Dpto. de Álgebra, Computación, Geometría y Topología
Universidad de Sevilla

Ejercicios de "Teoría de conjuntos"

José A. Alonso Jiménez
(jalonso@us.es)

Sevilla, 1991

Contenido

Capítulo 1

La teoría de conjunto de Zermelo–Fraenkel

1.1 El lenguaje de la teoría de conjuntos

Ejercicio 1.– Determinar las variables libres de la fórmula $(\forall x)[x \in y \to (\exists y)[y = z]]$.

Ejercicio 2.– Escribir las fórmulas representadas por las siguientes expresiones:

1. $\bigcap\{x : \varphi(x)\} \subseteq \bigcup\{x : \psi(x)\}$
2. $\{x : \varphi(x)\} \subseteq V$
3. V es una clase propia.

Ejercicio 3.– Demostrar que para cualquier clase A, $A \subseteq V$.

Ejercicio 4.– Demostrar que $\{x : \neg(\exists z)[x \in z \wedge z \in x]\}$ es una clase propia.

1.2 Axiomas y desarrollo elemental

Los axiomas de existencia, extensionalidad y separación

Ejercicio 5.– Probar que para cada conjunto x, existe algún y tal que $y \notin x$.

Ejercicio 6.– Demostrar que el axioma del conjunto vacío es consecuencia del axioma de separación.

Ejercicio 7.– Demostrar que si en el axioma de separación se permite que la variable y ocurra libre en $\varphi(x)$, entonces $(\forall x)[x = \emptyset]$.

Ejercicio 8.– Demostrar que si $A \neq \emptyset$, entonces $\bigcap A$ es un conjunto.

Ejercicio 9.– Demostrar que $\bigcap \emptyset = V$.

Los axiomas del par, de la unión y del conjunto potencia

Ejercicio 10.– Demostrar que el axioma del par es consecuencia de los axiomas de la unión y de las partes.

Ejercicio 11.– Se definen $0 = \emptyset$, $1 = 0 \cup \{0\}$, $2 = 1 \cup \{1\}$, $3 = 2 \cup \{2\}$, $4 = 3 \cup \{3\}$. Probar que $0, 1, 2, 3$ y 4 son conjuntos.

Ejercicio 12.– Expresar el conjunto 4 usando sólo los símbolos {, }, $\emptyset$, ,.

Ejercicio 13.– Simplificar las siguientes expresiones:

1. $\bigcup 1$.
2. $\bigcup\{\{0,1,2\},\{0,4,5\},\{1,6\}\}$.
3. $\bigcap\{\{0,1,2\},\{0,4,5\},\{1,6\}\}$.

Ejercicio 14.– Sea $x = \{\{2,5\},4,\{4\}\}$. Calcular $\bigcap(\bigcup x - 4)$.

Ejercicio 15.– Sea $x = \{\{\{1,2\},\{1\}\},\{2\}\}$. Calcular:

$$\bigcup x, \qquad \bigcup\bigcup x, \qquad \bigcap x, \qquad \bigcap\bigcap x, \qquad \bigcap\bigcup x, \qquad \bigcup\bigcap x$$

Ejercicio 16.– Sea $x = \{\{1,2\},\{0,2\},\{1,3\}\}$. Calcular:

$$\bigcup x, \qquad \bigcup\bigcup x, \qquad \bigcap x, \qquad \bigcap\bigcap x, \qquad \bigcap\bigcup x, \qquad \bigcup\bigcap x$$

Ejercicio 17.– Encontrar dos conjuntos a y b tales que $a \neq b$ y $\bigcup a = \bigcup b$.

Ejercicio 18.– Demostrar:

1. $b \in a \to \cap a \subseteq b \subseteq \cup a$.
2. $a \subseteq b \to \cup a \subseteq \cup b$.
3. $(\forall c \in a)[c \subseteq b] \to \cup a \subseteq b$.

Ejercicio 19.– Sea $x = \{1, 2\}$. Calcular:

$$\bigcup\bigcup x, \qquad \bigcap\bigcap x, \qquad \left(\bigcap\bigcup x\right)\cup\left(\bigcup\bigcup x - \bigcup\bigcap x\right), \qquad \bigcup\left(\bigcup x - \bigcap x\right)$$

Ejercicio 20.– Dar un ejemplo de dos conjuntos a y b tales que

$$a \cap b \neq \emptyset \qquad \text{y} \qquad (\bigcap a) \cap (\bigcap b) \neq \bigcap(a \cap b)$$

Ejercicio 21.– ¿Es $a \cup (\bigcup b) = \bigcup\{a \cup c : c \in b\}$?. Si no, ¿qué condiciones se necesitan para que se verifique la igualdad?.

Ejercicio 22.– Probar que para cualesquiera conjuntos a, b y c

$$\begin{array}{ll}
a \cup a = a & a \cap a = a \\
a \cup b = b \cup a & a \cap b = b \cap a \\
a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c & a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c \\
a \cap (a \cup b) = a & a \cup (a \cap b) = a \\
a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c) & a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c) \\
c - (a \cap b) = (c - a) \cup (c - b) & c - (a \cup b) = (c - a) \cap (c - b)
\end{array}$$

Ejercicio 23.– Probar que para cualesquiera conjuntos a, b y c

1. $a - (b - c) = (a - b) \cup (a \cap c)$
2. $(a \cup b) - c = (a - c) \cup (b - c)$
3. $(a - b) - c = a - (b \cup c)$

Ejercicio 24.– Sean a y b dos conjuntos. Se define la diferencia simétrica de a y b como

$$a \triangle b = (a - b) \cup (b - a)$$

Probar que:

1. $a \triangle b$ es un conjunto
2. $a \triangle b = (a \cup b) - (a \cap b)$
3. $a \triangle b = b \triangle a$ [Conmutativa]
4. $a \triangle (b \triangle c) = (a \triangle b) \triangle c$ [Asociativa]
5. $a \cap (b \triangle c) = (a \cap b) \triangle (a \cap c)$ [Distributiva]
6. $a \triangle \emptyset = a$ [Elemento neutro]

7. $a \triangle a = \emptyset$ [Elementos simétricos]

8. $a \triangle b = c \triangle b \implies a = c$ [Cancelativa]

9. $a \triangle b = \emptyset \implies a = b$

10. $(a \cup c) \triangle (b \cup c) = (a \triangle b) - c$

11. $a \cup c = b \cup c \implies a \triangle b \subseteq c$

12. $(\forall a)(\forall b)(\exists! c)[x \triangle c = b]$

13. a, b disjuntos $\implies a \cup b = a \triangle b$

14. $a \cup b = a \triangle b \triangle (a \cap b)$

Ejercicio 25.– Demostrar que $\bigcup(a \cup b) = (\bigcup a) \cup (\bigcup b)$.

Ejercicio 26.– Demostrar que si a y b son no vacíos, entonces $\bigcap(a \cup b) = (\bigcap a) \cap (\bigcap b)$.

Ejercicio 27.– Sea $x \neq \emptyset$. Demostrar:

1. $\bigcap\{z \cup y : z \in x\} = y \cup (\bigcap x)$
2. $\bigcup\{z \cap y : z \in x\} = y \cap (\bigcup x)$

Ejercicio 28.– Sean a, b y c conjuntos tales que $a \cup b = a \cup c$ y $a \cap b = a \cap c$. Demostrar que $b = c$.

Ejercicio 29.– Sea a un conjunto no vacío. Probar que las siguientes clases son propias:

1. $\{x : (\exists y)[y \in a \wedge x \notin y]\}$
2. $\{x : (\exists y)(\exists z)[y \in a \wedge z \in y \wedge x \notin z]\}$

Ejercicio 30.– Probar que para cualesquiera conjuntos a, b y c se tiene que:

1. $a \subseteq a$.
2. $a \subseteq b \wedge b \subseteq a \implies a = b$.
3. $a \subseteq b \wedge b \subseteq c \implies a \subseteq c$.
4. $\emptyset \subseteq a$.

Ejercicio 31.– Probar que para cualesquiera conjuntos a y b las condiciones siguientes son equivalentes:

1. $a \subseteq b$.
2. $a \cup b = b$.
3. $a \cap b = a$.
4. $a - b = \emptyset$.

Ejercicio 32.– Sean a y b subconjuntos de un conjunto c. Se llama complementario de a en c al conjunto $c - a$ y se representa por a'.

