = gt'_1 \dots t'_m$ y $f \neq g$
    **entonces devolver** `Sin solucion` y **parar**
  **si** $t = x$ y $t' = x$,
    **entonces** $Simpl(E, \theta)$
  **si** $t$ no es una variable y $t'$ es una variable,
    **entonces** $Simpl(E \cup \{(t', t)\}, \theta)$
  **si** $t = x$, $x \in var(t')$ y $t' \neq x$
    **entonces devolver** `Sin solucion` y **parar**
  **si** $t = x$ y $x \notin var(t')$
    **entonces** $Simpl(\{(x, t)\}(E), \{(x, t)\}\theta)$

**16.3.11 Algoritmo (de unificación)**

*Entrada:* Un conjunto finito de términos, $N = \{t_1, \dots, t_n\}$.

*Salida:* `No unificable`, si $N$ no es unificable; $\theta \in umg(N)$, en caso contrario.

*Procedimiento:*

**Hacer** $E := \{(t_1, t_2) \dots (t_1, t_n)\}$
  $\theta := Simpl(E, \emptyset)$
**si** $\theta =$ `Sin solucion` **devolver** `No unificable`
  **e.o.c devolver** $\theta$

**16.3.12 Teorema** El algoritmo de unificación siempre termina y es correcto.

## 16.4 Unificación para fórmulas atómicas

**16.4.1 Definición** Sean $A_1, A_2$ dos fórmulas atómicas.

1. Una sustitución $\theta$ es un **unificador** de $A_1$ y $A_2$ si $\theta(A_1) = \theta(A_1)$.

2. Representaremos por $u(A_1, A_2)$ el conjunto de los unificadores de $A_1$ y $A_2$.

3. $A_1$ y $A_2$ son **unificables** si $u(A_1, A_2) \neq \emptyset$.

4. $\theta$ es un **unificador de máxima generalidad** de $A_1$ y $A_2$ si $\theta \in u(A_1, A_2)$ y para todo $\theta' \in u(A_1, A_2)$, $\theta' \leq \theta$.

5. Representaremos por $umg(A_1, A_2)$ el conjunto de los unificadores de $A_1$ y $A_2$ de máxima generalidad.

**16.4.2 Lema** Sean $A_1 = pt_1 \dots t_n$ y $A_2 = qt'_1 \dots t'_m$ dos fórmulas atómicas. Entonces,

1. $u(A_1, A_2) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } p \neq q; \\ u(\{(t_1, t'_1), \dots, (t_n, t'_n)\}), & \text{en otro caso} \end{cases}$

2. $umg(A_1, A_2) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } p \neq q; \\ umg(\{(t_1, t'_1), \dots, (t_n, t'_n)\}), & \text{en otro caso} \end{cases}$

**16.4.3 Definición** Sea $N = \{A_1, \dots, A_n\}$ un conjunto finito de fórmulas atómicas.

1. Una sustitución $\theta$ es un **unificador** de $N$ si $\theta(A_1) = \dots = \theta(A_n)$.

2. Representaremos por $u(N)$ el conjunto de los unificadores de $N$.

3. $N$ es **unificable** si $u(N) \neq \emptyset$.

4. $\theta$ es un **unificador de máxima generalidad** de $N$ si $\theta \in u(N)$ y para todo $\theta' \in u(N)$, $\theta' \leq \theta$.

5. Representaremos por $umg(N)$ el conjunto de los unificadores de $N$ de máxima generalidad.

**16.4.4 Algoritmo (de unificación para dos átomos)**
*Entrada:* Dos átomos $A_1 = pt_1 \dots t_n$ y $A_2 = qt_1 \dots t_m$.
*Salida:* `No unificables`, si $A_1$ y $A_2$ no son unificables; $\theta \in umg(A_1, A_2)$, en caso contrario.
*Procedimiento:* $Unif(A_1, A_2)$

**si** $p \neq q$ **entonces devolver** `No unificables`
  **e.o.c. hacer** $\theta = Simpl(\{(t_1, t'_1), \dots, (t_n, t'_n)\}, \emptyset)$
    **si** $\theta =$ `Sin solucion` **entonces devolver** `No unificables`
     **e.o.c. devolver** $\theta$

**16.4.5 Algoritmo (de unificación para conjuntos de átomos)**

*Entrada:* Un conjunto finito de átomos, $N = \{A_1, \dots, A_n\})$

*Salida:* `No unificable`, si $N$ no es unificable; $\theta \in umg(N)$, en caso contrario.

*Procedimiento:* $Unif(N)$

**si** $n \leq 1$ **entonces devolver** $\emptyset$
  **e.o.c. hacer** $\theta_1 = Unif(A_1, A_2)$
    **si** $\theta_1 =$ `No unificables` **entonces devolver** `No unificable`
      **e.o.c. hacer** $\theta_2 = Unif(\{\theta_1(A_3), \dots, \theta_1(A_n)\})$
        **si** $\theta_2 =$ `No unificable` **entonces devolver** `No unificable`
          **e.o.c. devolver** $\theta_2\theta_1$

# Capítulo 17

# Resolución en lógica de primer orden

## 17.1 Sistema de resolución

**17.1.1 Definición** Sea $C$ una cláusula.

1. La **complementaria** de $C$ es
$$\overline{C} = \{\overline{L} : L \in C\}$$
2. La **parte positiva** de $C$ es
$$C_+ = \{L \in C : L \text{ es positivo}\}$$
3. La **parte negativa** de $C$ es
$$C_- = \{L \in C : L \text{ es negativo}\}$$
4. La **forma positiva** de $C$ es
$$\|C\| = C_+ \cup \overline{C_-}$$

**17.1.2 Definición**

1. Representaremos por $var(C)$ el conjunto de las variables de la cláusula $C$; es decir,
$$var(C) = \{var(A) : A \in \|C\|\}$$
2. Las cláusulas $C_1$ y $C_2$ están **separadas** si $var(C_1) \cap var(C_2) = \emptyset$.
3. Las permutaciones $\xi_1$ y $\xi_2$ **separan** las cláusulas $C_1$ y $C_2$ si $\xi_1(C_1)$ y $\xi_2(C_2)$ están separadas.

**17.1.3 Definición** La cláusula $C$ es una **resolvente** de las cláusulas $C_1$ y $C_2$ si se verifican las siguientes condiciones:

1. Existen dos permutaciones $\xi_1$, $\xi_2$ que separan a las cláusulas $C_1$ y $C_2$.

2. Existen $D_1 \subseteq \xi_1(C_1)$ y $D_2 \subseteq \xi_2(C_2)$ no vacíos tales que $\|D_1 \cup \overline{D_2}\|$ es unificable. Sea $\theta \in umg(\|D_1 \cup \overline{D_2}\|)$

3. $C$ es de la forma:

$$C = \theta((\xi_1(C_1) - D_1) \cup (\xi_2(C_2) - D_2))$$

**17.1.4 Ejemplo** La cláusula $\{p(a, f(a))\}$ es una resolvente de las cláusulas $\{p(z, f(z)), p(z, a)\}$ y $\{\neg p(z, z), \neg p(z, x), \neg p(x, z)\}$.

**17.1.5 Definición** Representaremos por $Res(C_1, C_2)$ el conjunto de las resolventes de $C_1$ y $C_2$.

**17.1.6 Definición** Sea $S$ un conjunto de cláusulas.

1. La sucesión $(C_1, \dots, C_n)$ es una **deducción por resolución** a partir de $S$ si para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ se verifica una de las siguientes condiciones:

   (a) $C_i \in S$.

   (b) existen $j, k < i$ tales que $C_i \in Res(C_j, C_k)$.

2. La cláusula $C$ es **deducible por resolución** a partir de $S$, $S \vdash C$, si existe una deducción por resolución a partir de $S$, $(C_1, \dots, C_n)$, tal que $C_n = C$.

3. La sucesión $(C_1, \dots, C_n)$ es una **refutación por resolución** de $S$ si es una deducción por resolución a partir de $S$ y $C_n = \square$.

4. $S$ es **refutable** si $S \vdash \square$.

**17.1.7 Definición** Sea $S$ un conjunto de cláusulas.

1. $Res(S) = S \cup (\bigcup\{Res(C_1, C_2) : C_1, C_2 \in S\})$.

2. La sucesión $(Res^n(S))_{n\geq 0}$ está definida por:

$$\begin{array}{l} Res^0(S) = S \\ Res^{n+1} = Res(Res^n(S)) \end{array}$$

3. $Res^*(S) = \displaystyle\bigcup_{n\geq 0} Res^n(S)$

**17.1.8 Lema** $S \vdash C$ syss $C \in Res^*(S)$.

## 17.2 Corrección y completitud de la resolución

**17.2.1 Lema** Si $C \in Res(C_1, C_2)$, entonces $\{C_1, C_2\} \models C$.

**17.2.2 Teorema (de corrección)**
Si $S \vdash \Box$, entonces $S$ es inconsistente.

**17.2.3 Lema (del ascenso)**
Si $C'_1$ y $C'_2$ son instancias básicas de $C_1$ y $C_2$, respectivamente, y $C'$ una resolvente de $C'_1$ y $C'_2$ (en el sentido proposicional). Entonces, existe una $C \in Res(C_1, C_2)$ tal que $C'$ es una instancia de $C$.

**17.2.4 Teorema (de completitud)**
Si $S$ es inconsistente, entonces $S \vdash \Box$.

**17.2.5 Corolario** $S$ es inconsistente syss $S \vdash \Box$.

## 17.3 Reglas de simplificación

**17.3.1 Definición** Una clásula $C$ es una **tautología** si existe una instancia $C'$ de $C$ tal que $C'_+ \cap C'_- \neq \emptyset$.

**17.3.2 Teorema (Regla de tautología)**
Si $C \in S$ es una tautología, entoces $S$ es consistente syss $S - \{C\}$ es consistente.

**17.3.3 Definición** $L$ es un **literal puro** de $S$ si $L \in \bigcup S$ y para toda sustitución $\theta$, $\overline{L} \notin \theta(\bigcup S)$.

**17.3.4 Teorema (Regla de los literales puros)**
Si $L$ es un literal puro de $S$, entonces $S$ es consistente syss el conjunto $S \; - \; \{C \in S : L \in C\}$ es consistente.

**17.3.5 Definición** La cláusula $C$ **subsume** a la cláusula $D$ si existe una sustitución $\theta$ tal que $\theta(C) \subset D$.

**17.3.6 Teorema (Regla de subsunción)**
Sean $C, D \in S$. Si $C$ subsume a $D$, entonces $S$ es consistente syss $S - \{D\}$ es consistente.

## 17.4 Refinamientos de resolución

**17.4.1 Nota** Los refinamientos de resolución estudiados para el caso proposicional son aplicables al caso de primer orden.

# Capítulo 18

# Programas lógicos: semántica declarativa

## 18.1 Programas lógicos

**18.1.1 Definición** Una **cláusula definida** es una cláusula $C$ que tiene exactamente un literal positivo; es decir, $|C_+| = 1$.

**18.1.2 Definición** Sea $C = \{A, \neg B_1, \dots, \neg B_n\}$ una cláusula definida.

1. Si $n = 0$, se dice que $C$ es un **hecho** y se representa por

$$A \leftarrow$$

2. Si $n > 0$, se dice que $C$ es un **regla** y se representa por

$$A \leftarrow B_1, \dots, B_n$$

3. La **cabeza** de $C$ es $A$ y su **cuerpo** es $B_1, \dots, B_n$.

**18.1.3 Definición** Sea $C$ una cláusula y $F$ una fórmula cerrada. Se dice que $C$ y $F$ son **equivalentes**, $C \equiv F$, si $C$ y $F$ tienen los mismos modelos.

**18.1.4 Lema** $A \leftarrow B_1, \dots, B_n \equiv \forall (B_1 \land \dots \land B_n \to A)$

**18.1.5 Definición** Un **programa lógico** (o, simplemente, **programa**) es un conjunto finito de cláusulas definidas.

**18.1.6 Ejemplo** El siguiente conjunto es un programa lógico (definiendo la suma):

$$\begin{array}{l} suma(x, 0, x) \leftarrow \\ suma(x, s(y), s(z)) \leftarrow suma(x, y, z) \end{array}$$

**18.1.7 Definición** Un **objetivo** $G$ es una cláusula negativa; es decir,

$$G = \{\neg B_1, \dots, \neg B_n\}$$

Representaremos el objetivo $G$ por

$$\leftarrow B_1, \dots, B_n$$

**18.1.8 Lema** $\leftarrow B_1, \dots, B_n \equiv \neg\exists(B_1 \wedge \dots \wedge B_n)$

**18.1.9 Definición** Una **cláusula de Horn** es una cláusula definida o un objetivo.

**18.1.10 Nota**

1. Los símbolos $P, P_1, P_2, \dots$ representarán programas.
2. Los símbolos $G, G_1, G_2, \dots$ representarán objetivos.

