



Lógica Informática. Grupo 3. Curso 2004/05.

Ejercicios de Lógica Proposicional. Temas 1, 2 y 3

Ejercicio 1.— Expresar mediante fórmulas proposicionales las siguientes afirmaciones. En cada caso indíquese el significado que se asigna a las variables proposicionales (p , q , etc.) utilizadas.

1. Si el sol brilla hoy, entonces no brillará mañana.
2. O Roberto tiene celos de Chari o no está de buen humor hoy.
3. Cuando la presión atmosférica baja, entonces llueve o nieva.
4. Si has leído los apuntes y has hecho los ejercicios, estás preparado para el examen. En caso contrario, tienes un problema.
5. No habrá cura para el cáncer salvo que se determine su causa y se encuentre un nuevo medicamento.
6. Si Pablo se encontró con Chari ayer, entonces tomaron café juntos o pasearon por el parque.
7. Juan duerme muchas horas y muy profundamente.
8. Mi hermana tiene un gato blanco y negro.

Ejercicio 2.— ¿Cuál de las siguientes fórmulas representa la proposición “Llegará en el tren de las 8:15 o en el de las 9:15, si llega en el primero, entonces tendrá tiempo para visitarnos”? Donde

p expresa “Llegará en el tren de las 8:15”

q expresa “Llegará en el tren de las 9:15”

r expresa “Tendrá tiempo para visitarnos”

1. $\neg p \rightarrow q \vee r$
2. $p \vee q \rightarrow r$
3. $(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge r)$
4. $p \vee \neg q \rightarrow r$
5. $(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r)$

Ejercicio 3.— ¿Cuáles de las siguientes proposiciones tienen la forma $(p \wedge q) \rightarrow r$?

1. Si no vas a la fiesta, entonces Chari, que ya está preparada, se enfadará contigo.
2. Haendel es un gran compositor y Vivaldi también.
3. Si la inflación sube y hay elecciones cerca, entonces las pensiones suben.
4. Llegará en el tren de las 8:15 o en el de las 9:15, si llega en el primero, entonces tendrá tiempo para visitarnos.

Ejercicio 4.— ¿Cuáles de las siguientes proposiciones pueden escribirse como $p \vee (q \wedge r)$, para p , q y r adecuados?

1. Si la inflación sube y hay elecciones cerca, entonces las pensiones suben.

2. Puedes nadar, o usar la sauna y la ducha.
3. Tienes que comprar pan, queso y vino.
4. Las plantas necesitan agua y alimento, pero no que les hablen.

Ejercicio 5.– Determinar todas las subfórmulas de:

- (a) $((\neg p \vee q) \vee (q \vee r))$
- (b) $(\neg(\neg(\neg p \vee p) \vee p) \vee q)$

Ejercicio 6.– Eliminar todos los paréntesis posibles de las siguientes fórmulas:

$$\begin{array}{ll} (((p \rightarrow q) \vee r) \rightarrow (p \wedge \neg p)) & (\neg(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge r)) \\ ((p \rightarrow (q \wedge r)) \rightarrow (\neg\neg p \wedge q)) & \neg((p \wedge p) \wedge (p \wedge p)) \\ (((p \vee q) \vee (r \vee s)) \rightarrow \neg p) & (p \rightarrow ((q \leftrightarrow s) \rightarrow p)) \end{array}$$

Ejercicio 7.– Escribir con paréntesis las siguientes fórmulas:

$$\begin{array}{ll} p \rightarrow q \leftrightarrow r \vee s & q \rightarrow \neg p \vee r \vee s \\ p \vee q \leftrightarrow \neg r \vee s & q \wedge \neg q \vee p \rightarrow r \end{array}$$

Ejercicio 8.– Dada una fórmula proposicional A , sean $s(A)$ el número de estancias de variables proposicionales en A y $b(A)$ el número de estancias de la conectiva \vee en A . Prueba que para toda fórmula A se verifica que $s(A) = b(A) + 1$.

Ejercicio 9.– Prueba que existe una única función L que a cada fórmula proposicional, A , le asocia un número natural, $L(A)$, como sigue:

$$L(p) = 1 \text{ si } p \in VP.$$

$$L(\neg A) = L(A) + 1.$$

$$L((A \vee B)) = L(A) + L(B) + 3.$$

¿Qué información nos proporciona $L(A)$ sobre la fórmula A ?

Ejercicio 10.– Un rey somete a un prisionero a la siguiente prueba: lo enfrenta a tres puertas, de las que el prisionero debe elegir una, y entrar en la habitación correspondiente. Se informa al prisionero que en dos de las habitaciones hay sendos tigres, y en la otra una dama. Como es natural, el prisionero debe elegir la puerta que le lleva a la dama (entre otras cosas, para no ser devorado por el tigre). Para ayudarlo, en cada puerta hay un letrero:

- puerta 1: en esta habitación hay un tigre
- puerta 2: en esta habitación está la dama
- puerta 3: en esta habitación está la dama

El prisionero se da cuenta inmediatamente de que los tres letreros no pueden ser verdaderos, y el rey le informa que al menos uno es falso. tras pensar unos minutos, el prisionero dice que, con todo, es imposible deducir lógicamente el resultado, pues la dama podría estar en cualquier habitación. tras comprobar el rey que esto es cierto, le informa que al menos dos letreros son falsos. el prisionero pudo así deducir la puerta correcta.

Se pide: Establecer una tabla para los valores de verdad de los tres letreros; en base a ella, justificar la historietta anterior, e indicar razonadamente la puerta que eligió el prisionero.

Ejercicio 11.– En una isla habitan dos tribus de nativos A y B. Todos los miembros de la tribu A siempre dicen la verdad, mientras que todos los que pertenecen a la tribu B siempre mienten. Llegamos a la citada isla y le preguntamos a un nativo si allí hay oro, a lo que nos responde:

“Hay oro en la isla si y sólo si yo siempre digo la verdad”.

¿Hay oro en la isla? ¿Podemos determinar a qué tribu pertenece el nativo que nos respondió?

Ejercicio 12.– Sea \circ una nueva conectiva de aridad 3, cuya función de verdad viene dada por:

p	q	r	$\circ(p, q, r)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

1. Expresa la nueva conectiva en función de \vee y \neg .
2. ¿Es posible expresar las conectivas \vee , \wedge , \rightarrow y \neg a partir de la nueva conectiva \circ ?
3. Propón una expresión del lenguaje natural que describa el significado de la conectiva \circ .

Ejercicio 13.– En cada uno de los siguientes casos, determinar todas las valoraciones que validan la fórmula correspondiente:

$$\begin{array}{ll}
 p \rightarrow (p \wedge r) & p \rightarrow (p \wedge \neg p) \rightarrow r \\
 p \rightarrow (q \rightarrow r \wedge q) & (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \rightarrow \neg q
 \end{array}$$

Ejercicio 14.– Para cada uno de los siguientes pares de fórmulas, decidir si son equivalentes:

1. $A \rightarrow B \rightarrow C$ y $A \wedge B \rightarrow C$
2. $A \rightarrow (B \wedge \neg C)$ y $A \rightarrow B \rightarrow C$
3. $\neg(A \leftrightarrow B)$ y $A \leftrightarrow \neg B$

Ejercicio 15.– Probar las siguientes equivalencias:

1. $A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$
2. $A \rightarrow B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$
3. $A \wedge B \equiv \neg(A \rightarrow \neg B)$
4. $A \wedge (B \rightarrow A) \equiv A$

Ejercicio 16.– Determina si los siguientes argumentos son lógicamente correctos:

1. Si Juan es comunista, entonces Juan es ateo. Juan es ateo. