Ejercicios de “Teoría de conjuntos”

José A. Alonso Jiménez
Mario J. Pérez Jiménez
Sevilla, Octubre de 1992

Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Contenido

1 Conjuntos y clases **4**

1.1 El lenguaje de la teoría de conjuntos 4

1.2 Axiomas de Zermelo–Fraenkel (I) 4

2 Relaciones y funciones **10**

2.1 Par ordenado y conjunto cartesiano 10

2.2 Relaciones 12

2.3 Aplicaciones 12

3 Clases bien ordenadas **14**

4 La clase de los ordinales **18**

4.1 Conjuntos transitivos 18

4.2 La clase de los números ordinales 18

4.3 Ordenación de los ordinales 19

5 Clases bien ordenadas y ordinales **20**

5.1 El axioma de reemplazamiento 20

5.2 Clases bien ordenadas y ordinales 21

6 Ordinales finitos **22**

6.1 Ordinales sucesores y límites 22

6.2 El axioma del infinito 22

6.3 Propiedades de los números naturales 23

7 Teoremas de inducción y recursión 24
7.1 Teoremas de inducción 24
7.2 Teoremas de recursión 24

8 Aritmética ordinal 27
8.1 Funciones normales 27
8.2 Adición de ordinales 27
8.3 Multiplicación de ordinales 29
8.4 Sustracción y división de ordinales 30
8.5 Exponenciación ordinal 31
8.6 Forma normal de Cantor 33
8.7 Aritmética ordinal y conjuntos bien ordenados 36

9 El teorema del buen orden y el axioma de elección 38

10 Conjuntos finitos y numerables 40
10.1 Conjuntos finitos 40
10.2 Conjuntos numerables 40
10.3 Conjuntos no–numerables 40

Capítulo 1

Conjuntos y clases

1.1 El lenguaje de la teoría de conjuntos

1.1.1 Determinar las variables libres de la fórmula $(\forall x)[x \in y \to (\exists y)[y = z]]$.

1.1.2 Demostrar que $\neg(\exists y)(\forall x)[x \in y \leftrightarrow \neg(\exists z)[x \in z \land z \in x]$.

1.1.3 Escribir las fórmulas representadas por las siguientes expresiones:

1. $\bigcap\{x : \varphi(x)\} \subseteq \bigcup\{x : \psi(x)\}$
2. $\{x : \varphi(x)\} \subseteq V$
3. V es una clase propia.

1.1.4 Demostrar que para cualquier clase A, $A \subseteq V$.

1.1.5 Demostrar que $\{x : \neg(\exists z)[x \in z \land z \in x]\}$ es una clase propia.

1.2 Axiomas de Zermelo–Fraenkel (I)

1.2.1 Probar que para cada conjunto x, existe algún y tal que $y \notin x$.

1.2.2 Demostrar que el axioma del conjunto vacío es consecuencia del axioma de separación.

1.2.3 Demostrar que si en el axioma de separación se permite que la variable y ocurra libre en $\varphi(x)$, entonces $(\forall x)[x = \emptyset]$.

1.2.4 Demostrar que si $A \neq \emptyset$, entonces $\bigcap A$ es un conjunto.

1.2.5 Demostrar que $\bigcap \emptyset = V$.

1.2.6 Demostrar que el axioma del par es consecuencia de los axiomas de la unión y de las partes.

1.2.7 Se definen $0 = \emptyset$, $1 = 0 \cup \{0\}$, $2 = 1 \cup \{1\}$, $3 = 2 \cup \{2\}$, $4 = 3 \cup \{3\}$. Probar que $0, 1, 2, 3$ y 4 son conjuntos.

1.2.8 Expresar el conjunto 4 usando sólo los símbolos {, }, $\emptyset$, ,.

1.2.9 Simplificar las siguientes expresiones:

1. $\bigcup 1$.
2. $\bigcup\{\{0,1,2\},\{0,4,5\},\{1,6\}\}$.
3. $\bigcap\{\{0,1,2\},\{0,4,5\},\{1,6\}\}$.

1.2.10 Sea $x = \{\{2,5\},4,\{4\}\}$. Calcular $\bigcap(\bigcup x - 4)$.

1.2.11 Sea $x = \{\{\{1,2\},\{1\}\},\{2\}\}$. Calcular:

$$\bigcup x, \qquad \bigcup\bigcup x, \qquad \bigcap x, \qquad \bigcap\bigcap x, \qquad \bigcap\bigcup x, \qquad \bigcup\bigcap x$$

1.2.12 Sea $x = \{\{1,2\},\{0,2\},\{1,3\}\}$. Calcular:

$$\bigcup x, \qquad \bigcup\bigcup x, \qquad \bigcap x, \qquad \bigcap\bigcap x, \qquad \bigcap\bigcup x, \qquad \bigcup\bigcap x$$

1.2.13 Encontrar dos conjuntos a y b tales que $a \neq b$ y $\bigcup a = \bigcup b$.

1.2.14 Demostrar:

1. $b \in a \to \cap a \subseteq b \subseteq \cup a$.
2. $a \subseteq b \to \cup a \subseteq \cup b$.
3. $(\forall c \in a)[c \subseteq b] \to \cup a \subseteq b$.

1.2.15 Sea $x = \{1,2\}$. Calcular:

$$\bigcup\bigcup x, \qquad \bigcap\bigcap x, \qquad \left(\bigcap\bigcup x\right) \cup \left(\bigcup\bigcup x - \bigcup\bigcap x\right), \qquad \bigcup\left(\bigcup x - \bigcap x\right)$$

1.2.16 Dar un ejemplo de dos conjuntos a y b tales que

$$a \cap b \neq \emptyset \qquad \text{y} \qquad (\bigcap a) \cap (\bigcap b) \neq \bigcap(a \cap b)$$

1.2.17 ¿Es $a \cup (\bigcup b) = \bigcup\{a \cup c : c \in b\}$?. Si no, ¿qué condiciones se necesitan para que se verifique la igualdad?.

1.2.18 Probar que para cualesquiera conjuntos a, b y c

$$\begin{array}{ll}
a \cup a = a & a \cap a = a \\
a \cup b = b \cup a & a \cap b = b \cap a \\
a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c & a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c \\
a \cap (a \cup b) = a & a \cup (a \cap b) = a \\
a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c) & a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c) \\
c - (a \cap b) = (c - a) \cup (c - b) & c - (a \cup b) = (c - a) \cap (c - b)
\end{array}$$

1.2.19 Probar que para cualesquiera conjuntos a, b y c

1. $a - (b - c) = (a - b) \cup (a \cap c)$
2. $(a \cup b) - c = (a - c) \cup (b - c)$
3. $(a - b) - c = a - (b \cup c)$

1.2.20 Sean a y b dos conjuntos. Se define la diferencia simétrica de a y b como

$$a \triangle b = (a - b) \cup (b - a)$$

Probar que:

1. $a \triangle b$ es un conjunto
2. $a \triangle b = (a \cup b) - (a \cap b)$
3. $a \triangle b = b \triangle a$ [Conmutativa]
4. $a \triangle (b \triangle c) = (a \triangle b) \triangle c$ [Asociativa]
5. $a \cap (b \triangle c) = (a \cap b) \triangle (a \cap c)$ [Distributiva]
6. $a \triangle \emptyset = a$ [Elemento neutro]
7. $a \triangle a = \emptyset$ [Elementos simétricos]
8. $a \triangle b = c \triangle b \implies a = c$ [Cancelativa]
9. $a \triangle b = \emptyset \implies a = b$
10. $(a \cup c) \triangle (b \cup c) = (a \triangle b) - c$
11. $a \cup c = b \cup c \implies a \triangle b \subseteq c$