**18.1.11 Definición** Sea $G$ el objetivo $\leftarrow A_1, \dots, A_n$ y $\theta$ una sustitución.

1. $\tilde{G} = A_1 \wedge \dots \wedge A_n$
2. $\theta(\tilde{G}) = \theta(A_1) \wedge \dots \wedge \theta(A_n)$

**18.1.12 Definición** Sea $S$ un conjunto de cláusulas y $F$ una fórmula cerrada.

1. $F$ es **consecuencia semántica** de $S$, $S \models F$, si todos los modelos de $S$ son modelos de $F$.
2. $S \cup \{F\}$ es **inconsistente** si ningún modelo de $S$ es modelo de $F$.

**18.1.13 Lema** Sea $S$ un conjunto de cláusulas y $F$ una fórmula cerrada. Entonces, $S \models F$ syss $S \cup \{\neg F\}$ es inconsistente.

**18.1.14 Definición** Sea $P$ un programa y $G$ el objetivo $\leftarrow A_1, \dots, A_n$.

1. La sustitución $\theta$ es una **respuesta** para $P \cup \{G\}$ si $D(\theta) \subseteq var(P \cup \{G\})$.
2. La sustitución $\theta$ es una **respuesta correcta** para $P \cup \{G\}$ si es una respuesta para $P \cup \{G\}$ y

$$P \models \forall(\theta(\tilde{G}))$$

**18.1.15 Ejemplo** Si $P$ es el programa del ejemplo anterior y $G$ es el objetivo

$$\leftarrow suma(x, y, s(0))$$

entonces las sustituciones $\theta_1 = \{(x, 0), (y, s(0))\}$ y $\theta_2 = \{(x, s(0)), (y, 0)\}$ son respuestas correctas para $P \cup \{G\}$.

**18.1.16 Lema** Sea $P$ un programa, $G$ un objetivo y $\theta$ una respuesta para $P \cup \{G\}$. Entonces, $\theta$ es una respuesta correcta para $P \cup \{G\}$ syss $P \cup \{\neg\forall(\theta(\tilde{G}))\}$ es inconsistente.

**18.1.17 Definición** Sea $P$ un programa y $G$ un objetivo. Se dice que "no" es la respuesta correcta para $P \cup \{G\}$ si $P \cup \{G\}$ es consistente.

## 18.2 Modelos de Herbrand

**18.2.1 Lema** Sea $P$ un programa y $G$ un objetivo. Entonces, $P \cup \{G\}$ es consistente syss tiene un modelo de Herbrand.

**18.2.2 Lema** Si $P$ es un programa y $B(P)$ es su base de Herbrand, entonces $B(P)$ es un modelo de Herbrand de $P$

**18.2.3 Lema** Si $P$ es un programa y $\{M_i : i \in I\}$ un conjunto no vacío de modelos de Herbrand de $P$, entonces $\bigcap_{i \in I} M_i$ es un modelo de Herbrand de $P$.

**18.2.4 Definición** El **menor modelo de Herbrand** de un programa $P$ es

$$M_P = \bigcap\{M : M \text{ es un modelo de Herbrand de } P\}$$

**18.2.5 Teorema** $M_P = \{A \in B(P) : P \models A\}$.

**18.2.6 Teorema** Sea $P$ un programa, $G$ un objetivo y $\theta$ una respuesta para $P \cup \{G\}$ tal que $\theta(G)$ es básica. Son equivalentes:

1. $\theta$ es correcta.
2. Si $M$ es un modelo de Herbrand de $P$, entonces $M \models \theta(\tilde{G})$.
3. $M_P \models \theta(\tilde{G})$.

# Capítulo 19

# Programas lógicos: semántica de puntos fijos

## 19.1 Operadores y sus puntos fijos

**19.1.1 Definición** Un conjunto parcialmente ordenado, $(L, \leq)$, es un **retículo completo** si para todo $X \subseteq L$, existe el supremo, $sup(X)$, y el ínfimo, $inf(X)$.

**19.1.2 Ejemplo** Si $S$ es un conjunto, entonces $(\mathbf{P}(S), \subseteq)$ es un retículo completo.

**19.1.3 Lema** Si $(L, \leq)$ es un retículo completo, entonces tiene un mayor elemento, $\top$, y un menor elemento, $\bot$.

**19.1.4 Definición** Sea $(L, \leq)$ un retículo completo.

1. La aplicación $T : L \to L$ es un **homomorfismo** si

$$(\forall x, y \in L)[x \leq y \to T(x) \leq T(y)]$$

2. El conjunto $X \subseteq L$ es **dirigido** si todos sus subconjuntos finitos están acotados superiormente por elementos de $X$.

3. La aplicación $T : L \to L$ es **continua** si

$$T(sup(X)) = sup(T(X))$$

   para todo subconjunto dirigido $X$ de $L$.

**19.1.5 Lema** Sea $(L, \leq)$ un retículo completo y $T : L \to L$. Si $T$ es continua, entonces es un homomorfismo.

**19.1.6 Definición** Sea $(L, \leq)$ un retículo completo y $T : L \to L$.

1. $x \in L$ es un **punto fijo** de $T$ si $T(x) = x$. Representaremos por $PF(T)$ el conjunto de los puntos fijos de $T$.

2. El **menor punto fijo** de $T$ se representa por $min(PF(T))$.

3. El **mayor punto fijo** de $T$ se representa por $max(PF(T))$.

**19.1.7 Teorema** Sea $(L, \leq)$ un retículo completo y $T : L \to L$ un homomorfismo.

1. Existe un menor punto fijo de $T$ y viene dado por

$$min(PF(T)) = inf\{x \in L : T(x) \leq x\} = inf\{x \in L : T(x) = x\}$$

2. Existe un mayor punto fijo de $T$ y viene dado por

$$max(PF(T)) = sup\{x \in L : x \leq T(x)\} = sup\{x \in L : T(x) = x\}$$

**19.1.8 Corolario** Sea $(L, \leq)$ un retículo completo y $T : L \to L$ un homomorfismo.

1. Si $a \in L$ y $T(a) \leq a$, entonces existe un punto fijo $a'$ de $T$ tal que $a' \leq a$.

2. Si $b \in L$ y $b \leq T(b)$, entonces existe un punto fijo $b'$ de $T$ tal que $b \leq b'$.

**19.1.9 Definición** Sea $(L, \leq)$ un retículo completo y $T : L \to L$ un homomorfismo.

1. La **potencia ascendente** de $T$ es la aplicación $T \uparrow: Ord \to L$ definida recursivamente por

$$T \uparrow \alpha = \begin{cases} \bot, & \text{si } \alpha = 0; \\ T(T \uparrow \beta), & \text{si } \alpha = \beta + 1; \\ sup\{T \uparrow \beta : \beta < \alpha\}, & \text{si } \alpha \text{ es límite} \end{cases}$$

2. La **potencia descendente** de $T$ es la aplicación $T \downarrow: Ord \to L$ definida recursivamente por

$$T \downarrow \alpha = \begin{cases} \top, & \text{si } \alpha = 0; \\ T(T \downarrow \beta), & \text{si } \alpha = \beta + 1; \\ inf\{T \downarrow \beta : \beta < \alpha\}, & \text{si } \alpha \text{ es límite} \end{cases}$$

**19.1.10 Lema** Sea $(L, \leq)$ un retículo completo y $T : L \to L$ un homomorfismo.

1. $T \uparrow \alpha \leq min(PF(T)) \leq max(PF(T)) \leq T \downarrow \beta$

2. $\alpha \leq \beta \quad \Longrightarrow \quad T \uparrow \alpha \leq T \uparrow \beta \leq T \downarrow \beta \leq T \downarrow \alpha$

3. Si existe un $\beta > \alpha$ tal que $T \uparrow \beta = T \uparrow \alpha$, entonces $T \uparrow \alpha$ es el menor punto fijo de $T$.
4. Si existe un $\beta > \alpha$ tal que $T \downarrow \beta = T \downarrow \alpha$, entonces $T \downarrow \alpha$ es el mayor punto fijo de $T$.
5. Existe un ordinal $\beta_1$ tal que para todo $\gamma \geq \beta_1$, $T \uparrow \gamma = min(PF(T))$.
6. Existe un ordinal $\beta_2$ tal que para todo $\gamma \geq \beta_2$, $T \downarrow \gamma = max(PF(T))$.

**19.1.11 Definición** Sea $(L, \leq)$ un retículo completo y $T : L \to L$ un homomorfismo.

1. La **clausura ordinal ascendente** de $T$ es

$$c.o. \uparrow (T) = min\{\alpha : T \uparrow \alpha = min(PF(T))\}$$

2. La **clausura ordinal descendente** de $T$ es

$$c.o. \downarrow (T) = min\{\alpha : T \downarrow \alpha = max(PF(T))\}$$

**19.1.12 Teorema** Si $(L, \leq)$ es un retículo completo y $T : L \to L$ es continua, entonces

$$min(PF(T)) = T \uparrow \omega$$

**19.1.13 Corolario** Si $(L, \leq)$ es un retículo completo y $T : L \to L$ es continua, entonces

$$c.o. \uparrow (T) \leq \omega$$

## 19.2 El operador de consecuencia inmediata

**19.2.1 Lema** Si $P$ es un programa, entonces $(\mathbf{P}(B(P), \subseteq)$ es un retículo completo. Su menor elemento es $\emptyset$ y su mayor elemento es $B(P)$.

**19.2.2 Definición** Para cada programa $P$, representaremos por $[P]$ el conjunto de sus instancias básicas.

**19.2.3 Definición** Sea $P$ un programa. Para cada interpretación de Herbrand, $I$, se define la interpretación $T_P(I)$ por

$$A \in T_P(I) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{existen átomos } B_1, \dots, B_n \text{ tales que } \left\{ \begin{array}{l} A \leftarrow B_1, \dots, B_n \in [P] \\ \{B_1, \dots, B_n\} \subseteq I \end{array} \right.$$

La aplicación $T_P : \mathbf{P}(B(P)) \to \mathbf{P}(B(P))$ se llama el **operador de consecuencia inmediata**.

**19.2.4 Lema** Sea $P$ un programa, $I$ una interpretación de Herbrand y $A$ un átomo. Son equivalentes:

1. $A \in T_P(I)$;
2. existe una sustitución $\theta$ y una cláusula $B \leftarrow B_1, \dots, B_n$ de $P$ tales que $A = \theta(B)$ y $\{\theta(B_1), \dots, \theta(B_n)\} \subseteq I$.

**19.2.5 Ejemplo** Sea $P$ el programa

$$\begin{array}{l} p(f(x)) \leftarrow p(x) \\ q(a) \leftarrow p(x) \end{array}$$

1. Si $I_1 = B(P)$, entonces $T_P(I_1) = \{q(a)\} \cup \{p(f(t)) : t \in U(P)\}$
2. Si $I_2 = T_P(I_1)$, entonces $T_P(I_2) = \{q(a)\} \cup \{p(f(f(t))) : t \in U(P)\}$
3. Si $I_3 = \emptyset$, entonces $T_P(I_3) = \emptyset$.

**19.2.6 Lema** La aplicación $T_P$ es continua.

**19.2.7 Lema** Sea $P$ un programa e $I$ una interpretación de Herbrand. Entonces $I$ es un modelo del programa $P$ syss $T_P(I) \subseteq I$.

**19.2.8 Teorema** Sea $P$ un programa. Entonces,

$$M_P = min(PF(T_P)) = T_P \uparrow \omega = \bigcup_{n \geq 0} T_P \uparrow n$$

**19.2.9 Ejemplo** Sea $P$ el programa

$$\begin{array}{l} q(b) \leftarrow \\ q(f(x)) \leftarrow q(x) \\ p(f(x)) \leftarrow p(x) \\ p(a) \leftarrow p(x) \\ r(c) \leftarrow r(x), q(x) \\ r(f(x)) \leftarrow r(x) \end{array}$$

1. $M_P = min(PF(T_P)) = \{q(f^n(b)) : n \in \omega\}$ y $c.o. \uparrow (T_P) = \omega$.
2. $max(PF(T_P)) = \{q(f^n(b)) : n \in \omega\} \cup \{p(f^n(a)) : n \in \omega\}$ y $c.o. \downarrow (T_P) = \omega 2$.

# Capítulo 20

# Programas lógicos: semántica procedural

## 20.1 Proceso de computación: La resolución SLD

**20.1.1 Nota** Sea $\theta$ una sustitución y $\leftarrow A_1, \dots, A_n$ un objetivo. Escribiremos

$$\leftarrow \theta(A_1, \dots, A_n)$$

en lugar de

$$\leftarrow \theta(A_1), \dots, \theta(A_n)$$

**20.1.2 Definición** Sea $P$ un programa lógico, $C = A \leftarrow B_1, \dots, B_k$ una cláusula de $P$ y $G = \leftarrow A_1, \dots, A_n$ un objetivo. Se dice que $G'$ es una **resolvente de** $G$ **y** $C$ **con umg** $\theta$ si se verifican las siguientes condiciones:

1. existe un $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\theta$ es un unificador de máxima generalidad de $A_i$ y $A$;
2. $G' = \leftarrow \theta(A_1, \dots, A_{i-1}, B_1, \dots, B_k, A_{i+1}, \dots, A_n)$.

En este caso, se dice que $A_i$ es el **átomo seleccionado**.

**20.1.3 Definición** Sea $P$ un programa y $G$ un objetivo. Se dice que

$$(G_0, G_1, G_2 \dots; C_1, C_2, \dots; \theta_1, \theta_2, \dots)$$

es una **derivación SLD** (o, simplemente, **derivación**) de $P \cup \{G\}$ si

1. $G_0 = G$;
2. $C_1$ es una variante de una cláusula de $P$ separada de $G_0$;
3. $G_1$ es una resolvente de $G_0$ y $C_1$ com umg $\theta_1$;

4. para todo $i \geq 2$,
   (a) $C_i$ es una variante de una cláusula de $P$;
   (b) $C_i$ no tiene variables comunes con $G_0, \dots, G_{i-1}, C_1, \dots, C_{i-1}$.
   (c) $G_i$ es una resolvente de $G_{i-1}$ y $C_i$ com umg $\theta_1$;

Las cláusulas $C_i$ se llaman **cláusulas de entrada**.

**20.1.4 Ejemplo** Sea $P$ el programa

$$\begin{array}{l} p(x, 0, x) \leftarrow \\ p(x, s(y), s(z)) \leftarrow p(x, y, z) \end{array}$$

y $G$ es objetivo $\leftarrow p(x, s(0), s(s(s(0))))$. En la siguiente figura se muestra una derivación para $P \cup \{G\}$.

$G_0 = \leftarrow p(x, s(0), s(s(s(0))))$

$C_1 = p(x_1, s(y_1), s(z_1)) \leftarrow p(x_1, y_1, z_1)$
$\theta_1 = \{(x_1, x), (y_1, 0), (z_1, s(s(0)))\}$

$G_1 = \leftarrow p(x, 0, s(s(0)))$

$C_2 = p(x_2, 0, x_2) \leftarrow$
$\theta_2 = \{(x_2, s(0)), (x, s(s(0)))\}$

$G_3 = \square$

**20.1.5 Nota** Las derivaciones pueden ser finitas o infinitas. Las finitas pueden terminar con éxito (si su último objetivo es $\square$) o con fallo (en caso contrario).

**20.1.6 Definición** Una **refutación** de $P \cup \{G\}$ es una derivación finita de $P \cup \{G\}$

$$(G_0, G_1, G_2 \dots, G_n; C_1, C_2, \dots, C_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$$

tal que $G_n = \square$. Se dice que $n$ es la **longitud** de la refutación.

**20.1.7 Definición** Sea $\theta$ una sustitución y $V' \subseteq V$ un conjunto de variables. La **restricción** de $\theta$ a $V'$ es la sustitución $\theta'$ definida por

$$\theta'(x) = \begin{cases} \theta(x), & \text{si } x \in V'; \\ x, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La restricción de $\theta$ a $V'$ se representa por $\theta' \upharpoonright V'$.

**20.1.8 Definición** Sea $P$ un programa y $G$ un objetivo. La sustitución $\theta$ es una **respuesta computada** para $P \cup \{G\}$ si existe una refutación

$$(G_0, G_1, G_2 \dots, G_n; C_1, C_2, \dots, C_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$$

de $P \cup \{G\}$ y $\theta = (\theta_n \dots \theta_1) \restriction var(G)$.

**20.1.9 Ejemplo** La sustitución $\theta = \{(x, s(s(0)))\}$ es una respuesta computada para el ejemplo anterior.

**20.1.10 Definición** El **conjunto de éxitos** de un programa $P$, $E_P$, es el conjunto de los $A \in B(P)$ tales que $P \cup \{\leftarrow A\}$ tiene una refutación.

## 20.2 Correción de la resolución SLD

**20.2.1 Teorema (Corrección computacional de la resolución SLD)**
Toda respuesta computada para $P \cup \{G\}$ es una respuesta correcta para $P \cup \{G\}$.

**20.2.2 Corolario (Corrección de la resolución SLD)**
Si $P \cup \{G\}$ tiene una refutación, entonces $P \cup \{G\}$ es inconsistente.

**20.2.3 Corolario** El conjunto de éxitos de un programa $P$ está contenido en el menor modelo de Herbrand de $P$.

## 20.3 Completitud de la resolución SLD

**20.3.1 Definición**

1. Si en la definición de resolvente se sustituye la condición de "unificador de máxima generalidad" por la de "unificador", la cláusula que se obtiene se llama **resolvente no principal**.
2. Si en la definición de derivación se sustituye "resolvente" por "resolvente no principal", la sucesión obtenida se llama **derivación no principal**.
3. Si en la definición de refutación se sustituye "derivación" por "derivación no principal", la sucesión obtenida se llama **refutación no principal**.

**20.3.2 Lema** Sea $P$ un programa y $G$ un objetivo. Si

$$(G_0, G_1, G_2 \dots, G_n; C_1, C_2, \dots, C_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$$

es una refutación no principal de $P \cup \{G\}$, entonces existe una refutación

$$(G_0, G'_1, G'_2 \dots, G'_n; C'_1, C'_2, \dots, C'_n; \theta'_1, \theta'_2, \dots, \theta'_n)$$

de $P \cup \{G\}$ tal que $\theta'_n \dots \theta'_1 \leq \theta_n \dots \theta_1$.

**20.3.3 Lema (del ascenso)**
Sea $P$ un programa, $G$ un objetivo y $\theta$ una sustitución. Si

$$(G_0, G_1, G_2 \dots, G_n; C_1, C_2, \dots, C_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$$

es una refutación de $P \cup \{\theta(G)\}$, entonces existe una refutación

$$(G_0, G'_1, G'_2 \dots, G'_n; C'_1, C'_2, \dots, C'_n; \theta'_1, \theta'_2, \dots, \theta'_n)$$

de $P \cup \{G\}$ tal que $\theta'_n \dots \theta'_1 \leq \theta_n \dots \theta_1 \theta$.

**20.3.4 Lema** El menor modelo de Herbrand de un programa $P$ está contenido en el conjunto de éxitos de $P$.

**20.3.5 Teorema (de completitud de la resolución SLD)**
Si $P \cup \{G\}$ es inconsistente, entonces existe una refutación de $P \cup \{G\}$.

**20.3.6 Lema** Sea $A$ un átomo. Si $P \models \forall(A)$, entonces la sustitución identidad es una respuesta computada para $P \cup \{\leftarrow A\}$.

**20.3.7 Lema** Si $\theta$ es una respuesta correcta para $P \cup \{G\}$, entonces la sustitución identidad es una respuesta computada para $P \cup \{\theta(G)\}$.

**20.3.8 Teorema (de completitud computacional de la resolución SLD)**
Si $\theta$ es una respuesta correcta para $P \cup \{G\}$, entonces existe una respuesta computada, $\theta'$, para $P \cup \{G\}$ tal que $\theta' \leq \theta$.

## 20.4 Reglas de computación

**20.4.1 Definición** Sea $P$ un programa lógico, $C = A \leftarrow B_1, \dots, B_k$ una cláusula de $P$, $G = \leftarrow A_1, \dots, A_n$ un objetivo y $R$ una regla de computación. Se dice que $G'$ es la **resolvente de $G$ y $C$ vía $R$ con umg $\theta$** si se verifican las siguientes condiciones:

1. existe un $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $R(G) = A_i$ y $\theta$ es un unificador de máxima generalidad de $A_i$ y $A$;
2. $G' = \leftarrow \theta(A_1, \dots, A_{i-1}, B_1, \dots, B_k, A_{i+1}, \dots, A_n)$.

**20.4.2 Definición** Sea $P$ un programa, $G$ un objetivo y $R$ una regla de computación.

1. Una **derivación SLD** de $P \cup \{G\}$ **vía** $R$ es una derivación de $P \cup \{G\}$ que usa resolventes vía $R$.
2. Una **refutación** de $P \cup \{G\}$ **vía** $R$ es una derivación de $P \cup \{G\}$ que usa resolventes vía $R$.

3. Una **respuesta computada** de $P \cup \{G\}$ **vía** $R$ es una respuesta computada para $P \cup \{G\}$ obtenida de una refutación de $P \cup \{G\}$ vía $R$.

4. El **conjunto de éxitos** de $P$ **vía** $R$ es el conjunto de los $A \in B(P)$ tales que $P \cup \{\leftarrow A\}$ tiene una refutación vía $R$.

**20.4.3 Lema (del intercambio)**
Consideremos dos pasos sucesivos de una derivación

$$\begin{array}{ll}
\leftarrow A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n & B \leftarrow C_1, \dots, C_k \\
\\
\leftarrow \theta_1(A_1, \dots, \mathbf{C}, \dots, A_j, \dots, A_n) & D \leftarrow E_1, \dots, E_m \\
\\
\leftarrow \theta_2(\theta_1(A_1, \dots, \mathbf{C}, \dots, \mathbf{E}, \dots, A_n)) &
\end{array}$$

donde $\mathbf{C}$ representa a $C_1, \dots, C_k$ y $\mathbf{E}$ representa a $E_1, \dots, E_m$. Entonces existen dos sustituciones $\theta'_1, \theta'_2$ tales que

$$\begin{array}{ll}
\leftarrow A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n & D \leftarrow E_1, \dots, E_m \\
\\
\leftarrow \theta'_1(A_1, \dots, A_i, \dots, \mathbf{E}, \dots, A_n) & B \leftarrow C_1, \dots, C_k \\
\\
\leftarrow \theta'_2(\theta'_1(A_1, \dots, \mathbf{C}, \dots, \mathbf{E}, \dots, A_n)) &
\end{array}$$

son dos pasos sucesivos de una derivación y $\theta'_2\theta'_1 \equiv \theta_2\theta_1$.

**20.4.4 Teorema (indenpendencia de la regla de computación)**
Si $\theta$ es una respuesta computada para $P \cup \{G\}$, entonces para cada regla de computación $R$ existe una respuesta computada para $P \cup \{G\}$ vía $R$, $\theta'$, tal que $\theta'(G) \equiv \theta(G)$ (i.e. existe una permutación $\xi$ de forma que $\theta'(G) = \xi(\theta(G))$.

**20.4.5 Lema** El conjunto de los éxitos de $P$ vía $R$ es igual al menor modelo de Herbrand de $P$.

**20.4.6 Teorema (de completitud de la resolución SLD con reglas)** Si $P \cup \{G\}$ es inconsistente, entonces existe una refutación de $P \cup \{G\}$ vía $R$.

**20.4.7 Teorema (de completitud fuerte de la resolución SLD)** Si $\theta$ es una respuesta correcta para $P \cup \{G\}$, entonces existe una computada para $P \cup \{G\}$ vía $R$, $\theta'$, tal que $\theta' \leq \theta$.

## 20.5 Árboles SLD

**20.5.1 Definición** Sean $P$ un programa, $G$ un objetivo y $R$ una regla de computación. Un **árbol SLD** de $P \cup \{G\}$ vía $R$ es un árbol verificando las siguientes condiciones:

1. Cada nodo del árbol es un objetivo.
2. El nodo raiz es $G$.
3. Los nodos que son la cláusula vacía no tienen hijos. Dichos nodos se llaman **nodos de éxito**. Las ramas de la raiz a los nodos de éxito se llaman **ramas de éxito**.
4. Sea $G' = \leftarrow A_1, \dots, A_n$ $(n \geq 1)$ un nodo del árbol y $A_i = R(G')$. Entonces, para cada cláusula de $P$, $C = A \leftarrow B_1, \dots, B_k$, tal que $A$ y $A_m$ son unificables, el nodo tiene un hijo

   $$\leftarrow \theta(A_1, \dots, A_{i-1}, B'_1, \dots, B'_k, A_{i+1}, \dots, A_n)$$

   donde $A' \leftarrow B'_1, \dots, B'_k$ es una variante de $C$ separada de los antecesores de $G'$ y $\theta$ es un unificador de máxima generalidad de $A'$ y $A_i$. Si el nodo $G'$ no tiene descendientes, se llama un **nodo de fallo** y las ramas de la raiz a $G'$ se llaman **ramas de fallo**.

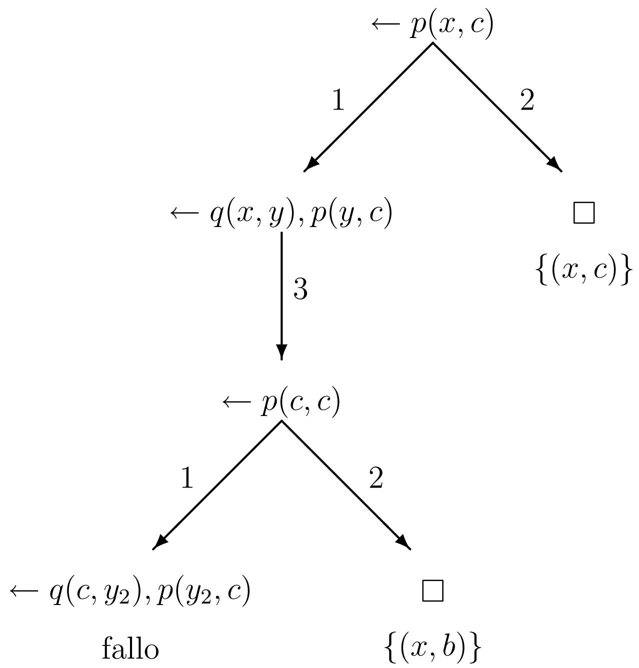
**20.5.2 Nota** Cada rama del árbol representa una derivación de $P \cup \{G\}$ vía $R$.

**20.5.3 Ejemplo** Sea $P$ el programa

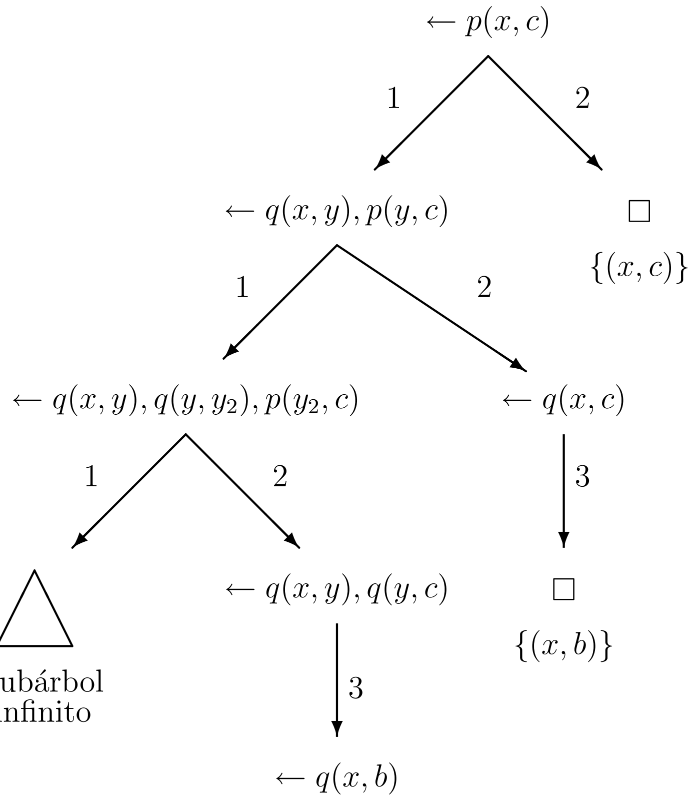
$$\begin{array}{l} p(x,z) \leftarrow q(x,y), p(y,z) \\ p(x,x) \leftarrow \\ p(b,c) \leftarrow \end{array}$$

y $G$ el objetivo $\leftarrow p(x,c)$.

Si $R$ la regla de computación por la izquierda (i.e., $R(\leftarrow A_1, \dots, A_n) = A_1$), entonces el árbol SLD para $P \cup \{G\}$ vía $R$ es:




Si $R$ la regla de computación por la derecha (i.e., $R(\leftarrow A_1, \ldots, A_n) = A_n$), entonces el árbol SLD para $P \cup \{G\}$ vía $R$ es:




Nótese que aunque el primer árbol es finito y el segundo es infinito, en ambos se obtienen las mismas respuestas.

**20.5.4 Teorema** Si $P \cup \{G\}$ es inconsistente, entonces el árbol SLD de $P \cup \{G\}$ vía $R$ tiene una rama de éxito.

**20.5.5 Teorema** Si $\theta$ es una respuesta correcta de $P \cup \{G\}$, entonces en el árbol SLD de $P \cup \{G\}$ vía $R$ existe una rama de éxito tal que la respuesta computada por la refutación que representa dicha rama, $\theta'$, es más general que $\theta$ (i.e. $\theta' \leq \theta$).

**20.5.6 Teorema** Si $P$ es un programa y $A$ es un átomo básico, son equivalentes:

1. $P \models A$
2. $A \in M_P$
3. $A \in T_P \uparrow \omega$
4. $A \in E_P$
5. Todo árbol SLD para $P \cup \{\leftarrow A\}$ tiene una rama de éxito.

## 20.6 Procedimientos de refutación. La evaluación de Prolog

**20.6.1 Definición** Una **regla de búsqueda** es una estrategia para encontrar ramas de éxitos en los árboles SLD.

**20.6.2 Definición** Un **procedimiento de refutación** viene dado por una regla de computación y una regla de búsqueda.

**20.6.3 Definición**

1. La **regla de computación de Prolog** selecciona el primer átomo por la izquierda.
2. La **regla de búsqueda de Prolog** es una búsqueda en profundidad.

**20.6.4 Algoritmo (de evaluación de Prolog)**
*Entrada:* Un programa $P = \{C_1, \dots, C_n\}$ (escribiremos $C_i = B_i \leftarrow D_{i,1}, \dots, D_{i,n_i}$), un objetivo $G = \leftarrow A_1, \dots, A_k$ y una sustitución $\theta$
*Salida:* Una respuesta computada para $P \cup \{\theta(G)\}$
*Procedimiento:* $Evaluar(P, G, \theta)$

**si** $G = \Box$ **entonces devolver** $\theta$
 **e.o.c. hacer** $i := 0$
  **mientras que** $(i < n)$
   **hacer** $i := i + 1$
    $B'_i$ una variante de $B_i$
    $\theta' := Unif(E_1, B'_i)$
   **si** $\theta' \neq$ `No unificables`
    **entonces** $Evaluar(P, \leftarrow \theta'(D_{i,1}, \ldots, D_{i,n_i}, A_2, \ldots, A_k), \theta'\theta)$

**20.6.5 Nota** Dado un programa $P$ y un objetivo $G$,

$$Evaluar(P, G, \emptyset)$$

devuelva las respuestas computadas por Prolog para $P \cup \{G\}$

# Bibliografía


[1] ANDREWS, P.B., *An Introduction to Mathematical Logic and Type Theory: To Truth Through Proof.* Academic Press, 1986.

[2] APT, K.R., Introduction to Logic Programming. En *Handbook of Theoretical Computer Science* (Ed. por J.V. Leeuwen). North–Holand, 1990.

[3] BIBEL, W., *Automated Theorem Proving* (2nd ed.) Vieweg, 1982.

[4] BLEDSOE, W.W.; LOVELAND, D.W. (eds.), *Automated Theorem Proving: After 25 Years.* Americam Mathematical Society, 1984.

[5] BOIZUMAULT, P., *Prolog: l'implantation.* Masson, 1988.

[6] BUNDY, A., *The Computer Modelling of Mathematical Reasoning.* Academic Press, 1983.

[7] CHANG, C–L; LEE, R. C–T., *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving.* Academic Press, 1973.

[8] CUENA, J., *Lógica informática.* Alianza, 1985.

[9] DALEN, D.V., *Logic and Structure.* (2nd ed.) Springer–Verlag, 1983.

[10] DAVIS, M.; WEYUKER, E., *Computability, Complexity, and Languages: Fundamentals of Theoretical Computer Science.* Academic Press, 1983.

[11] DELAHAYE, J–P., *Outils logiques pour l'intelligence artificielle.* Eyrolles, 1986.

[12] DEVILLE, Y., *Logic Programming: Systematic Program Development.* Addison–Wesley, 1990.

[13] EBBINGHAUS, H.D.; FLUM, J.; THOMAS, W. *Mathematical Logic.* Springer–Verlag, 1984.

[14] ENDERTON, H.B., *A Mathematical Introduction to Logic.* Academic Press, 1972.

[15] FARRENY, H., *Ejercicios programados de inteligencia artificial.* Masson, 1988.

[16] Farreny, H.; Ghallab, M., *Éléments d'intelligence artificielle*. Hermes, 1987.

[17] Frost, R., *Bases de datos y sistemas expertos*. Díaz de Santos, 1989.

[18] Gallier, J.H., *Logic for Computer Science (Foundations of Automatic Theorem Proving)*. Harper & Row, 1986.

[19] Genesereth, M.R.; Nilsson, N.J., *Logical Foundations of Artificial Intelligence*. Morgan Kaufmann, 1987.

[20] Gibbins, P., *Logic with Prolog*. Clarendon Press, 1988.

[21] Hermes, H., *Introduction to Mathematical Logic*. Springer–Verlag, 1973.

[22] Huet, G., *Rsolution d'equations dans des langages d'ordre* $1, 2, \ldots, \omega$. Thèse d'Etat, Univ. Paris VII, 1976.

[23] Huet, G., Deduction and Computation. En *Fundamentals of Artificial Intelligence: An Advanced Course)* (Ed. por W. Bibel y Ph. Jorrand), pp.39–74. LNCS 232. Springer–Verlag, 1987.

[24] Jorrand, Ph., Fundamentals Mechanisms for Artificial Intelligence Programming Languages. En *Advanced Topics in Artificial Intelligence* (Ed. por R.T. Nossum), pp. 1–40. LNAI, 345. Springer–Verlag, 1988.

[25] Kowalski, R., *Lógica, programación e inteligencia artificial*. Díaz de Santos, 1986.

[26] Lewis, H.R.; Papadimitriou, C.H., *Elements of the Theory of Computation*. Prentice–Hall, 1981.

[27] Lloyd, J.W., *Foundations of Logic Programming* (2nd ed.) Springer–Verlag, 1987.

[28] Loveland, D.W., *Automated Theorem Proving: A Logical Basis*. North–Holand, 1978.

[29] Maier, D.; Warren, D:S:, *Computing with Logic (Logic Programming with Prolog)*. Benjamin Cummings, 1988.

[30] Manna, Z., *Mathematical Theory of Computation*. McGraw–Hill, 1974.

[31] Manna, Z.; Waldinger, R., *The Logical Basis for Computer Programming (Vol. 1: Deductive Reasoning)*. Addison–Wesley, 1985.

[32] Manna, Z.; Waldinger, R., *The Logical Basis for Computer Programming (Vol. 2: Deductive Systems)*. Addison–Wesley, 1990.

[33] Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic* (3 ed.) Wadsworth & Brooks, 1987.

[34] Nilsson, N.J., *Problem–Solving Methods in Artificial Intelligence.* McGraw–Hill, 1971.

[35] Nilsson, N.J., *Principles of Artificial Intelligence.* Springer–Verlag, 1982.

[36] Pabion, J.–F., *Logique mathématique.* Hermann, 1766.

[37] Plaisted, D.A., Mechanical Theorem Proving. En *Tormal Techniques in Artificial Intelligence: A Sourcebook.* (Ed. por R.B. Banerji), pp. 269–320. North–Holand, 1990.

[38] Quine, W.V., *Los métodos de la lógica.* Ariel, 1981.

[39] Ramsay, A., *Formal Methods in Artificial Intelligence.* Cambridge University Press, 1988.

[40] Rich, E., *Artificial Intelligence.* McGraw–Hill, 1983.

[41] Richards, T., *Clausal Form Logic: An Introduction to the Logic of Computer Reasoning.* Addison–Wesley, 1989.

[42] Robinson, J.A., *Logic: Form and Function (The Mechanization of Deductive Reasoning).* Edinburgh University Press, 1979.

[43] Sancho, J., *Lógica, Matemática y Computabilidad.* Díaz de Santos, 1990.

[44] Schagrin, M.L.; Rapaport, W.J.; Dipert, R.R. *Logic: A Computer Approach.* McGraw–Hill, 1985.

[45] Schöning, U., *Logic for Computer Scientists.* Birkhuser, 1989.

[46] Shoenfield, J.R., *Mathematical Logic.* Addison–Wesley, 1967.

[47] Siekmann, J.; Wrightson, G. (edts.) *Automatisation of Reasoning.* Springer–Verlag, 1983.

[48] Thayse, A. y otros. *Aproche logique de l'Intelligence Artificielle. (Vol 1: de la logique classique à la programmation logique).* Dunod, 1988.

[49] Thayse, A. y otros. *Aproche logique de l'Intelligence Artificielle. (Vol 2: de la logique modale à la logique des bases de données).* Dunod, 1989.

[50] Winston, P.H., *Artificial Intelligence (2nd ed.)* Addison–Wesley, 1984.

[51] Wos, L., *Automated Reasoning: 33 Basic Research Problems.* Prentice Hall, 1988.

[52] WOS, L.; OVERBEEK, R.; LUSK, E.; BOYLE, J., *Automated Reasoning: Introduction and Applications*. Prentice Hall, 1984.