1. Probar que las condiciones siguientes son equivalentes:
   (a) $a \subseteq b$.
   (b) $b' \subseteq a'$.
   (c) $a \cap b' = \emptyset$.
2. $(a \cup b)' = a' \cap b'$.
3. $(a \cap b)' = a' \cup b'$.
4. $(a - b)' = b \cup a'$.

Ejercicio 33.– Sea a un conjunto. Se definen las clases:

$$\begin{aligned} a^* &= \{b - c : b, c \in a\} \\ a^{\cup} &= \{b \cup c : b, c \in a\} \\ a^{\cap} &= \{b \cap c : b, c \in a\} \\ a^{\triangle} &= \{b \triangle c : b, c \in a\} \end{aligned}$$

1. Demostrar que a^*, $a^{\cup}$, $a^{\cap}$ y $a^{\triangle}$ son conjuntos.
2. Determinar cuáles de las siguientes relaciones son válidas:

$$a^* \subseteq (a^*)^*, \qquad (a^*)^* \not\subseteq a^*, \qquad a^{\triangle} \subseteq (a^{\triangle})^{\triangle}, \qquad a^{\cup} \subseteq (a^{\cup})^{\cup}, \qquad a^{\cap} \subseteq (a^{\cap})^{\cap}.$$

Ejercicio 34.– Calcular:

1. $\mathbf{P}(0)$, $\mathbf{P}(\mathbf{P}(0))$, $\mathbf{P}(\mathbf{P}(\mathbf{P}(0)))$.
2. $\mathbf{P}(1)$, $\mathbf{P}(\mathbf{P}(1))$.

3. $\mathbf{P}(2)$, $\mathbf{P}(\mathbf{P}(2))$.
4. $\bigcap\bigcup(\mathbf{P}(2)-2)$.
5. $\bigcap\{\mathbf{P}(1), \mathbf{P}(\mathbf{P}(1)), \mathbf{P}(\mathbf{P}(\mathbf{P}(1)))\}$

Ejercicio 35.– Sea $x = \{1, \{1\}\}$. Calcular $\bigcup x$, $\mathbf{P}(x)$, $\mathbf{P}(\bigcup x)$, $\bigcup \mathbf{P}(x)$.

Ejercicio 36.– Encontrar dos conjuntos a y b tales que $a \in b$ y $\mathbf{P}(a) \notin \mathbf{P}(b)$.

Ejercicio 37.– Demostrar que $\bigcup \mathbf{P}(a) \subseteq a$.

Ejercicio 38.– Demostrar que $a \subseteq \mathbf{P}(\bigcup a)$. ¿Cuándo se da la igualdad?.

Ejercicio 39.– Demostrar que si $a \in b$, entonces $\mathbf{P}(a) \in \mathbf{P}(\mathbf{P}(\cup b))$.

Ejercicio 40.– Demostrar que $2 \in \mathbf{P}(\mathbf{P}(\mathbf{P}(a)))$, para cualquier conjunto a.

Ejercicio 41.– Demostrar que $\mathbf{P}(a) = \mathbf{P}(b) \quad \Longrightarrow \quad a = b$.

Ejercicio 42.– Demostrar que si $a \neq \emptyset$, entonces $\mathbf{P}(\bigcap a) = \bigcap\{\mathbf{P}(c) : \; c \in a\}$.

Ejercicio 43.– Demostrar que $\bigcup\{\mathbf{P}(c) : \; c \in a\} \subseteq \mathbf{P}(\cup a)$. ¿Cuándo se da la igualdad?

Ejercicio 44.– Demostrar que no existe ningún conjunto a tal que $\mathbf{P}(a) \subseteq a$.

Ejercicio 45.– Sean a y b conjuntos. Demostrar que las siguientes clases son conjuntos:

1. $\{\{\{c\}\} : c \in a \cup b\}$
2. $\{a \cup c : c \in b\}$
3. $\{\mathbf{P}(c) : c \in a\}$
4. $\{c \cup d : c \in a \wedge d \in b\}$

Ejercicio 46.– Demostrar, sin usar el axioma del par, que si a es un conjunto, entonces $\{a\}$ también lo es.

Par ordenado y conjunto cartesiano

Ejercicio 47.– Calcular $\langle 0, 1\rangle \cap \langle 1, 0\rangle$.

Ejercicio 48.– Hallar $\bigcap\bigcap\bigcap\{\langle a, b\rangle\}$.

Ejercicio 49.– Sean a y b conjuntos. Probar que:

1. $\bigcap\bigcap\langle a,b\rangle = a$.
2. $a \neq b \implies \bigcap(\bigcup\langle a,b\rangle - \bigcap\langle a,b\rangle) = b$.
3. $(\bigcap\bigcup\langle a,b\rangle) \cup (\bigcup\bigcup\langle a,b\rangle - \bigcup\bigcap\langle a,b\rangle) = b$.
4. $(\bigcap\bigcup\langle a,b\rangle) \cup (\bigcup\bigcup\langle a,b\rangle - \bigcap\bigcup\langle a,b\rangle) = a \cup b$.

Ejercicio 50.– Determinar cuáles de las siguientes propuestas pueden servir como definición de par ordenado (es decir, para cuáles se verifica $\langle a,b\rangle_i = \langle c,d\rangle_i \leftrightarrow a = c \wedge b = d$)

1. $\langle a,b\rangle_1 = \{a,b\}$
2. $\langle a,b\rangle_2 = \{\{a,0\},b\}$
3. $\langle a,b\rangle_3 = \{\{a,0\},\{b,\{0\}\}\}$
4. $\langle a,b\rangle_4 = \{\{a,0\},\{b\}\}$
5. $\langle a,b\rangle_5 = \{a,\{b\}\}$
6. $\langle a,b\rangle_6 = \{\{\{a\},0\},\{\{b\}\}\}$

Ejercicio 51.– Demostrar que $\{z : (\exists x)(\exists y)[z = \langle x,y\rangle]\}$ es una clase propia.

Ejercicio 52.– Probar que $\{\{0\}\}$ es un par ordenado.

Ejercicio 53.– Comprobar que la siguiente definición de terna ordenada es incorrecta:

$$\langle x,y,z\rangle' = \{\{x\},\{x,y\},\{x,y,z\}\}$$

(es decir, dar un ejemplo en el que $\langle x,y,z\rangle' = \langle u,v,w\rangle'$, pero $x \neq u \vee y \neq v \vee z \neq w$.

Ejercicio 54.– Hallar a, b, c tales que $\langle\langle a,b\rangle,c\rangle \neq \langle a,\langle b,c\rangle\rangle$

Ejercicio 55.– Demostrar:

1. $a \times (b \cup c) = (a \times b) \cup (a \times c)$
2. $a \times (b - c) = (a \times b) - (a \times c)$
3. $a \times (b \cap c) = (a \times b) \cap (a \times c)$

Ejercicio 56.– Dar ejemplos de conjuntos tales que

1. $a \times b \neq b \times a$

2. $a \times (b \times c) \neq (a \times b) \times c$

3. $a \cup (b \times c) \neq (a \cup b) \times (a \cup c)$

4. $a^3 = a \times a^2$

Ejercicio 57.– Sea $a \neq \emptyset$. Probar que las condiciones siguientes son equivalentes:

1. $b \subseteq c$.

2. $a \times b \subseteq a \times c$.

3. $b \times a \subseteq c \times a$.

Ejercicio 58.– Demostrar que si $x^2 = y^2$, entonces $x = y$.

Ejercicio 59.– Demostrar que si $x \times y = x \times z$ y $x \neq \emptyset$, entonces $y = z$.

Ejercicio 60.– Hallar un conjunto x tal que $x^2 = x$.

Ejercicio 61.– Demostrar que si x e y son conjuntos, entonces $\{\{z\} \times y : z \in x\}$ es un conjunto.

Relaciones

Ejercicio 62.– Demostrar que si x es un conjunto, entonces $\{r : r \text{ es una relación en } x\}$ es un conjunto.

Ejercicio 63.– Escribir todas las relaciones en el conjunto 1.

Ejercicio 64.– Probar que:

1. $(a \cup b)^{-1} = a^{-1} \cup b^{-1}$

2. $(a \cap b)^{-1} = a^{-1} \cap b^{-1}$

3. $(a - b)^{-1} = a^{-1} - b^{-1}$

Ejercicio 65.– Demostrar que si x e y son conjuntos, entonces $x \restriction y$ también lo es.