12. $(\forall a)(\forall b)(\exists! c)[x \triangle c = b]$

13. a, b disjuntos $\implies a \cup b = a \triangle b$

14. $a \cup b = a \triangle b \triangle (a \cap b)$

1.2.21 Demostrar que $\bigcup(a \cup b) = (\bigcup a) \cup (\bigcup b)$.

1.2.22 Demostrar que si a y b son no vacíos, entonces $\bigcap(a \cup b) = (\bigcap a) \cap (\bigcap b)$.

1.2.23 Sea $x \neq \emptyset$. Demostrar:

1. $\bigcap\{z \cup y : z \in x\} = y \cup (\bigcap x)$
2. $\bigcup\{z \cap y : z \in x\} = y \cap (\bigcup x)$

1.2.24 Sean a, b y c conjuntos tales que $a \cup b = a \cup c$ y $a \cap b = a \cap c$. Demostrar que $b = c$.

1.2.25 Sea a un conjunto no vacío. Probar que las siguientes clases son propias:

1. $\{x : (\exists y)[y \in a \wedge x \notin y]\}$
2. $\{x : (\exists y)(\exists z)[y \in a \wedge z \in y \wedge x \notin z]\}$

1.2.26 Probar que para cualesquiera conjuntos a, b y c se tiene que:

1. $a \subseteq a$.
2. $a \subseteq b \wedge b \subseteq a \implies a = b$.
3. $a \subseteq b \wedge b \subseteq c \implies a \subseteq c$.
4. $\emptyset \subseteq a$.

1.2.27 Probar que para cualesquiera conjuntos a y b las condiciones siguientes son equivalentes:

1. $a \subseteq b$.
2. $a \cup b = b$.
3. $a \cap b = a$.
4. $a - b = \emptyset$.

1.2.28 Sean a y b subconjuntos de un conjunto c. Se llama complementario de a en c al conjunto $c - a$ y se representa por a'.

1. Probar que las condiciones siguientes son equivalentes:
   (a) $a \subseteq b$.
   (b) $b' \subseteq a'$.
   (c) $a \cap b' = \emptyset$.
2. $(a \cup b)' = a' \cap b'$.
3. $(a \cap b)' = a' \cup b'$.
4. $(a - b)' = b \cup a'$.

1.2.29 Sea a un conjunto. Se definen las clases:

$$\begin{aligned} a^* &= \{b - c : b, c \in a\} \\ a^{\cup} &= \{b \cup c : b, c \in a\} \\ a^{\cap} &= \{b \cap c : b, c \in a\} \\ a^{\triangle} &= \{b \triangle c : b, c \in a\} \end{aligned}$$

1. Demostrar que a^*, $a^{\cup}$, $a^{\cap}$ y $a^{\triangle}$ son conjuntos.
2. Determinar cuáles de las siguientes relaciones son válidas:

$$a^* \subseteq (a^*)^*, \qquad (a^*)^* \not\subseteq a^*, \qquad a^{\triangle} \subseteq \left(a^{\triangle}\right)^{\triangle}, \qquad a^{\cup} \subseteq \left(a^{\cup}\right)^{\cup}, \qquad a^{\cap} \subseteq \left(a^{\cap}\right)^{\cap}.$$

1.2.30 Calcular:

1. $\mathbf{P}(0)$, $\mathbf{P}(\mathbf{P}(0))$, $\mathbf{P}(\mathbf{P}(\mathbf{P}(0)))$.
2. $\mathbf{P}(1)$, $\mathbf{P}(\mathbf{P}(1))$.
3. $\mathbf{P}(2)$, $\mathbf{P}(\mathbf{P}(2))$.
4. $\bigcap \bigcup (\mathbf{P}(2) - 2)$.
5. $\bigcap \{\mathbf{P}(1), \mathbf{P}(\mathbf{P}(1)), \mathbf{P}(\mathbf{P}(\mathbf{P}(1)))\}$

1.2.31 Sea $x = \{1, \{1\}\}$. Calcular $\bigcup x$, $\mathbf{P}(x)$, $\mathbf{P}(\bigcup x)$, $\bigcup \mathbf{P}(x)$.

1.2.32 Encontrar dos conjuntos a y b tales que $a \in b$ y $\mathbf{P}(a) \notin \mathbf{P}(b)$.

1.2.33 Demostrar que $\bigcup \mathbf{P}(a) \subseteq a$.

1.2.34 Demostrar que $a \subseteq \mathbf{P}(\bigcup a)$. ¿Cuándo se da la igualdad?.

1.2.35 Demostrar que si $a \in b$, entonces $\mathbf{P}(a) \in \mathbf{P}(\mathbf{P}(\cup b))$.

1.2.36 Demostrar que $2 \in \mathbf{P}(\mathbf{P}(\mathbf{P}(a)))$, para cualquier conjunto a.

1.2.37 Demostrar que $\mathbf{P}(a) = \mathbf{P}(b) \quad \Longrightarrow \quad a = b$.

1.2.38 Demostrar que si $a \neq \emptyset$, entonces $\mathbf{P}(\bigcap a) = \bigcap\{\mathbf{P}(c) : \ c \in a\}$.

1.2.39 Demostrar que $\bigcup\{\mathbf{P}(c) \ : \ c \in a\} \subseteq \mathbf{P}(\cup a)$. ¿Cuándo se da la igualdad?

1.2.40 Demostrar que no existe ningún conjunto a tal que $\mathbf{P}(a) \subseteq a$.

1.2.41 Sean a y b conjuntos. Demostrar que las siguientes clases son conjuntos:

1. $\{\{\{c\}\} : c \in a \cup b\}$
2. $\{a \cup c : c \in b\}$
3. $\{\mathbf{P}(c) : c \in a\}$
4. $\{c \cup d : c \in a \wedge d \in b\}$

1.2.42 Demostrar, sin usar el axioma del par, que si a es un conjunto, entonces $\{a\}$ también lo es.

Capítulo 2

Relaciones y funciones

2.1 Par ordenado y conjunto cartesiano

2.1.1 Calcular $\langle 0,1\rangle \cap \langle 1,0\rangle$.

2.1.2 Hallar $\bigcap\bigcap\bigcap\{\langle a,b\rangle\}$.

2.1.3 Sean a y b conjuntos. Probar que:

1. $\bigcap\bigcap\langle a,b\rangle = a$.
2. $a \neq b \quad \Longrightarrow \quad \bigcap(\bigcup\langle a,b\rangle - \bigcap\langle a,b\rangle) = b$.
3. $(\bigcap\bigcup\langle a,b\rangle) \cup (\bigcup\bigcup\langle a,b\rangle - \bigcup\bigcap\langle a,b\rangle) = b$.
4. $(\bigcap\bigcup\langle a,b\rangle) \cup (\bigcup\bigcup\langle a,b\rangle - \bigcap\bigcup\langle a,b\rangle) = a \cup b$.

2.1.4 Determinar cuáles de las siguientes propuestas pueden servir como definición de par ordenado (es decir, para cuáles se verifica $\langle a,b\rangle_i = \langle c,d\rangle_i \leftrightarrow a = c \wedge b = d$)

1. $\langle a,b\rangle_1 = \{a,b\}$
2. $\langle a,b\rangle_2 = \{\{a,0\},b\}$
3. $\langle a,b\rangle_3 = \{\{a,0\},\{b,\{0\}\}\}$
4. $\langle a,b\rangle_4 = \{\{a,0\},\{b\}\}$
5. $\langle a,b\rangle_5 = \{a,\{b\}\}$
6. $\langle a,b\rangle_6 = \{\{\{a\},0\},\{\{b\}\}\}$

2.1.5 Demostrar que $\{z : (\exists x)(\exists y)[z = \langle x, y\rangle]\}$ es una clase propia.

2.1.6 Probar que $\{\{0\}\}$ es un par ordenado.

2.1.7 Comprobar que la siguiente definición de terna ordenada es incorrecta:

$$\langle x, y, z\rangle' = \{\{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\}$$

(es decir, dar un ejemplo en el que $\langle x, y, z\rangle' = \langle u, v, w\rangle'$, pero $x \neq u \vee y \neq v \vee z \neq w$.

2.1.8 Hallar a, b, c tales que $\langle\langle a, b\rangle, c\rangle \neq \langle a, \langle b, c\rangle\rangle$

2.1.9 Demostrar:

1. $a \times (b \cup c) = (a \times b) \cup (a \times c)$
2. $a \times (b - c) = (a \times b) - (a \times c)$
3. $a \times (b \cap c) = (a \times b) \cap (a \times c)$

2.1.10 Dar ejemplos de conjuntos tales que

1. $a \times b \neq b \times a$
2. $a \times (b \times c) \neq (a \times b) \times c$
3. $a \cup (b \times c) \neq (a \cup b) \times (a \cup c)$
4. $a^3 = a \times a^2$

2.1.11 Sea $a \neq \emptyset$. Probar que las condiciones siguientes son equivalentes:

1. $b \subseteq c$.
2. $a \times b \subseteq a \times c$.
3. $b \times a \subseteq c \times a$.

2.1.12 Demostrar que si $x^2 = y^2$, entonces $x = y$.

2.1.13 Demostrar que si $x \times y = x \times z$ y $x \neq \emptyset$, entonces $y = z$.

2.1.14 Hallar un conjunto x tal que $x^2 = x$.

2.1.15 Demostrar que si x e y son conjuntos, entonces $\{\{z\} \times y : z \in x\}$ es un conjunto.

2.2 Relaciones

2.2.1 Demostrar que si x es un conjunto, entonces $\{r : r \text{ es una relación en } x\}$ es un conjunto.

2.2.2 Escribir todas las relaciones en el conjunto 1.

2.2.3 Probar que:

1. $(a \cup b)^{-1} = a^{-1} \cup b^{-1}$
2. $(a \cap b)^{-1} = a^{-1} \cap b^{-1}$
3. $(a - b)^{-1} = a^{-1} - b^{-1}$

2.2.4 Demostrar que si x e y son conjuntos, entonces $x \upharpoonright y$ también lo es.

2.2.5 Probar que $(r \circ s)^{-1} = s^{-1} \circ r^{-1}$.

2.2.6 Sea $r = \{\langle 0,1\rangle, \langle 0,2\rangle, \langle 0,3\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle\}$. Calcular $r \circ r$, $r \upharpoonright \{1\}$, $r^{-1} \upharpoonright \{1\}$, $r[\{1\}]$, $r^{-1}[\{1\}]$.

2.2.7 Calcular todos los pares ordenados de $\mathbf{P}(2)$.

2.2.8 Calcular $\mathbf{P}(2)^{-1} \circ (\mathbf{P}(2) \upharpoonright 1)$

2.2.9 Demostrar:

1. $r \upharpoonright x = r \cap (x \times \text{rango}(r))$
2. $r \upharpoonright (b \cup c) = (r \upharpoonright b) \cup (r \upharpoonright c)$

2.3 Aplicaciones

2.3.1 Demostrar:

1. $f \upharpoonright x$, y^x, $f[z]$ y $f^{-1}[z]$ son conjuntos.
2. Si $f \in y^x$ y $g \in z^y$, entonces $g \circ f \in z^x$.

2.3.2 Demostrar que $A = \{f : f \text{ es una aplicación}\}$ es una clase propia.

2.3.3 Demostrar que si x es un conjunto, entonces $A = \{\text{dom}(f) : f \in x\}$ es un conjunto.

2.3.4 Sea $f = \{\langle 0,2\rangle, \langle 1,0\rangle\}$.

1. Demostrar que f es una aplicación.

2. Calcular $f(0)$, $f[0]$, $f[1]$, f^{-1}, $f \restriction 1$ y $\bigcup\bigcup f$.

2.3.5 Sean a y b conjuntos y F una función. Probar que:

1. $F^{-1}[\cup a] = \bigcup\{F^{-1}[c] : c \in a\}$.
2. $a \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad F^{-1}[\cap a] = \bigcap\{F^{-1}[c] : c \in a\}$.
3. $F^{-1}[a - b] = F^{-1}[a] - F^{-1}[b]$.

2.3.6 Determinar los siguientes conjuntos: 2^2, 2^1, 2^0, 0^0, 0^2.

Capítulo 3

Clases bien ordenadas

3.0.7 Determinar si las siguientes relaciones son órdenes parciales, órdenes totales o buenos órdenes en A.

1. $A = \omega, \quad xRy \leftrightarrow x < y.$
2. $A = \mathbb{Z}, \quad xRy \leftrightarrow x < y.$
3. $A = \omega, \quad xRy \leftrightarrow (x \text{ divide a } y) \wedge x \neq y.$
4. $A = \emptyset, \quad R = \emptyset.$
5. $A = \omega, \quad R = \emptyset.$
6. $A = 2^\omega, \quad fRg \leftrightarrow (\exists n \in \omega)[f(n) < g(n) \wedge (\forall m < n)[f(m) = g(m)]].$

3.0.8 Sean A y B conjuntos y

$$Fn(A, B) = \{f : (f \text{ es una función }) \wedge \mathrm{dom}(f) \subseteq A \wedge \mathrm{rang}(f) \subseteq B\}$$

1. Demostrar que $Fn(A, B)$ es un conjunto.
2. ¿Es $\subset$ un orden parcial en $Fn(A, B)$?, ¿es total?, ¿es buen orden?.

3.0.9 En el conjunto $\mathbf{P}(\omega)$ definimos la relación R por:

$$a \lhd b \leftrightarrow (\exists n \in \omega)[n \cap a = n \cap b \wedge n \in a \wedge n \notin b]$$

¿Es R un orden parcial en $\mathbf{P}(\omega)$?, ¿es total?, ¿es buen orden?.

3.0.10 Sea $<$ el orden usual de ω. Para cada $n \in \omega$, sea $f(n)$ el número de divisores primos de n. Sea R la relación definida en ω por:

$$mRn \leftrightarrow f(m) < f(n) \vee (f(m) = f(n) \wedge m < n)$$

1. Representar la relación R.

2. ¿Es R un orden parcial en ω?, ¿es total?, ¿es buen orden?.

3. Demostrar que $\langle \omega, < \rangle \ncong \langle \omega, R \rangle$.

3.0.11 Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$. Demostrar o refutar:

1. Si R es un orden parcial en A, entonces R^{-1} es un orden parcial en A.

2. Si R es un orden total en A, entonces R^{-1} es un orden total en A.

3. Si R es un buen orden en A, entonces R^{-1} es un buen orden en A.

3.0.12 Sea A un conjunto, $R \subseteq A \times A$ y $B \subseteq A$. Demostrar o refutar:

1. Si R es un orden parcial en A, entonces $R \cap (B \times B)$ es un orden parcial en B.

2. Si R es un orden total en A, entonces $R \cap (B \times B)$ es un orden total en B.

3. Si R es un buen orden en A, entonces $R \cap (B \times B)$ es un buen orden en B.

3.0.13 Sean A y B conjuntos, $S \subseteq B \times B$, $F : A \to B$ inyectiva y S la relación definida en A por: $xRy \leftrightarrow F(x)SF(y)$. Demostrar o refutar:

1. Si S es un orden parcial en B, entonces R es un orden parcial en A

2. Si S es un orden total en B, entonces R es un orden total en A

3. Si S es un buen orden en B, entonces R es un buen orden en A

3.0.14 Sean (A, R) y (B, S) dos conjuntos parcialmente ordenados y supongamos que $A \cap B = \emptyset$. Sea $T = R \cup S \cup (A \times B)$.

1. Demostrar que T es un orden parcial en $A \cup B$.

2. Si R y S son totales, ¿es T total?.

3. Si R y S son buenos órdenes, ¿es T un buen orden?.

3.0.15 Sean (A, R) y (B, S) dos conjuntos parcialmente ordenados y T la relación sobre $A \times B$ definida por: $(a, b)T(a', b') \leftrightarrow (aRa') \vee (a = a' \wedge bSb')$.

1. Demostrar que T es un orden parcial en $A \times B$.

2. Si R y S son totales, ¿es T total?.

3. Si R y S son buenos órdenes, ¿es T un buen orden?.

3.0.16 Sean $\langle A, R\rangle$, $\langle B, S\rangle$ conjuntos totalmente ordenados y $F : A \to B$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

1. F es un homomorfismo (i.e. $(\forall x, y \in A)[xRy \to F(x)SF(y)]$)

2. F es creciente (i.e. $(\forall x, y \in A)[xRy \leftrightarrow F(x)SF(y)]$)

3. F es una inmersión (i.e. F es inyectiva y creciente).

3.0.17 Sean $\langle A, R\rangle$, $\langle B, S\rangle$ conjuntos parcialmente ordenados y $F : A \to B$. Demostrar o refutar:

1. Si F es un homomorfismo, entonces F es inyectiva.

2. Si F es un homomorfismo, entonces F es creciente.

3.0.18 Sea $\langle x, <\rangle$ un conjunto parcialmente ordenado. Probar que existe un $y \subseteq \mathbf{P}(x)$ tal que $\langle x, <\rangle \cong \langle y, \subset\rangle$.

3.0.19 Sea $\langle x, <\rangle$ un conjunto totalmente ordenado y $A = \{s \subseteq x : s \text{ segmento de } x\}$. Probar que:

1. $s, s' \in A \implies s \subseteq s' \vee s' \subseteq s$.

2. $a, b \in x \wedge a \neq b \implies (\exists s \in A)[(a \in s \wedge b \notin s) \vee (a \notin s \wedge b \in s)]$

3. $a \subseteq A \implies \cup a \in A$.

4. $a \subseteq A \implies x \cap (\cap a) \in A$.

3.0.20 Sea $B \subseteq \mathbf{P}(A)$ tal que:

$$(\forall s, s' \in B)[s \subseteq s' \vee s' \subseteq s]$$
$$(\forall x, y \in A)[x \neq y \to (\exists s \in B)[(x \in s \wedge y \notin s) \vee (x \notin s \wedge y \in s)]$$

1. Probar que existe una única relación de orden total, $<$, sobre A tal que:
$$(\forall s \in B)[s \text{ es un segmento de } \langle A, <\rangle]$$

2. Si además se verifican:

   (a) $C \subseteq B \to \cup C \in B$

   (b) $C \subseteq B \to A \cap (\cap C) \in B$

   Probar que, si $<$ es la relación de orden total sobre A considerada en el apartado (1), entonces

$$A = \{s : s \text{ es un segmento de } \langle A, < \rangle\}$$

3. Buscar ejemplos que prueben que las condiciones (2.a) y (2.b) son necesarias para la igualdad anterior.

3.0.21 Para cada una de las siguientes condiciones, buscar un conjunto totalmente ordenado $\langle A, < \rangle$ que la verifique.

1. A tiene un segmento inicial B tal que $A \neq B$ y B no es una sección inicial de A.

2. Existe una $F : A \to B$ creciente tal que $F(x) < x$ para algún $x \in A$.

3. Existe un $x \in A$ tal que $\langle A, < \rangle \cong \langle A_x, < \rangle$.

4. Existe un $F : \langle A, < \rangle \cong \langle A, < \rangle$ tal que $F \neq I_A$.

3.0.22 Sea $\langle A, < \rangle$ un conjunto totalmente ordenado. ¿Es válida la siguiente condición?:

$$(\forall x, y \in A)[A_x \cong A_y \to x = y]$$

3.0.23 Sea $\langle A, < \rangle$ una clase bien ordenada y $B \subseteq A$. Demostrar que

$$A \cong B \vee (\exists x \in A)[B \cong A_x]$$

3.0.24 Demostrar:

1. Si $a \times a$ es un conjunto bien ordenable, entonces a también lo es.

2. Si $\mathbf{P}(a)$ es un conjunto bien ordenable, entonces a también lo es.

Capítulo 4

La clase de los ordinales

4.1 Conjuntos transitivos

4.1.1 Dar conjuntos a, b, c, d, e tales que $\{\{1\}, a, b\}$ y $\{\{\{1\}\}, c, d, e\}$ sean conjuntos transitivos.

4.1.2 Dado $a = \langle 0, 1\rangle$, hallar un conjunto transitivo b_1 tal que $a \subseteq b_1$ y un conjunto transitivo b_2 tal que $b \in b_2$.

4.1.3 Sea a un conjunto.

1. Demostrar que si a es transitivo, entonces $\bigcup a$ también lo es.
2. ¿Es cierto el recíproco?.
3. Demostrar que si a es transitivo, entonces $\mathbf{P}(a)$ también lo es.
4. ¿Es cierto el recíproco?.

4.1.4 Sea a un conjunto. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

1. a es transitivo.
2. $\bigcup a^+ = a$.

4.2 La clase de los números ordinales

4.2.1 Dar ejemplos de:

1. conjuntos transitivos que no sean ordinales.
2. conjuntos bien ordenados por la relación de pertenencia que no sean ordinales.

4.2.2 Demostrar que si a es un conjunto, entonces son equivalentes:

1. a es un ordinal.
2. $\in_a$ es un buen orden en a y $(\forall x \in a)[x = \{y \in a : y \in x\}]$.
3. Existe un buen orden R en a tal que $(\forall x \in a)[x = \{y \in a : yRx\}]$.
4. $\subset_a = \{\langle x, y\rangle \in a^2 : x \subset y\}$ es un buen orden en a y $(\forall x \in a)[x = \{y \in a : y \subset x\}]$.

4.3 Ordenación de los ordinales

4.3.1 Demostrar que si $\alpha < \beta$, entonces $\alpha^+ < \beta^+$.

4.3.2 Sean a y b dos conjuntos de ordinales. Demostrar que si

$$(\forall \alpha \in a)(\exists \beta \in b)[\alpha < \beta],$$

entonces $\bigcup a \in \bigcup b$ ó $\bigcup a = \bigcup b$.

Capítulo 5

Clases bien ordenadas y ordinales

5.1 El axioma de reemplazamiento

5.1.1 Sean a y b conjuntos. Demostrar, usando el axioma de reemplazamiento, que las siguientes clases son conjuntos:

1. $\{\{\{c\}\} : c \in a \cup b\}$
2. $\{a \cup c : c \in b\}$
3. $\{\mathbf{P}(c) : c \in a\}$
4. $\{c \cup d : c \in a \wedge d \in b\}$

5.1.2 Demostrar que si F es una aplicación, entonces F es un conjunto syss $\mathrm{dom}(F)$ es un conjunto.

5.1.3 Sea F una aplicación. Demostrar o refutar:

1. Si x es un conjunto, entonces $F^{-1}[x]$ es un conjunto.
2. Si x es un conjunto y F es inyectiva, entonces $F^{-1}[x]$ es un conjunto.

5.1.4 Demostrar la existencia del producto cartesiano $a \times b$ de dos conjuntos a y b sin usar el axioma del conjunto de las partes y usando el axioma de reemplazamiento.

5.2 Clases bien ordenadas y ordinales

5.2.1 Demostrar que si $\langle a, <\rangle$ es un conjunto bien ordenado y $a \neq \emptyset$, entonces

$$t.o.(\langle a, z\rangle) = \{t.o.(\langle a_x, <\rangle) : x \in a\}$$

5.2.2 Sea $a = \{x, y, z\}$ y $<$ el orden definido por $x < y < z$. Calcular, aplicando el ejercicio anterior, el tipo ordinal de $\langle a, <\rangle$.

5.2.3 Sea R la relación definida en $\mathbb{Z}$ por

$$xRy \leftrightarrow |x| < |y| \vee (|x| = |y| \wedge x < y)$$

1. Demostrar que R es un buen orden en $\mathbb{Z}$.
2. Calcular $t.o.(\langle \mathbb{Z}_3, R\rangle)$.
3. Calcular $t.o.(\langle \mathbb{Z}_x, R\rangle)$.

5.2.4 Sea R la relación definida en $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ por

$$\langle x, y\rangle R\langle x', y'\rangle \leftrightarrow x + y < x' + y' \vee (x + y = x' + y' \wedge x < x')$$

1. Demostrar que R es un buen orden en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
2. Calcular $t.o.(\langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{\langle 1,2\rangle}, R\rangle)$.
3. Calcular $t.o.(\langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{\langle x,y\rangle}, R\rangle)$.

5.2.5 Sea R la relación definida en $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ por

$$\langle x, y\rangle R\langle x,' \rangle y' \leftrightarrow \begin{cases} max(x, y) < max(x', y') \\ \vee \\ (max(x, y) = max(x', y') \wedge x < x') \\ \vee \\ (max(x, y) = max(x', y') \wedge x = x' \wedge y < y') \end{cases}$$

1. Demostrar que R es un buen orden en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
2. Calcular $t.o.(\langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{\langle 1,2\rangle}, R\rangle)$.
3. Calcular $t.o.(\langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{\langle 0,y\rangle}, R\rangle)$.
4. Calcular $t.o.(\langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{\langle x,y\rangle}, R\rangle)$.

Capítulo 6

Ordinales finitos

6.1 Ordinales sucesores y límites

6.1.1 Sea $\langle a, < \rangle$ un conujunto bien ordenado no vacío y $\alpha = t.o.(\langle a, < \rangle)$. Demostrar:

1. Si a no tiene elemento maxiomal, entonces α es límite.
2. ¿Es cierto el recíproco?.

6.1.2 Sea a un conjunto no vacío de ordinales. Demostrar o refutar:

1. Si los elementos de a son límites, entonces $\bigcup a$ es límite.
2. Si los elementos de a son sucesores, entonces $\bigcup a$ es sucesor.

6.1.3 Demostrar que si α es límite y $\beta < \alpha$, existe $\ggg$ tal que $\beta <\ggg< \alpha$.

6.1.4 Demostrar que

$$\bigcup \alpha = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha = 0; \\ \beta, & \text{si } \alpha = \beta + 1; \\ \alpha, & \text{si } \alpha \text{ es límite.} \end{cases}$$

6.2 El axioma del infinito

6.2.1 Sea a un conjunto inductivo. Demostrar que los siguientes conjuntos son inductivos:

1. $\{x \in a : x \text{ transitivo}\}$

2. $\{x \in a : x \text{ transitivo} \wedge x \notin x\}$

3. $\{x \in a : x = 0 \vee (x \text{ sucesor})\}$

6.2.2 Sea α un ordinal. Demostrar que α es límite syss α es inductivo.

6.2.3 Sea a un conjunto no vacío. Demostrar que si los elementos de a son inductivos, entonces $\bigcap a$ es inductivo.

6.2.4 Demostrar que si a es inductivo, entonces $a \cap \mathbf{Ord}$ es inductivo.

6.3 Propiedades de los números naturales

6.3.1 Demostrar que $\mathbf{P}(\omega)$ no es un ordinal.

6.3.2 ¿Es cierto que si a es inductivo, entonces $\mathbf{P}(a)$ es inductivo?.

6.3.3 Sean R y S las relaciones sobre $2 \times \omega$ definidas por

$$\begin{array}{l}\langle x, y\rangle R\langle x', y'\rangle \leftrightarrow x + y < x' + y' \vee (x + y = x' + y' \wedge x < x') \\ \langle x, y\rangle S\langle x', y'\rangle \leftrightarrow x < x' \vee (x = x' \wedge y < y')\end{array}$$

Demostrar:

1. $t.o.(\langle 2 \times \omega, R\rangle) = \omega$

2. $t.o.(\langle 2 \times \omega, S\rangle)$ es un ordinal límite.

3. $t.o.(\langle 2 \times \omega, S\rangle) > \omega$.

6.3.4 Demostrar que si $a \subseteq \omega$ es no vacío y acotado superiormente, entonces a tiene un elemento máximo.

6.3.5 Demostrar que un ordinal α es un número natural syss todo subconjunto no vacío de α tiene máximo.

Capítulo 7

Teoremas de inducción y recursión

7.1 Teoremas de inducción

7.1.1 Demostrar que si a es un conjunto y $G : V \times V \to V$, entonces existe una única $f : \omega \to V$ tal que

$$\begin{array}{l} f(0) = a \\ (\forall n)[f(n+1) = G(f(n), n)] \end{array}$$

7.2 Teoremas de recursión

7.2.1 Demostrar que si a es un conjunto y $G, H : V \to V$, entonces existe una única $F : \mathbf{Ord} \to V$ tal que

$$F(\alpha) = \begin{cases} a, & \text{si } \alpha = 0; \\ G(F(\beta)), & \text{si } \alpha = \beta + 1; \\ H(F(\alpha)), & \text{si } \alpha \text{ es límite} \end{cases}$$

7.2.2 Demostrar que si $G : V \times V \to V$, entonces existe una única $F : V \times \mathbf{Ord} \to V$ tal que

$$(\forall a)(\forall \alpha)[F(\alpha) = G(a, F_a \restriction \alpha)],$$

donde $F_a : V \to V$ está definida por $F_a(b) = F(a, b)$.

7.2.3 Dar un ejemplo de un conjunto inductivo que no sea un ordinal.

7.2.4 Sea a un conjunto, $G : V \to V$ y $f : \omega \to V$ definida por

$$\begin{array}{l} f(0) = a \\ (\forall n)[f(n+1) = G(f(n))] \end{array}$$

Demostrar que si G es inyectiva y $a \notin \text{rango}(G)$, entonces f es inyectiva.

7.2.5 Demostrar que si a es un conjunto y $G : V \to V$, entonces existe una única $f : \omega \to V$ tal que

$$\begin{array}{l} f(0) = a \\ (\forall n)[f(n+1) = G(f(n))] \end{array}$$

7.2.6 Demostrar que si $H : V \to V$ y $G : V \times V \times V \to V$ entonces existe una única $F : V \times \omega \to V$ tal que

$$\begin{array}{l} (\forall a)[F(a,0) = H(a)] \\ (\forall a)(\forall n)[F(a, n+1) = G(a, F(a,n), n)] \end{array}$$

7.2.7 Demostrar que si $h : a \to b$ y $g : a \times b \times \omega \to b$ entonces existe una única $F : a \times \omega \to b$ tal que

$$\begin{array}{l} (\forall x \in a)[f(x,0) = h(x)] \\ (\forall x \in a)(\forall n)[f(x, n+1) = g(x, f(x,n), n)] \end{array}$$

7.2.8 Demostrar que existe una única $+ : \omega \times \omega \to \omega$ tal que

$$\begin{array}{l} (\forall m)[+(m,0) = m] \\ (\forall m)(\forall n)[+(m, n+1) = +(m,n) + 1] \end{array}$$

7.2.9 Demostrar que existe una única $\cdot : \omega \times \omega \to \omega$ tal que

$$\begin{array}{l} (\forall m)[\cdot(m,0) = 0] \\ (\forall m)(\forall n)[\cdot(m, n+1) = \cdot(m,n) + m] \end{array}$$

7.2.10 (La función factorial) Demostrar que existe una única $f : \omega \to \omega$ tal que

$$\begin{array}{l} f(0) = 1 \\ (\forall n)[f(n+1) = (n+1)f(n)] \end{array}$$

7.2.11 (La función de Fibonacci) Demostrar que existe una única $f : \omega \to \omega$ tal que

$$\begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f(1) = 1 \\ (\forall n)[f(n+2) = f(n) + f(n+1)] \end{array}$$

7.2.12 Demostrar que las siguientes clases son conjuntos:

1. $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots\}$
2. $\{\emptyset, \mathbf{P}(\emptyset), \mathbf{P}(\mathbf{P}(\emptyset)), \ldots\}$
3. $\{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega^+, \omega^{++}, \ldots\}$

Capítulo 8

Aritmética ordinal

8.1 Funciones normales

8.1.1 Determinar cuáles de las siguientes funciones F_i : **Ord** $\to$ **Ord** son normales:

1. $F_1(\alpha) = \alpha + 1$
2. $F_2(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } \alpha < \omega; \\ \omega, & \text{si } \omega \geq \omega. \end{cases}$
3. $F_3(\alpha) = \begin{cases} \alpha + 1, & \text{si } \alpha \text{ no es límite;} \\ \alpha, & \text{si } \alpha \text{ es límite.} \end{cases}$
4. $F_4(\alpha) = \bigcup \alpha$

8.1.2 Demostrar que si F es una función normal, entonces $\{\alpha : F(\alpha) = \alpha\}$ es una clase propia.

8.1.3 Demostrar que la clase $\{\alpha : \alpha \text{ es límite}\}$ es una clase propia.

8.2 Adición de ordinales

8.2.1 Simplificar la expresión $(\omega + 1) + \omega$.

8.2.2 Demostrar que si $\alpha + \beta = \gamma$, entonces $\alpha \leq \gamma$ y $\beta \leq \gamma$.

8.2.3 ¿Existe algún ordinal α tal que $\alpha + \omega = \alpha^+$?.

8.2.4 Determinar los ordinales $\alpha + \beta + \gamma$ cuando $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{1, 2, \omega\}$.

8.2.5 En cada caso, dar tres ordinales α, β y γ de modo que al formar todas las posibles sumas $\alpha' + \beta' + \gamma'$ con $\{\alpha', \beta', \gamma'\} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ nos dé exactamente 1, 2, 3, 4 ó 5 valores distintos.

8.2.6 Calcular todas las sumas $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ siendo $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = \{1, 2, 4, 5, \omega\}$.

8.2.7 Dar ejemplos de ordinales $\alpha < \beta$ tales que

1. $\alpha + \beta < \beta + \alpha$
2. $\beta + \alpha < \alpha + \beta$

8.2.8 Determinar una permutación de los ordinales $1, 2, \omega$ tal que su suma sea:

1. ω
2. $\omega + 1$
3. $\omega + 2$
4. $\omega + 3$

8.2.9 Sea $\mathbf{Ord}^{<\omega} = \bigcup\{Ord^n : n \in \omega\}$, donde Ord^n es el conjunto de las aplicaciones de n en $\mathbf{Ord}$.

1. Demostrar que $\mathbf{Ord}^{<\omega}$ es una clase propia.
2. Sobre $\mathbf{Ord}^{<\omega}$ definimos la siguiente relación, $\lhd$. Sea $s, t \in \mathbf{Ord}^{<\omega}$

$$s \lhd t \leftrightarrow \begin{cases} sup(rang(s)) < sup(rang(t)) \\ \vee \\ (sup(rang(s)) = sup(rang(t)) \wedge dom(s) < dom(t)) \\ \vee \\ \begin{cases} (sup(rang(s)) = sup(rang(t)) \wedge \ dom(s) = dom(t) \\ \wedge \\ (\exists k \in dom(s))[s \upharpoonright k = t \upharpoonright k \wedge s(k) < t(k)]) \end{cases} \end{cases}$$

Probar que:

(a) Para todo $t \in \mathbf{Ord}^{<\omega}$, $\{s \in \mathbf{Ord}^{<\omega} : s \lhd t\}$ es un conjunto.
(b) $\lhd$ es un buen orden sobre $\mathbf{Ord}^{<\omega}$.
(c) Existe un único isomorfismo $F : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}^{<\omega}$.

(d) Calcular $F(0)$, $F(\omega)$ y $F(\omega+\omega)$.

8.2.10 Encontrar un conjunto $A \subseteq \mathbb{Q}$ tal que el tipo ordinal de $\langle A, <_{\mathbb{Q}}\rangle$ sea:

1. $\omega+1$
2. $\omega+n$, con $n>0$
3. $\omega+\omega$

8.2.11 Sea $n<\omega$. Calcular el menor α tal que $n+\alpha=\alpha$ (es decir, el menor punto fijo de $F_n(\xi)=n+\xi$).

8.2.12 Probar que para cada α existe un único ordinal β y un único $n \in \omega$ tales que $\alpha=\beta+n$ y $\beta=0$ ó β es límite.

8.2.13 Sean $\alpha, \beta \in$ **Ord** con $\beta \neq 0$. Demostrar que $\alpha+\beta$ es límite syss β es límite.

8.2.14 Demostrar que si α es límite y $n \in \omega$, entonces $n+\alpha=\alpha$.

8.3 Multiplicación de ordinales

8.3.1 Determinar una permutación de los ordinales $\omega, \omega+1$ y $\omega.2+1$ tales que su suma sea:

1. $\omega.4$
2. $\omega.4+1$.

8.3.2 Simplificar:

1. $2.\omega$
2. $(\omega.3+2)+(\omega+1)$.

8.3.3 Calcular todas las sumas posibles de los siguientes ordinales (incluyendo en cada caso todos los sumandos):

1. $\omega.2, \omega.2+1$
2. $\omega.2, \omega.2+1, \omega.4$

3. $1, \omega, \omega.2$

8.3.4 Demostrar que si $m > 0$, entonces $n + \omega.m = \omega.m$.

8.3.5 Demostrar que para todo α, $\alpha + 1 + \alpha = 1 + \alpha.2$.

8.3.6 Sea $n \in \omega$. Calcular el menor α tal que $n.\alpha = \alpha$.

8.3.7 Encontrar un conjunto $A \subseteq \mathbb{Q}$ tal que el tipo ordinal de $\langle A, <_{\mathbb{Q}} \rangle$ sea:

1. $\omega.2$
2. $\omega.3$
3. $\omega.\omega$

8.3.8 Determinar si la función $F : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ definida por $F(\alpha) = \alpha.2$ es creciente, continua o normal.

8.3.9 Demostrar que si $m > 0$, entonces $n + \omega.m = \omega.m$.

8.3.10 Sean $m, n_1, n_2 \in \omega$. Calcular:

1. $(\omega.n_1 + n_2)m$
2. $m(\omega.n_1 + n_2)$
3. $(\omega.n_1 + n_2)\omega$
4. $\omega(\omega.n_1 + n_2)$

8.3.11 Demostrar que $\alpha.\beta = 0$ syss $\alpha = 0$ ó $\beta = 0$.

8.3.12 Demostrar que si $\alpha < \beta$ y γ es sucesor, entonces $\alpha\gamma < \beta\gamma$.

8.3.13 Demostrar que si $\alpha > 1$ y $\beta > 1$, entonces $\alpha + \beta \leq \alpha\beta$.

8.3.14 Demostrar que $\alpha\beta = sup\{\alpha\gamma + \alpha : \gamma < \beta\}$.

8.4 Sustracción y división de ordinales

8.4.1 En cada caso, hallar el cociente y el resto de dividir α por β:

1. $\alpha = \omega + 4, \beta = \omega$
2. $\alpha = \omega.3 + 2, \beta = \omega + 1$
3. $\alpha = \omega^\omega, \beta = \omega$

4. $\alpha = \omega^2 + \omega.5 + 3, \beta = \omega^2 + 1$
5. $\alpha = \omega^\omega + \omega^3 + \omega.3 + 2, \beta = \omega^5$
6. $\alpha = \omega^5, \beta = \omega^\omega + \omega^3 + \omega.3 + 2$

8.4.2 Para cada $n \in \omega$, se definen

$$A_n = \{\alpha : n + \alpha = \alpha\} \qquad A'_n = \{\alpha : n.\alpha = \alpha\}$$

Demostrar:

1. Si $n = 0$, entonces $A_n = \mathbf{Ord}$.
2. Si $n \neq 0$, entonces $A_n = \mathbf{Ord} - \omega$.
3. Si $n = 0$, entonces $A'_n = 1$.
4. Si $n \neq 0$, entonces $A'_n = \{\omega.\beta : \beta > 0\}$.

8.4.3 Demostrar que si α es límite y $m \neq 0$, entonces $m(\alpha + n) = \alpha + mn$

8.4.4 Demostrar que si $\alpha > 0$ y β es límite, entonces $(\alpha + 1)\beta = \alpha\beta$.

8.5 Exponenciación ordinal

8.5.1 Determinar todos los ordinales $\alpha.\beta.\gamma$ tales que $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{3, \omega, \omega.2\}$.

8.5.2 Determinar si las siguientes funciones $F_i : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ son continuas o crecientes:

1. $F_1(\alpha) = \alpha^2$
2. $F_2(\alpha) = \omega^\alpha + \omega$

8.5.3 Demostrar que si $n > 1$, entonces $n^\omega = \omega$.

8.5.4 Demostrar o refutar:

1. $(\forall\alpha)(\forall\beta)(\forall\gamma)[\alpha^\beta = \alpha^\gamma \to \beta = \gamma]$
2. $(\forall\alpha)(\forall\beta)(\forall\gamma)[\alpha < \beta \to \alpha^\gamma < \beta^\gamma]$

8.5.5 Demostrar:

1. Si $\alpha > 1$ y β es límite, entonces α^β es límite.
2. Si α es límite y $\beta > 0$, entonces α^β es límite.

8.5.6 Demostrar que si $\alpha > 1$, entonces $\beta \leq \alpha^\beta$.

8.5.7 Sean α y β dos ordinales tales que $\alpha < \beta$. Demostrar:

1. $\omega^\alpha + \omega^\beta = \omega^\beta$.
2. Si $m > 0$, entonces $\omega^\alpha n + \omega^\beta m = \omega^\beta m$.

8.5.8 Simplificar:

1. $\omega + (\omega^2 + 1)$
2. $(\omega^2 + \omega.2 + 2) + (\omega + 1)$
3. $(\omega^7 + \omega^5 + \omega^3.2 + \omega.10 + 3) + (\omega^4 + \omega^2.2 + 2)$

8.5.9 Determinar una permutación de los ordinales ω, $\omega.2 + 1$, $\omega.5$ y ω^2 tal que su suma sea:

1. $\omega^2 + \omega.5$
2. $\omega^2 + \omega.10 + 1$
3. $\omega^2 + \omega.5 + 1$
4. $\omega^2 + \omega.11 + 1$
5. $\omega^2 + \omega.9$
6. $\omega^2 + \omega.11$

8.5.10 Calcular todas las sumas $\alpha + \beta + \gamma + \delta$, siendo $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} = \{\omega + 2, \omega.2 + 1, \omega.4, \omega^2\}$

8.5.11 Probar que:

1. Si $n > 0$, entonces $(\omega^3 + \omega)n = \omega^3 n + \omega$
2. $(\omega^3 + \omega)\omega = \omega^4$

8.5.12 Encontrar:

1. el menor α tal que $\omega + \alpha = \alpha$;

2. el menor $\alpha > \omega$ tal que $(\forall \beta < \alpha)[\beta + \alpha = \alpha]$

8.5.13 Dadas las funciones

$$\begin{array}{lll} F : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord} & \text{tal que} & F(\alpha) = \alpha^2 \\ G : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord} & \text{tal que} & G(\alpha) = 2^\alpha \end{array}$$

1. Determinar si son continuas, crecientes o normales.

2. Calcular el menor punto fijo de cada una.

8.6 Forma normal de Cantor

8.6.1 Sean $k \in \omega$, $\gamma_o, \ldots, \gamma_k \in \mathbf{Ord}$ y $n_0, \ldots, n_k \in \omega$ tales que $\gamma_0 > \ldots > \gamma_k$ y $(\forall i \leq k)[n_i > 0]$. Demostrar:

1. Si $n > 0$, entonces $(\omega^{\gamma_0} n_0 + \cdots + \omega^{\gamma_k} n_k)n = \omega^{\gamma_0} n_0 n + \omega^{\gamma_1} n_1 n \cdots + \omega^{\gamma_k} n_k$

2. Si $\gamma > 0$, entonces $(\omega^{\gamma_0} n_0 + \cdots + \omega^{\gamma_k} n_k)\omega^\gamma = \omega^{\gamma_0 + \gamma}$

8.6.2 Hallar tres ordinales tales que al formar los productos de todas sus permutaciones se obtengan 6 valores distintos.

8.6.3 Expresar los siguientes ordinales en la forma normal de Cantor:

1. $(\omega + 1)^2$

2. $(\omega + 1)(\omega^2 + 1)$

3. $(\omega^2 + 1)(\omega + 1)$

4. $(\omega^3 + \omega)^5$

5. $(\omega^5 + \omega^3)^3$

6. $(\omega^3.4 + \omega^2.5 + 2)^2 + \omega^5 + 3$

8.6.4 Demostrar o refutar:

1. $(\forall \alpha)[\alpha < \omega^2 \to \alpha + \omega^2 = \omega^2]$.

2. $(\forall \alpha)[\alpha < \omega^2 + 1 \to \alpha + \omega^2 + 1 = \omega^2 + 1]$.

8.6.5 Encontrar:

1. el menor α tal que $\omega\alpha = \alpha$;
2. el menor $\alpha > \omega$ tal que $(\forall\beta < \alpha)[\beta\alpha = \alpha]$

8.6.6 Demostrar que dados tres ordinales cualesquiera, el número de sumas de todas sus permutaciones es menor que 6.

8.6.7 Determinar todos los ordinales α tales que $\omega \leq \alpha < \omega^3$ y $\alpha = \beta^2$ para algún β.

8.6.8 Sea $\langle A, < \rangle$ una clase bien ordenada. Una función inyectiva $F : A \times A \to A$ es monótona sobre A si:

$$\begin{array}{l} a < a' \to (\forall b \in A)[(F(a,b) < F(a',b)] \\ b < b' \to (\forall a \in A)[(F(a,b) < F(a,b')] \end{array}$$

1. Sea $f : \omega \times \omega \to \omega$ la aplicación definida por:

   $$f(n,m) = \left(\begin{array}{c} n+m+1 \\ 2 \end{array} \right) + n$$

   Probar que:

   (a) f es biyectiva.

   (b) f es monótona sobre ω.

2. Probar que no existe ninguna aplicación monótona sobre $\omega.2$.
3. Definir una aplicación monótona sobre ω^2. (Usar la aplicación del apartado (1)).
4. Sea F una función monótona sobre **Ord**. Diremos que $\ggg$ es un punto crítico para F si $F[\gamma \times \gamma] \subseteq \gamma$. Probar que si γ es un punto crítico para F, entonces existe ξ tal que $\gamma = \omega^\xi$.
5. Probar que existe una función monótona sobre **Ord** tal que todo ordinal de la forma ω^ξ es un punto crítico.

8.6.9 Sea $f : \omega \times \omega \to \omega$ la aplicación definida por:

$$f(n,m) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{si } (n,m) = (0,0); \\ \left(\begin{array}{c} n+m+1 \\ 2 \end{array} \right) + n, & \text{si } (n,m) \neq (0,0). \end{array} \right.$$

1. Probar que f es biyectiva.

2. Probar que existen aplicaciones suprayectivas $g, h : \omega \to \omega$ tales que:

   (a) $f(g(n), h(n)) = n$.

   (b) $g(n) \leq n$.

   (c) $h(n) \leq n$.

3. Sea $\omega^{<\omega} = \bigcup\{\omega^n : \; n \in \omega\}$. Definimos por recursión $F : \omega \to \omega^{<\omega}$

   $F(0) = id_\omega$
   $F(n+1) : \omega^{n+2} \to \omega$ es la aplicación definida por
   $$F(n+1)(g) = \begin{cases} f(F(n)(g \restriction (n+1), g(n+1)), & \text{si } F(n) : \omega^{n+1} \to \omega \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

   Probar que para todo $n > 0$, $F(n)$ es una aplicación biyectiva de ω^{n+1} en ω.

4. Definimos $F' : \omega^{n+1} \times \omega^{n+1} \to \omega^{n+1}$ como sigue: Si $g, h \in \omega^{n+1}$, entonces $F'(g, h)$ es la aplicación de $n+1$ en ω definida por

   $$F'(g, h)(m) = f(g(m), h(m)).$$

   Probar que F' es biyectiva.

5. Definimos $F^* : \omega^\omega \times \omega^\omega \to \omega^\omega$ como sigue: Si $g, h \in \omega^\omega$, $F^*(g, h)$ es la aplicación de ω en ω definida por:

   $$F^*(g, h)(m) = f(g(m), h(m)).$$

   Probar que F^* es biyectiva.

6. Definimos $G : \omega^{<\omega} - \{0\} \to \omega$ como sigue: Si $g \in \omega^{<\omega} - \{0\}$ (por tanto, ($g \in \omega^{n+1}$) para algún $n \in \omega$), entonces

   $$G(g) = f(n, F(n)(g)).$$

   Probar que G es biyectiva.

7. Sea $G' : \omega^{<\omega} \to \omega$ la aplicación definida por:

   $$G'(g) = \begin{cases} 0, & \text{si } g = \emptyset \\ G(g) + 1, & \text{si } g \neq \emptyset \end{cases}$$

   Probar que G' es biyectiva.

8. Definimos $F'' : \omega^\omega \to (\omega^\omega)^\omega$ como sigue: Si $g \in \omega^\omega$, entonces $F''(g) : \omega \to \omega^\omega$ está definida por:

$$F''(g)(n)(m) = g(f(n, m))$$

Probar que F'' es biyectiva.

8.6.10 Sea $F : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ la aplicación definida por $F(\alpha) = \omega.\alpha$ y $A = \{\alpha : F(\alpha) = \alpha\}$.

1. Calcular $\bigcup A$ y demostrar que A es una clase propia.
2. Demostrar que existe un único isomorfismo $G : \langle \mathbf{Ord}, \in \rangle \cong \langle A, \in \rangle$.
3. Calcular $G(0)$, $G(1)$, $G(2)$ y $G(\omega)$.

8.7 Aritmética ordinal y conjuntos bien ordenados

8.7.1 Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Ord}$. Consideremos el conjunto

$$a = (\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\})$$

y la relación R en a definida por

$$\langle \gamma_1, \delta_1 \rangle R \langle \gamma_2, \delta_2 \rangle \leftrightarrow \delta_1 < \delta_2 \vee (\delta_1 = \delta_2 \wedge \gamma_1 < \gamma_2)$$

Demostrar:

1. $\langle a, R \rangle$ es un conjunto bien ordenado.
2. $t.o.(\langle a, R \rangle) = \alpha + \beta$.

8.7.2 Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Ord}$. Consideremos el conjunto

$$a = \alpha \times \beta$$

y la relación R en a definida por

$$\langle \gamma_1, \delta_1 \rangle R \langle \gamma_2, \delta_2 \rangle \leftrightarrow \delta_1 < \delta_2 \vee (\delta_1 = \delta_2 \wedge \gamma_1 < \gamma_2)$$

Demostrar:

1. $\langle a, R\rangle$ es un conjunto bien ordenado.
2. $t.o.(\langle a, R\rangle) = \alpha\beta$.

8.7.3 Sea

$$a = \{f : (f : \omega \to \omega) \wedge (\{n \in \omega : f(n) \neq 0\} \text{ es finito})\}$$

y la relación R en a definida por

$$fRg \leftrightarrow f \neq g \wedge f(n) < g(n),$$

donde $n = sup\{m : f(m) \neq g(m)\}$. Demostrar:

1. $\langle \omega, R\rangle$ es un conjunto bien ordenado.
2. Sea $f \in a$ la aplicación definida por

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 2; \\ 0, & \text{si } n \neq 2. \end{cases}$$

   Calcular el tipo de orden de la sección determinada por f.
3. Calcular el tipo de orden de $\langle a, R\rangle$.

8.7.4 Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Ord}$. Consideremos el conjunto

$$a = \{f : (f : \beta \to \alpha) \wedge (\{\delta \in \beta : f(\delta) \neq 0\} \text{ es finito})\}$$

y la relación R en a definida por

$$fRg \leftrightarrow (\exists\gamma)[\gamma = sup\{\delta \in \beta : f(\delta) \neq g(\delta)\} \wedge f(\gamma) < g(\gamma)]$$

Demostrar:

1. $\langle a, R\rangle$ es un conjunto bien ordenado.
2. $t.o.(\langle a, R\rangle) = \alpha^{\beta}$.

Capítulo 9

El teorema del buen orden y el axioma de elección

9.0.5 Demostrar que son equivalentes:

1. El axioma de elección.
2. Para cada familia $(a_i)_{i \in I}$ de conjuntos no vacíos, el producto cartesiano $\prod_{i \in I} a_i$ es no vacío.

9.0.6 Demostrar que son equivalentes:

1. El axioma de elección.
2. Para cada conjunto a de conjuntos no vacíos disjuntos dos a dos, existe un conjunto b que tiene uno y sólo un elemento en común con cada elemento de a.

9.0.7 Demostrar que son equivalentes:

1. El axioma de elección.
2. Toda relación binaria contiene una aplicación con el mismo dominio.

9.0.8 Demostrar que son equivalentes:

1. El axioma de elección.

2. (Lema de Zorn) Si $\langle x, < \rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado tal que

$$(\forall y \subseteq x)[\langle y, < \rangle \text{ totalmente ordenado} \implies y \text{ tiene cota superior}]$$

entonces x tiene un elemento maximal.

Capítulo 10

Conjuntos finitos y numerables

10.1 Conjuntos finitos

10.1.1 Demostrar que si $x \sim y$, entonces $\mathbf{P}(x) \sim \mathbf{P}(y)$.

10.1.2 Demostrar o refutar

$$y \subseteq x \wedge z \subseteq x \wedge y \sim z \to x - y \sim x - z.$$

10.1.3 Demostrar que si a es un conjunto finito, entonces existe una función de elección sobre a.

10.2 Conjuntos numerables

10.2.1 Demostrar que la aplicaciín $f : \omega \times \omega \to \omega$ definida por

$$f(m,n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n$$

es biyectiva y, por tanto, $\omega \times \omega$ es numerable.

10.2.2 Demostrar, usando el AE, que la unión de un conjunto numerable cuyos elementos son conjuntos numerables es un conjunto numerable.

10.3 Conjuntos no–numerables

10.3.1 Demostrar, definiendo una biyección, que son equipotentes:

1. $[0,1]$ y $(0,1)$.
2. $[0,1]$ y $[0,1)$.
3. $[0,1)$ y $(0,1]$.

10.3.2 Demostrar que los intervalos $[0,1]$, $(0,1)$,$[0,1)$ y $(0,1]$ son equipotentes.

10.3.3 Sean $a,b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Demostrar que los intervalos $[a,b]$, (a,b),$[a,b)$ y $(a,b]$ son equipotentes.

10.3.4 Sean $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $c < d$. Demostrar que $[a,b] \sim [c,d]$.

10.3.5 Demostrar, definiendo biyecciones que transformen racionales en racionales e irracionales en irracionales, que:

1. $[0,1) \sim [0,+\infty)$.
2. $(-1,0] \sim (-\infty,0]$.
3. $(-1,1) \sim \mathbb{R}$.

10.3.6 Sean $a,b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Demostrar que $[a,b] \sim \mathbb{R}$.

10.3.7 Demostrar que $(0,1) \sim {}^{\omega}2$.

10.3.8 Definir una aplicación biyectiva de $[0,1)^2$ en $[0,1)$.

10.3.9 Demostrar que $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$.

10.3.10 Sea $a \subseteq \mathbb{R}^2$. Demostrar que si a es numerable, entonces $\mathbb{R}^2 - a \sim \mathbb{R}$.

10.3.11 Sea $a \subseteq \mathbb{R}$. Demostrar que si a es numerable, entonces $\mathbb{R} - a \sim \mathbb{R}$.