Ejercicio 66.– Probar que $(r \circ s)^{-1} = s^{-1} \circ r^{-1}$.

Ejercicio 67.– Sea $r = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 0, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$. Calcular $r \circ r$, $r \restriction \{1\}$, $r^{-1} \restriction \{1\}$, $r[\{1\}]$, $r^{-1}[\{1\}]$.

Ejercicio 68.– Calcular todos los pares ordenados de $\mathbf{P}(2)$.

Ejercicio 69.– Calcular $\mathbf{P}(2)^{-1} \circ (\mathbf{P}(2) \restriction 1)$

Ejercicio 70.– Demostrar:

1. $r \restriction x = r \cap (x \times \text{rango}(r))$
2. $r \restriction (b \cup c) = (r \restriction b) \cup (r \restriction c)$

Aplicaciones

Ejercicio 71.– Demostrar:

1. $f \restriction x$, y^x, $f[z]$ y $f^{-1}[z]$ son conjuntos.
2. Si $f \in y^x$ y $g \in z^y$, entonces $g \circ f \in z^x$.

Ejercicio 72.– Demostrar que $A = \{f : f$ es una aplicación$\}$ es una clase propia.

Ejercicio 73.– Demostrar que si x es un conjunto, entonces $A = \{\text{dom}(f) : f \in x\}$ es un conjunto.

Ejercicio 74.– Sea $f = \{\langle 0, 2\rangle, \langle 1, 0\rangle\}$.

1. Demostrar que f es una aplicación.
2. Calcular $f(0)$, $f[0]$, $f[1]$, f^{-1}, $f \restriction 1$ y $\bigcup\bigcup f$.

Ejercicio 75.– Sean a y b conjuntos y F una función. Probar que:

1. $F^{-1}[\cup a] = \bigcup\{F^{-1}[c] : c \in a\}$.
2. $a \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad F^{-1}[\cap a] = \bigcap\{F^{-1}[c] : c \in a\}$.
3. $F^{-1}[a - b] = F^{-1}[a] - F^{-1}[b]$.

Ejercicio 76.– Determinar los siguientes conjuntos: 2^2, 2^1, 2^0, 0^0, 0^2.

Relaciones de equivalencia

Ejercicio 77.– Demostrar:

1. x es simétrico si, y sólo si, $x^{-1} \subseteq x$

2. x es transitivo si, y sólo si, $x \circ x \subseteq x$

Ejercicio 78.– Construir todas las relaciones de equivalencia sobre el conjunto 3.

Capítulo 2

Buenos órdenes. Ordinales

2.1 Clases bien ordenadas

Ejercicio 79.– Determinar si las siguientes relaciones son órdenes parciales, órdenes totales o buenos órdenes en A.

1. $A = \omega, \quad xRy \leftrightarrow x < y$.
2. $A = \mathbb{Z}, \quad xRy \leftrightarrow x < y$.
3. $A = \omega, \quad xRy \leftrightarrow (x \text{ divide a } y) \wedge x \neq y$.
4. $A = \emptyset, \quad R = \emptyset$.
5. $A = \omega, \quad R = \emptyset$.
6. $A = 2^\omega, \quad fRg \leftrightarrow (\exists n \in \omega)[f(n) < g(n) \wedge (\forall m < n)[f(m) = g(m)]]$.

Ejercicio 80.– Sean A y B conjuntos y

$$Fn(A, B) = \{f : (f \text{ es una función }) \wedge \operatorname{dom}(f) \subseteq A \wedge \operatorname{rang}(f) \subseteq B\}$$

1. Demostrar que $Fn(A, B)$ es un conjunto.
2. ¿Es $\subset$ un orden parcial en $Fn(A, B)$?, ¿es total?, ¿es buen orden?.

Ejercicio 81.– En el conjunto $\mathbf{P}(\omega)$ definimos la relación R por:

$$a \triangleleft b \leftrightarrow (\exists n \in \omega)[n \cap a = n \cap b \wedge n \in a \wedge n \notin b]$$

¿Es R un orden parcial en $\mathbf{P}(\omega)$?, ¿es total?, ¿es buen orden?.

Ejercicio 82.– Sea $<$ el orden usual de ω. Para cada $n \in \omega$, sea $f(n)$ el número de divisores primos de n. Sea R la relación definida en ω por:

$$mRn \leftrightarrow f(m) < f(n) \vee (f(m) = f(n) \wedge m < n)$$

1. Representar la relación R.
2. ¿Es R un orden parcial en ω?, ¿es total?, ¿es buen orden?.
3. Demostrar que $\langle \omega, < \rangle \ncong \langle \omega, R \rangle$.

Ejercicio 83.– Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$. Demostrar o refutar:

1. Si R es un orden parcial en A, entonces R^{-1} es un orden parcial en A.
2. Si R es un orden total en A, entonces R^{-1} es un orden total en A.
3. Si R es un buen orden en A, entonces R^{-1} es un buen orden en A.

Ejercicio 84.– Sea A un conjunto, $R \subseteq A \times A$ y $B \subseteq A$. Demostrar o refutar:

1. Si R es un orden parcial en A, entonces $R \cap (B \times B)$ es un orden parcial en B.
2. Si R es un orden total en A, entonces $R \cap (B \times B)$ es un orden total en B.
3. Si R es un buen orden en A, entonces $R \cap (B \times B)$ es un buen orden en B.

Ejercicio 85.– Sean A y B conjuntos, $S \subseteq B \times B$, $F : A \to B$ inyectiva y S la relación definida en A por: $xRy \leftrightarrow F(x)SF(y)$. Demostrar o refutar:

1. Si S es un orden parcial en B, entonces R es un orden parcial en A
2. Si S es un orden total en B, entonces R es un orden total en A
3. Si S es un buen orden en B, entonces R es un buen orden en A

Ejercicio 86.– Sean (A, R) y (B, S) dos conjuntos parcialmente ordenados y supongamos que $A \cap B = \emptyset$. Sea $T = R \cup S \cup (A \times B)$.

1. Demostrar que T es un orden parcial en $A \cup B$.

2. Si R y S son totales, ¿es T total?.

3. Si R y S son buenos órdenes, ¿es T un buen orden?.

Ejercicio 87.– Sean (A, R) y (B, S) dos conjuntos parcialmente ordenados y T la relación sobre $A \times B$ definida por: $(a, b)T(a', b') \leftrightarrow (aRa') \vee (a = a' \wedge bSb')$.

1. Demostrar que T es un orden parcial en $A \times B$.

2. Si R y S son totales, ¿es T total?.

3. Si R y S son buenos órdenes, ¿es T un buen orden?.

Ejercicio 88.– Sean $\langle A, R\rangle$, $\langle B, S\rangle$ conjuntos totalmente ordenados y $F : A \to B$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

1. F es un homomorfismo (i.e. $(\forall x, y \in A)[xRy \to F(x)SF(y)]$)

2. F es creciente (i.e. $(\forall x, y \in A)[xRy \leftrightarrow F(x)SF(y)]$)

3. F es una inmersión (i.e. F es inyectiva y creciente).

Ejercicio 89.– Sean $\langle A, R\rangle$, $\langle B, S\rangle$ conjuntos parcialmente ordenados y $F : A \to B$. Demostrar o refutar:

1. Si F es un homomorfismo, entonces F es inyectiva.

2. Si F es un homomorfismo, entonces F es creciente.

Ejercicio 90.– Sea $\langle x, <\rangle$ un conjunto parcialmente ordenado. Probar que existe un $y \subseteq \mathbf{P}(x)$ tal que $\langle x, <\rangle \cong \langle y, \subset\rangle$.

Ejercicio 91.– Sea $\langle x, <\rangle$ un conjunto totalmente ordenado y $A = \{s \subseteq x : s \text{ segmento de } x\}$. Probar que:

1. $s, s' \in A \implies s \subseteq s' \vee s' \subseteq s$.

2. $a, b \in x \wedge a \neq b \implies (\exists s \in A)[(a \in s \wedge b \notin s) \vee (a \notin s \wedge b \in s)]$

3. $a \subseteq A \implies \cup a \in A$.

4. $a \subseteq A \implies x \cap (\cap a) \in A$.

Ejercicio 92.– Sea $B \subseteq \mathbf{P}(A)$ tal que:

$(\forall s, s' \in B)[s \subseteq s' \vee s' \subseteq s]$
$(\forall x, y \in A)[x \neq y \to (\exists s \in B)[(x \in s \wedge y \notin s) \vee (x \notin s \wedge y \in s)]$

1. Probar que existe una única relación de orden total, $<$, sobre A tal que:
$$(\forall s \in B)[s \text{ es un segmento de } \langle A, < \rangle]$$
2. Si además se verifican:
   (a) $C \subseteq B \to \cup C \in B$
   (b) $C \subseteq B \to A \cap (\cap C) \in B$

   Probar que, si $<$ es la relación de orden total sobre A considerada en el apartado (1), entonces
$$A = \{s : s \text{ es un segmento de } \langle A, < \rangle\}$$
3. Buscar ejemplos que prueben que las condiciones (2.a) y (2.b) son necesarias para la igualdad anterior.

Ejercicio 93.– Para cada una de las siguientes condiciones, buscar un conjunto totalmente ordenado $\langle A, < \rangle$ que la verifique.

1. A tiene un segmento inicial B tal que $A \neq B$ y B no es una sección inicial de A.
2. Existe una $F : A \to B$ creciente tal que $F(x) < x$ para algún $x \in A$.
3. Existe un $x \in A$ tal que $\langle A, < \rangle \cong \langle A_x, < \rangle$.
4. Existe un $F : \langle A, < \rangle \cong \langle A, < \rangle$ tal que $F \neq I_A$.

Ejercicio 94.– Sea $\langle A, < \rangle$ un conjunto totalmente ordenado. ¿Es válida la siguiente condición?:
$$(\forall x, y \in A)[A_x \cong A_y \to x = y]$$

Ejercicio 95.– Sea $\langle A, < \rangle$ una clase bien ordenada y $B \subseteq A$. Demostrar que
$$A \cong B \vee (\exists x \in A)[B \cong A_x]$$

Ejercicio 96.– Demostrar:

1. Si $a \times a$ es un conjunto bien ordenable, entonces a también lo es.
2. Si $\mathbf{P}(a)$ es un conjunto bien ordenable, entonces a también lo es.

2.2 Números ordinales

La clase de los números ordinales

Conjuntos transitivos

Ejercicio 97.– Dar conjuntos a, b, c, d, e tales que $\{\{1\}, a, b\}$ y $\{\{\{1\}\}, c, d, e\}$ sean conjuntos transitivos.

Ejercicio 98.– Dado $a = \langle 0, 1\rangle$, hallar un conjunto transitivo b_1 tal que $a \subseteq b_1$ y un conjunto transitivo b_2 tal que $b \in b_2$.

Ejercicio 99.– Sea a un conjunto. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

1. a es transitivo.
2. $\bigcup a \subseteq a$.
3. $a \subseteq \mathbf{P}(a)$.
4. $\bigcup a^+ = a$.

Ejercicio 100.– Sea a un conjunto.

1. Demostrar que si a es transitivo, entonces $\bigcup a$ también lo es.
2. ¿Es cierto el recíproco?.
3. Demostrar que si a es transitivo, entonces $\mathbf{P}(a)$ también lo es.
4. ¿Es cierto el recíproco?.

La clase de los números ordinales

Ejercicio 101.– Dar ejemplos de:

1. conjuntos transitivos que no sean ordinales.
2. conjuntos bien ordenados por la relación de pertenencia que no sean ordinales.

Ejercicio 102.– Demostrar que si a es un conjunto, entonces son equivalentes:

1. a es un ordinal.

2. $\in_a$ es un buen orden en a y $(\forall x \in a)[x = \{y \in a : y \in x\}]$.

3. Existe un buen orden R en a tal que $(\forall x \in a)[x = \{y \in a : yRx\}]$.

4. $\subset_a = \{\langle x, y\rangle \in a^2 : x \subset y\}$ es un buen orden en a y $(\forall x \in a)[x = \{y \in a : y \subset x\}]$.

Ordenación de los ordinales

Ejercicio 103.– Demostrar que si $\alpha < \beta$, entonces $\alpha^+ < \beta^+$.

Ejercicio 104.– Sean a y b dos conjuntos de ordinales. Demostrar que si

$$(\forall \alpha \in a)(\exists \beta \in b)[\alpha < \beta],$$

entonces $\bigcup a \in \bigcup b$ ó $\bigcup a = \bigcup b$.

Clases bien ordenadas y ordinales

El axioma de reemplazamiento

Ejercicio 105.– Sean a y b conjuntos. Demostrar, usando el axioma de reemplazamiento, que las siguientes clases son conjuntos:

1. $\{\{\{c\}\} : c \in a \cup b\}$

2. $\{a \cup c : c \in b\}$

3. $\{\mathbf{P}(c) : c \in a\}$

4. $\{c \cup d : c \in a \wedge d \in b\}$

Ejercicio 106.– Demostrar que si F es una aplicación, entonces F es un conjunto syss $\mathrm{dom}(F)$ es un conjunto.

Ejercicio 107.– Sea F una aplicación. Demostrar o refutar:

1. Si x es un conjunto, entonces $F^{-1}[x]$ es un conjunto.

2. Si x es un conjunto y F es inyectiva, entonces $F^{-1}[x]$ es un conjunto.

Ejercicio 108.– Demostrar la existencia del producto cartesiano $a \times b$ de dos conjuntos a y b sin usar el axioma del conjunto de las partes y usando el axioma de reemplazamiento.

Clases bien ordenadas y ordinales

Ejercicio 109.– Demostrar que si $\langle a, <\rangle$ es un conjunto bien ordenado y $a \neq \emptyset$, entonces

$$t.o.(\langle a, z\rangle) = \{t.o.(\langle a_x, <\rangle) : x \in a\}$$

Ejercicio 110.– Sea $a = \{x, y, z\}$ y $<$ el orden definido por $x < y < z$. Calcular, aplicando el ejercicio anterior, el tipo ordinal de $\langle a, <\rangle$.

Ejercicio 111.– Sea R la relación definida en $\mathbb{Z}$ por

$$xRy \leftrightarrow |x| < |y| \vee (|x| = |y| \wedge x < y)$$

1. Demostrar que R es un buen orden en $\mathbb{Z}$.
2. Calcular $t.o.(\langle \mathbb{Z}_3, R\rangle)$.
3. Calcular $t.o.(\langle \mathbb{Z}_x, R\rangle)$.

Ejercicio 112.– Sea R la relación definida en $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ por

$$\langle x, y\rangle R\langle x', y'\rangle \leftrightarrow x + y < x' + y' \vee (x + y = x' + y' \wedge x < x')$$

1. Demostrar que R es un buen orden en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
2. Calcular $t.o.(\langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{\langle 1,2\rangle}, R\rangle)$.
3. Calcular $t.o.(\langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{\langle x,y\rangle}, R\rangle)$.

Ejercicio 113.– Sea R la relación definida en $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ por

$$\langle x, y\rangle R\langle x,' \rangle y' \leftrightarrow \begin{cases} max(x, y) < max(x', y') \\ \vee \\ (max(x, y) = max(x', y') \wedge x < x') \\ \vee \\ (max(x, y) = max(x', y') \wedge x = x' \wedge y < y') \end{cases}$$

1. Demostrar que R es un buen orden en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
2. Calcular $t.o.(\langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{\langle 1,2\rangle}, R\rangle)$.
3. Calcular $t.o.(\langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{\langle 0,y\rangle}, R\rangle)$.
4. Calcular $t.o.(\langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{\langle x,y\rangle}, R\rangle)$.

Ordinales finitos

Ordinales sucesores y límites

Ejercicio 114.– Sea $\langle a, <\rangle$ un conujunto bien ordenado no vacío y $\alpha = t.o.(\langle a, <\rangle)$. Demostrar:

1. Si a no tiene elemento maxiomal, entonces α es límite.
2. ¿Es cierto el recíproco?.

Ejercicio 115.– Sea a un conjunto no vacío de ordinales. Demostrar o refutar:

1. Si los elementos de a son límites, entonces $\bigcup a$ es límite.
2. Si los elementos de a son sucesores, entonces $\bigcup a$ es sucesor.

Ejercicio 116.– Demostrar que si α es límite y $\beta < \alpha$, existe $\ggg$ tal que $\beta <\ggg< \alpha$.

Ejercicio 117.– Demostrar que

$$\bigcup \alpha = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha = 0; \\ \beta, & \text{si } \alpha = \beta + 1; \\ \alpha, & \text{si } \alpha \text{ es límite.} \end{cases}$$

El axioma del infinito

Ejercicio 118.– Sea a un conjunto inductivo. Demostrar que los siguientes conjuntos son inductivos:

1. $\{x \in a : x \text{ transitivo}\}$
2. $\{x \in a : x \text{ transitivo} \wedge x \notin x\}$
3. $\{x \in a : x = 0 \vee (x \text{ sucesor})\}$

Ejercicio 119.– Sea α un ordinal. Demostrar que α es límite syss α es inductivo.

Ejercicio 120.– Sea a un conjunto no vacío. Demostrar que si los elementos de a son inductivos, entonces $\bigcap a$ es inductivo.

Ejercicio 121.– Demostrar que si a es inductivo, entonces $a \cap \mathbf{Ord}$ es inductivo.

Propiedades de los números naturales

Ejercicio 122.– Demostrar que $\mathbf{P}(\omega)$ no es un ordinal.

Ejercicio 123.– ¿Es cierto que si a es inductivo, entonces $\mathbf{P}(a)$ es inductivo?.

Ejercicio 124.– Sean R y S las relaciones sobre $2 \times \omega$ definidas por

$$\begin{array}{l} \langle x, y\rangle R\langle x', y'\rangle \leftrightarrow x + y < x' + y' \vee (x + y = x' + y' \wedge x < x') \\ \langle x, y\rangle S\langle x', y'\rangle \leftrightarrow x < x' \vee (x = x' \wedge y < y') \end{array}$$

Demostrar:

1. $t.o.(\langle 2 \times \omega, R\rangle) = \omega$
2. $t.o.(\langle 2 \times \omega, S\rangle)$ es un ordinal límite.
3. $t.o.(\langle 2 \times \omega, S\rangle) > \omega$.

Ejercicio 125.– Demostrar que si $a \subseteq \omega$ es no vacío y acotado superiormente, entonces a tiene un elemento máximo.

Ejercicio 126.– Demostrar que un ordinal α es un número natural syss todo subconjunto no vacío de α tiene máximo.

Teoremas de inducción y recursión

Teoremas de inducción

Ejercicio 127.– Demostrar que si a es un conjunto y $G : V \times V \to V$, entonces existe una única $f : \omega \to V$ tal que

$$\begin{array}{l} f(0) = a \\ (\forall n)[f(n + 1) = G(f(n), n)] \end{array}$$

Ejercicio 128.– Demostrar que si a es un conjunto y $G, H : V \to V$, entonces existe una única $F : \mathbf{Ord} \to V$ tal que

$$F(\alpha) = \begin{cases} a, & \text{si } \alpha = 0; \\ G(F(\beta)), & \text{si } \alpha = \beta + 1; \\ H(F(\alpha)), & \text{si } \alpha \text{ es límite} \end{cases}$$

Ejercicio 129.– Demostrar que si $G : V \times V \to V$, entonces existe una única $F : V \times \mathbf{Ord} \to V$ tal que

$$(\forall a)(\forall \alpha)[F(\alpha) = G(a, F_a \restriction \alpha)],$$

donde $F_a : V \to V$ está definida por $F_a(b) = F(a,b)$.

Ejercicio 130.– Dar un ejemplo de un conjunto inductivo que no sea un ordinal.

Ejercicio 131.– Sea a un conjunto, $G : V \to V$ y $f : \omega \to V$ definida por

$$\begin{array}{l} f(0) = a \\ (\forall n)[f(n+1) = G(f(n))] \end{array}$$

Demostrar que si G es inyectiva y $a \notin \text{rango}(G)$, entonces f es inyectiva.

Ejercicio 132.– Demostrar que si a es un conjunto y $G : V \to V$, entonces existe una única $f : \omega \to V$ tal que

$$\begin{array}{l} f(0) = a \\ (\forall n)[f(n+1) = G(f(n))] \end{array}$$

Ejercicio 133.– Demostrar que si $H : V \to V$ y $G : V \times V \times V \to V$ entonces existe una única $F : V \times \omega \to V$ tal que

$$\begin{array}{l} (\forall a)[F(a,0) = H(a)] \\ (\forall a)(\forall n)[F(a,n+1) = G(a,F(a,n),n)] \end{array}$$

Ejercicio 134.– Demostrar que si $h : a \to b$ y $g : a \times b \times \omega \to b$ entonces existe una única $F : a \times \omega \to b$ tal que

$$\begin{array}{l} (\forall x \in a)[f(x,0) = h(x)] \\ (\forall x \in a)(\forall n)[f(x,n+1) = g(x,f(x,n),n)] \end{array}$$

Ejercicio 135.– Demostrar que existe una única $+ : \omega \times \omega \to \omega$ tal que

$$\begin{array}{l} (\forall m)[+(m,0) = m] \\ (\forall m)(\forall n)[+(m,n+1) = +(m,n)+1] \end{array}$$

Ejercicio 136.– Demostrar que existe una única $\cdot : \omega \times \omega \to \omega$ tal que

$$\begin{array}{l} (\forall m)[\cdot(m,0) = 0] \\ (\forall m)(\forall n)[\cdot(m,n+1) = \cdot(m,n)+m] \end{array}$$

Ejercicio 137.– (La función factorial) Demostrar que existe una única $f : \omega \to \omega$ tal que

$$\begin{array}{l} f(0) = 1 \\ (\forall n)[f(n+1) = (n+1)f(n)] \end{array}$$

Ejercicio 138.– (La función de Fibonacci) Demostrar que existe una única $f : \omega \to \omega$ tal que

$$\begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f(1) = 1 \\ (\forall n)[f(n+2) = f(n) + f(n+1)] \end{array}$$

Ejercicio 139.– Demostrar que las siguientes clases son conjuntos:

1. $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots\}$
2. $\{\emptyset, \mathbf{P}(\emptyset), \mathbf{P}(\mathbf{P}(\emptyset)), \dots\}$
3. $\{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega^+, \omega^{++}, \dots\}$

Aritmética ordinal

Funciones normales

Ejercicio 140.– Determinar cuáles de las siguientes funciones $F_i : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ son normales:

1. $F_1(\alpha) = \alpha + 1$
2. $F_2(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } \alpha < \omega; \\ \omega, & \text{si } \omega \geq \omega. \end{cases}$
3. $F_3(\alpha) = \begin{cases} \alpha + 1, & \text{si } \alpha \text{ no es límite;} \\ \alpha, & \text{si } \alpha \text{ es límite.} \end{cases}$
4. $F_4(\alpha) = \bigcup \alpha$

Ejercicio 141.– Demostrar que si F es una función normal, entonces $\{\alpha : F(\alpha) = \alpha\}$ es una clase propia.

Ejercicio 142.– Demostrar que la clase $\{\alpha : \alpha \text{ es límite}\}$ es una clase propia.

Adición de ordinales

Ejercicio 143.– Simplificar la expresión $(\omega + 1) + \omega$.

Ejercicio 144.– Demostrar que si $\alpha + \beta = \gamma$, entonces $\alpha \leq \gamma$ y $\beta \leq \gamma$.

Ejercicio 145.– ¿Existe algún ordinal α tal que $\alpha + \omega = \alpha^+$?.

Ejercicio 146.– Determinar los ordinales $\alpha + \beta + \gamma$ cuando $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{1, 2, \omega\}$.

Ejercicio 147.– En cada caso, dar tres ordinales α, β y γ de modo que al formar todas las posibles sumas $\alpha' + \beta' + \gamma'$ con $\{\alpha', \beta', \gamma'\} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ nos dé exactamente 1, 2, 3, 4 ó 5 valores distintos.

Ejercicio 148.– Calcular todas las sumas $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ siendo $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = \{1, 2, 4, 5, \omega\}$.

Ejercicio 149.– Dar ejemplos de ordinales $\alpha < \beta$ tales que

1. $\alpha + \beta < \beta + \alpha$
2. $\beta + \alpha < \alpha + \beta$

Ejercicio 150.– Determinar una permutación de los ordinales $1, 2, \omega$ tal que su suma sea:

1. ω
2. $\omega + 1$
3. $\omega + 2$
4. $\omega + 3$

Ejercicio 151.– Sea $\mathbf{Ord}^{<\omega} = \bigcup\{Ord^n : n \in \omega\}$, donde Ord^n es el conjunto de las aplicaciones de n en $\mathbf{Ord}$.

1. Demostrar que $\mathbf{Ord}^{<\omega}$ es una clase propia.
2. Sobre $\mathbf{Ord}^{<\omega}$ definimos la siguiente relación, $\lhd$. Sea $s, t \in \mathbf{Ord}^{<\omega}$

$$s \lhd t \leftrightarrow \begin{cases} sup(rang(s)) < sup(rang(t)) \\ \vee \\ (sup(rang(s)) = sup(rang(t)) \wedge dom(s) < dom(t)) \\ \vee \\ \begin{cases} (sup(rang(s)) = sup(rang(t)) \wedge \ dom(s) = dom(t) \\ \wedge \\ (\exists k \in dom(s))[s \restriction k = t \restriction k \wedge s(k) < t(k)]) \end{cases} \end{cases}$$

   Probar que:

   (a) Para todo $t \in \mathbf{Ord}^{<\omega}$, $\{s \in \mathbf{Ord}^{<\omega} : s \lhd t\}$ es un conjunto.

(b) $\lhd$ es un buen orden sobre $\mathbf{Ord}^{<\omega}$.

(c) Existe un único isomorfismo $F : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}^{<\omega}$.

(d) Calcular $F(0)$, $F(\omega)$ y $F(\omega + \omega)$.

Ejercicio 152.– Encontrar un conjunto $A \subseteq \mathbb{Q}$ tal que el tipo ordinal de $\langle A, <_{\mathbb{Q}} \rangle$ sea:

1. $\omega + 1$
2. $\omega + n$, con $n > 0$
3. $\omega + \omega$

Ejercicio 153.– Sea $n < \omega$. Calcular el menor α tal que $n + \alpha = \alpha$ (es decir, el menor punto fijo de $F_n(\xi) = n + \xi$).

Ejercicio 154.– Probar que para cada α existe un único ordinal β y un único $n \in \omega$ tales que $\alpha = \beta + n$ y $\beta = 0$ ó β es límite.

Ejercicio 155.– Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Ord}$ con $\beta \neq 0$. Demostrar que $\alpha + \beta$ es límite syss β es límite.

Ejercicio 156.– Demostrar que si α es límite y $n \in \omega$, entonces $n + \alpha = \alpha$.

Multiplicación de ordinales

Ejercicio 157.– Determinar una permutación de los ordinales $\omega, \omega + 1$ y $\omega.2 + 1$ tales que su suma sea:

1. $\omega.4$
2. $\omega.4 + 1$.

Ejercicio 158.– Simplificar:

1. $2.\omega$
2. $(\omega.3 + 2) + (\omega + 1)$.

Ejercicio 159.– Calcular todas las sumas posibles de los siguientes ordinales (incluyendo en cada caso todos los sumandos):

1. $\omega.2, \omega.2 + 1$

2. $\omega.2, \omega.2+1, \omega.4$
3. $1, \omega, \omega.2$

Ejercicio 160.– Demostrar que si $m > 0$, entonces $n + \omega.m = \omega.m$.

Ejercicio 161.– Demostrar que para todo α, $\alpha + 1 + \alpha = 1 + \alpha.2$.

Ejercicio 162.– Sea $n \in \omega$. Calcular el menor α tal que $n.\alpha = \alpha$.

Ejercicio 163.– Encontrar un conjunto $A \subseteq \mathbb{Q}$ tal que el tipo ordinal de $\langle A, <_{\mathbb{Q}} \rangle$ sea:

1. $\omega.2$
2. $\omega.3$
3. $\omega.\omega$

Ejercicio 164.– Determinar si la función $F : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ definida por $F(\alpha) = \alpha.2$ es creciente, continua o normal.

Ejercicio 165.– Demostrar que si $m > 0$, entonces $n + \omega.m = \omega.m$.

Ejercicio 166.– Sean $m, n_1, n_2 \in \omega$. Calcular:

1. $(\omega.n_1 + n_2)m$
2. $m(\omega.n_1 + n_2)$
3. $(\omega.n_1 + n_2)\omega$
4. $\omega(\omega.n_1 + n_2)$

Ejercicio 167.– Demostrar que $\alpha.\beta = 0$ syss $\alpha = 0$ ó $\beta = 0$.

Ejercicio 168.– Demostrar que si $\alpha < \beta$ y γ es sucesor, entonces $\alpha\gamma < \beta\gamma$.

Ejercicio 169.– Demostrar que si $\alpha > 1$ y $\beta > 1$, entonces $\alpha + \beta \leq \alpha\beta$.

Ejercicio 170.– Demostrar que $\alpha\beta = sup\{\alpha\gamma + \alpha : \gamma < \beta\}$.

Sustracción y división de ordinales

Ejercicio 171.– En cada caso, hallar el cociente y el resto de dividir α por β:

1. $\alpha = \omega + 4, \beta = \omega$

2. $\alpha = \omega.3 + 2, \beta = \omega + 1$

3. $\alpha = \omega^\omega, \beta = \omega$

4. $\alpha = \omega^2 + \omega.5 + 3, \beta = \omega^2 + 1$

5. $\alpha = \omega^\omega + \omega^3 + \omega.3 + 2, \beta = \omega^5$

6. $\alpha = \omega^5, \beta = \omega^\omega + \omega^3 + \omega.3 + 2$

Ejercicio 172.– Para cada $n \in \omega$, se definen

$$A_n = \{\alpha : n + \alpha = \alpha\} \qquad A'_n = \{\alpha : n.\alpha = \alpha\}$$

Demostrar:

1. Si $n = 0$, entonces $A_n = \mathbf{Ord}$.
2. Si $n \neq 0$, entonces $A_n = \mathbf{Ord} - \omega$.
3. Si $n = 0$, entonces $A'_n = 1$.
4. Si $n \neq 0$, entonces $A'_n = \{\omega.\beta : \beta > 0\}$.

Ejercicio 173.– Demostrar que si α es límite y $m \neq 0$, entonces $m(\alpha+n) = \alpha + mn$

Ejercicio 174.– Demostrar que si $\alpha > 0$ y β es límite, entonces $(\alpha+1)\beta = \alpha\beta$.

Exponenciación ordinal

Ejercicio 175.– Determinar todos los ordinales $\alpha.\beta.\gamma$ tales que $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{3, \omega, \omega.2\}$.

Ejercicio 176.– Determinar si las siguientes funciones $F_i : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ son continuas o crecientes:

1. $F_1(\alpha) = \alpha^2$
2. $F_2(\alpha) = \omega^\alpha + \omega$

Ejercicio 177.– Demostrar que si $n > 1$, entonces $n^\omega = \omega$.

Ejercicio 178.– Demostrar o refutar:

1. $(\forall\alpha)(\forall\beta)(\forall\gamma)[\alpha^\beta = \alpha^\gamma \to \beta = \gamma]$

2. $(\forall\alpha)(\forall\beta)(\forall\gamma)[\alpha < \beta \to \alpha^\gamma < \beta^\gamma]$

Ejercicio 179.– Demostrar:

1. Si $\alpha > 1$ y β es límite, entonces α^β es límite.
2. Si α es límite y $\beta > 0$, entonces α^β es límite.

Ejercicio 180.– Demostrar que si $\alpha > 1$, entonces $\beta \leq \alpha^\beta$.

Ejercicio 181.– Sean α y β dos ordinales tales que $\alpha < \beta$. Demostrar:

1. $\omega^\alpha + \omega^\beta = \omega^\beta$.
2. Si $m > 0$, entonces $\omega^\alpha n + \omega^\beta m = \omega^\beta m$.

Ejercicio 182.– Simplificar:

1. $\omega + (\omega^2 + 1)$
2. $(\omega^2 + \omega.2 + 2) + (\omega + 1)$
3. $(\omega^7 + \omega^5 + \omega^3.2 + \omega.10 + 3) + (\omega^4 + \omega^2.2 + 2)$

Ejercicio 183.– Determinar una permutación de los ordinales ω, $\omega.2 + 1$, $\omega.5$ y ω^2 tal que su suma sea:

1. $\omega^2 + \omega.5$
2. $\omega^2 + \omega.10 + 1$
3. $\omega^2 + \omega.5 + 1$
4. $\omega^2 + \omega.11 + 1$
5. $\omega^2 + \omega.9$
6. $\omega^2 + \omega.11$

Ejercicio 184.– Calcular todas las sumas $\alpha+\beta+\gamma+\delta$, siendo $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} = \{\omega + 2, \omega.2 + 1, \omega.4, \omega^2\}$

Ejercicio 185.– Probar que:

1. Si $n > 0$, entonces $(\omega^3 + \omega)n = \omega^3 n + \omega$

2. $(\omega^3 + \omega)\omega = \omega^4$

Ejercicio 186.– Encontrar:

1. el menor α tal que $\omega + \alpha = \alpha$;

2. el menor $\alpha > \omega$ tal que $(\forall \beta < \alpha)[\beta + \alpha = \alpha]$

Ejercicio 187.– Dadas las funciones

$$\begin{array}{lll} F : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord} & \text{tal que} & F(\alpha) = \alpha^2 \\ G : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord} & \text{tal que} & G(\alpha) = 2^\alpha \end{array}$$

1. Determinar si son continuas, crecientes o normales.

2. Calcular el menor punto fijo de cada una.

Forma normal de Cantor

Ejercicio 188.– Sean $k \in \omega$, $\gamma_o, \dots, \gamma_k \in \mathbf{Ord}$ y $n_0, \dots, n_k \in \omega$ tales que $\gamma_0 > \dots > \gamma_k$ y $(\forall i \leq k)[n_i > 0]$. Demostrar:

1. Si $n > 0$, entonces $(\omega^{\gamma_0} n_0 + \dots + \omega^{\gamma_k} n_k)n = \omega^{\gamma_0} n_0 n + \omega^{\gamma_1} n_1 n \cdots + \omega^{\gamma_k} n_k$

2. Si $\gamma > 0$, entonces $(\omega^{\gamma_0} n_0 + \dots + \omega^{\gamma_k} n_k)\omega^\gamma = \omega^{\gamma_0 + \gamma}$

Ejercicio 189.– Hallar tres ordinales tales que al formar los productos de todas sus permutaciones se obtengan 6 valores distintos.

Ejercicio 190.– Expresar los siguientes ordinales en la forma normal de Cantor:

1. $(\omega + 1)^2$

2. $(\omega + 1)(\omega^2 + 1)$

3. $(\omega^2 + 1)(\omega + 1)$

4. $(\omega^3 + \omega)^5$

5. $(\omega^5 + \omega^3)^3$

6. $(\omega^3.4 + \omega^2.5 + 2)^2 + \omega^5 + 3$

Ejercicio 191.– Demostrar o refutar:

1. $(\forall\alpha)[\alpha < \omega^2 \to \alpha + \omega^2 = \omega^2]$.
2. $(\forall\alpha)[\alpha < \omega^2 + 1 \to \alpha + \omega^2 + 1 = \omega^2 + 1]$.

Ejercicio 192.– Encontrar:

1. el menor α tal que $\omega\alpha = \alpha$;
2. el menor $\alpha > \omega$ tal que $(\forall\beta < \alpha)[\beta\alpha = \alpha]$

Ejercicio 193.– Demostrar que dados tres ordinales cualesquiera, el número de sumas de todas sus permutaciones es menor que 6.

Ejercicio 194.– Determinar todos los ordinales α tales que $\omega \leq \alpha < \omega^3$ y $\alpha = \beta^2$ para algún β.

Ejercicio 195.– Sea $\langle A, < \rangle$ una clase bien ordenada. Una función inyectiva $F : A \times A \to A$ es monótona sobre A si:

$$\begin{array}{l} a < a' \to (\forall b \in A)[(F(a,b) < F(a',b)] \\ b < b' \to (\forall a \in A)[(F(a,b) < F(a,b')] \end{array}$$

1. Sea $f : \omega \times \omega \to \omega$ la aplicación definida por:

   $$f(n,m) = \binom{n+m+1}{2} + n$$

   Probar que:

   (a) f es biyectiva.

   (b) f es monótona sobre ω.
2. Probar que no existe ninguna aplicación monótona sobre $\omega.2$.
3. Definir una aplicación monótona sobre ω^2. (Usar la aplicación del apartado (1)).
4. Sea F una función monótona sobre **Ord**. Diremos que $\ggg$ es un punto crítico para F si $F[\gamma \times \gamma] \subseteq \gamma$. Probar que si γ es un punto crítico para F, entonces existe ξ tal que $\gamma = \omega^\xi$.
5. Probar que existe una función monótona sobre **Ord** tal que todo ordinal de la forma ω^ξ es un punto crítico.

Ejercicio 196.– Sea $f : \omega \times \omega \to \omega$ la aplicación definida por:

$$f(n,m) = \begin{cases} 0, & \text{si } (n,m) = (0,0); \\ \begin{pmatrix} n+m+1 \\ 2 \end{pmatrix} + n, & \text{si } (n,m) \neq (0,0). \end{cases}$$

1. Probar que f es biyectiva.

2. Probar que existen aplicaciones suprayectivas $g, h : \omega \to \omega$ tales que:

   (a) $f(g(n), h(n)) = n$.

   (b) $g(n) \leq n$.

   (c) $h(n) \leq n$.

3. Sea $\omega^{<\omega} = \bigcup\{\omega^n : \ n \in \omega\}$. Definimos por recursión $F : \omega \to \omega^{<\omega}$

   $F(0) = id_\omega$
   $F(n+1) : \omega^{n+2} \to \omega$ es la aplicación definida por
   $$F(n+1)(g) = \begin{cases} f(F(n)(g \restriction (n+1), g(n+1)), & \text{si } F(n) : \omega^{n+1} \to \omega \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

   Probar que para todo $n > 0$, $F(n)$ es una aplicación biyectiva de ω^{n+1} en ω.

4. Definimos $F' : \omega^{n+1} \times \omega^{n+1} \to \omega^{n+1}$ como sigue: Si $g, h \in \omega^{n+1}$, entonces $F'(g,h)$ es la aplicación de $n+1$ en ω definida por

   $$F'(g,h)(m) = f(g(m), h(m)).$$

   Probar que F' es biyectiva.

5. Definimos $F^* : \omega^\omega \times \omega^\omega \to \omega^\omega$ como sigue: Si $g, h \in \omega^\omega$, $F^*(g,h)$ es la aplicación de ω en ω definida por:

   $$F^*(g,h)(m) = f(g(m), h(m)).$$

   Probar que F^* es biyectiva.

6. Definimos $G : \omega^{<\omega} - \{0\} \to \omega$ como sigue: Si $g \in \omega^{<\omega} - \{0\}$ (por tanto, ($g \in \omega^{n+1}$) para algún $n \in \omega$), entonces

   $$G(g) = f(n, F(n)(g)).$$

   Probar que G es biyectiva.

7. Sea $G' : \omega^{<\omega} \to \omega$ la aplicación definida por:

$$G'(g) = \begin{cases} 0, & \text{si } g = \emptyset \\ G(g) + 1, & \text{si } g \neq \emptyset \end{cases}$$

   Probar que G' es biyectiva.

8. Definimos $F'' : \omega^\omega \to (\omega^\omega)^\omega$ como sigue: Si $g \in \omega^\omega$, entonces $F''(g) : \omega \to \omega^\omega$ está definida por:

$$F''(g)(n)(m) = g(f(n, m))$$

   Probar que F'' es biyectiva.

Ejercicio 197.– Sea $F : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ la aplicación definida por $F(\alpha) = \omega.\alpha$ y $A = \{\alpha : F(\alpha) = \alpha\}$.

1. Calcular $\bigcup A$ y demostrar que A es una clase propia.
2. Demostrar que existe un único isomorfismo $G : \langle \mathbf{Ord}, \in \rangle \cong \langle A, \in \rangle$.
3. Calcular $G(0)$, $G(1)$, $G(2)$ y $G(\omega)$.

Aritmética ordinal y conjuntos bien ordenados

Ejercicio 198.– Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Ord}$. Consideremos el conjunto

$$a = (\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\})$$

y la relación R en a definida por

$$\langle \gamma_1, \delta_1 \rangle R \langle \gamma_2, \delta_2 \rangle \leftrightarrow \delta_1 < \delta_2 \vee (\delta_1 = \delta_2 \wedge \gamma_1 < \gamma_2)$$

Demostrar:

1. $\langle a, R \rangle$ es un conjunto bien ordenado.
2. $t.o.(\langle a, R \rangle) = \alpha + \beta$.

Ejercicio 199.– Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Ord}$. Consideremos el conjunto

$$a = \alpha \times \beta$$

y la relación R en a definida por

$$\langle \gamma_1, \delta_1 \rangle R \langle \gamma_2, \delta_2 \rangle \leftrightarrow \delta_1 < \delta_2 \vee (\delta_1 = \delta_2 \wedge \gamma_1 < \gamma_2)$$

Demostrar:

1. $\langle a, R\rangle$ es un conjunto bien ordenado.
2. $t.o.(\langle a, R\rangle) = \alpha\beta$.

Ejercicio 200.– Sea

$$a = \{f : (f : \omega \to \omega) \wedge (\{n \in \omega : f(n) \neq 0\} \text{ es finito})\}$$

y la relación R en a definida por

$$fRg \leftrightarrow f \neq g \wedge f(n) < g(n),$$

donde $n = sup\{m : f(m) \neq g(m)\}$. Demostrar:

1. $\langle \omega, R\rangle$ es un conjunto bien ordenado.
2. Sea $f \in a$ la aplicación definida por

   $$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 2; \\ 0, & \text{si } n \neq 2. \end{cases}$$

   Calcular el tipo de orden de la sección determinada por f.
3. Calcular el tipo de orden de $\langle a, R\rangle$.

Ejercicio 201.– Sean $\alpha, \beta \in$ **Ord**. Consideremos el conjunto

$$a = \{f : (f : \beta \to \alpha) \wedge (\{\delta \in \beta : f(\delta) \neq 0\} \text{ es finito})\}$$

y la relación R en a definida por

$$fRg \leftrightarrow (\exists\gamma)[\gamma = sup\{\delta \in \beta : f(\delta) \neq g(\delta)\} \wedge f(\gamma) < g(\gamma)]$$

Demostrar:

1. $\langle a, R\rangle$ es un conjunto bien ordenado.
2. $t.o.(\langle a, R\rangle) = \alpha^{\beta}$.

Capítulo 3

Cardinales

Ejercicio 202.– Demostrar que si $x \sim y$, entonces $\mathbf{P}(x) \sim \mathbf{P}(y)$.

Ejercicio 203.– Demostrar o refutar

$$y \subseteq x \wedge z \subseteq x \wedge y \sim z \rightarrow x - y \sim x - z.$$

Ejercicio 204.– Demostrar, definiendo una biyección, que son equipotentes:

1. $[0,1]$ y $(0,1)$.
2. $[0,1]$ y $[0,1)$.
3. $[0,1)$ y $(0,1]$.

Ejercicio 205.– Demostrar que los intervalos $[0,1]$, $(0,1)$,$[0,1)$ y $(0,1]$ son equipotentes.

Ejercicio 206.– Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Demostrar que los intervalos $[a,b]$, (a,b),$[a,b)$ y $(a,b]$ son equipotentes.

Ejercicio 207.– Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $c < d$. Demostrar que $[a,b] \sim [c,d]$.

Ejercicio 208.– Demostrar, definiendo biyecciones que transformen racionales en racionales e irracionales en irracionales, que:

1. $[0,1) \sim [0,+\infty)$.
2. $(-1,0] \sim (-\infty,0]$.
3. $(-1,1) \sim \mathbb{R}$.

Ejercicio 209.– Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Demostrar que $[a, b] \sim \mathbb{R}$.

Ejercicio 210.– Demostrar que $(0, 1) \sim {}^{\omega}2$.

Ejercicio 211.– Definir una aplicación biyectiva de $[0, 1)^2$ en $[0, 1)$.

Ejercicio 212.– Demostrar que $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$.

Ejercicio 213.– Sea $a \subseteq \mathbb{R}^2$. Demostrar que si a es numerable, entonces $\mathbb{R}^2 - a \sim \mathbb{R}$.

Ejercicio 214.– Sea $a \subseteq \mathbb{R}$. Demostrar que si a es numerable, entonces $\mathbb{R} - a \sim \mathbb{R}$.

Ejercicio 215.– Calcular los cardinales de los siguientes conjuntos:

1. $\mathbb{R}$
2. $\mathbb{R}^n$
3. $\mathbb{C}$
4. El conjunto de las sucesiones infinitas de números naturales.
5. El conjunto de las sucesiones infinitas de números reales.
6. $\mathbb{Z}[X]$.
7. El conjunto de los números algebraicos.
8. El conjunto de los números transcendentes.
9. El conjunto de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ continuas.
10. El conjunto de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
11. $\{\alpha : |\alpha| < \aleph_0\}$.
12. $\{\alpha : |\alpha| \leq \aleph_0\}$.
13. $\{\alpha : |\alpha| = \aleph_0\}$.
14. $\{\beta : |\beta| = \aleph_\alpha\}$.

Ejercicio 216.– Demostrar que si $|a| \geq \aleph_0$, $b \subseteq a$ y $|b| < |a|$, entonces $|a - b| = |a|$.

Ejercicio 217.– Calcular el cardinal del conjunto de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ discontinuas.

Ejercicio 218.– Demostrar que todo cardinal infinito es primo (es decir, no es el producto de dos cardinales primos menores).

Ejercicio 219.– Demostrar que si $|\alpha| \leq \beta \leq \alpha$, entonces $|\beta| = |\alpha|$.

Ejercicio 220.– Demostrar que $(\forall\alpha)[\aleph_\alpha \geq \alpha]$.

Ejercicio 221.– Demostrar que si f es una función y a es un conjunto, entonces $|f[a]| \leq |a|$.

Ejercicio 222.– Demostrar que si α y β son dos ordinales tales que $|\alpha| \leq \aleph_\gamma$ y $|\beta| \leq \aleph_\gamma$, entonces $|\alpha + \beta| \leq \aleph_\gamma$, $|\alpha.\beta| \leq \aleph_\gamma$ y $|\alpha^\beta| \leq \aleph_\gamma$ (donde $\alpha + \beta$, $\alpha.\beta$ y α^β son operaciones *ordinales*).

Ejercicio 223.– Calcular $cf(\omega + 3)$, $cf(\omega.3)$ y $cf(\omega^3)$.

Ejercicio 224.– Demostrar que $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$.

Ejercicio 225.– Calcular, utilizando la HGC, $\aleph_0^{\aleph_1}$, $\aleph_1^{\aleph_0}$, $\aleph_\omega^{\aleph_1}$.

Ejercicio 226.– Demostrar que si $\alpha < \aleph_1$ es límite, entonces $cf(\aleph_\alpha) = \aleph_0$.

Ejercicio 227.– Demostrar que si $n < \omega$, entonces $\aleph_n^{\aleph_\beta} = \aleph_n 2^{\aleph_\beta}$.

Ejercicio 228.– Demostrar que $\aleph_\omega^{\aleph_1} = \aleph_\omega^{\aleph_0} 2^{\aleph_1}$.

Ejercicio 229.– Demostrar que si $\alpha < \aleph_1$, entonces $\aleph_\alpha^{\aleph_1} = \aleph_\alpha^{\aleph_0} 2^{\aleph_1}$.

Ejercicio 230.– Un cardinal $\aleph_\alpha$ es límite fuerte si $(\forall\beta < \alpha)[2^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha]$. Demostrar:

1. Si $\aleph_\alpha$ es límite fuerte, entonces $\aleph_\alpha$ es un cardinal límite.

2. Con la hipótesis generalizada del continuo, los cardinales límites son límites fuertes.

3. Si $\aleph_\alpha$ es límite fuerte, entonces $(\forall\beta, \gamma < \alpha)[\aleph_\beta^{\aleph_\gamma} < \aleph_\alpha]$.

Capítulo 4

El axioma de elección

Ejercicio 231.– Demostrar que son equivalentes:

1. El axioma de elección.
2. Para cada familia $(a_i)_{i \in I}$ de conjuntos no vacíos, el producto cartesiano $\prod_{i \in I} a_i$ es no vacío.

Ejercicio 232.– Demostrar que son equivalentes:

1. El axioma de elección.
2. Para cada conjunto a de conjuntos no vacíos disjuntos dos a dos, existe un conjunto b que tiene uno y sólo un elemento en común con cada elemento de a.

Ejercicio 233.– Demostrar que son equivalentes:

1. El axioma de elección.
2. Toda relación binaria contiene una aplicación con el mismo dominio.

Ejercicio 234.– Demostrar que son equivalentes:

1. El axioma de elección.
2. (Lema de Zorn) Si $\langle x, < \rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado tal que

   $$(\forall y \subseteq x)[\langle y, < \rangle \text{ totalmente ordenado } \implies y \text{ tiene cota superior}]$$

   entonces x tiene un elemento maximal.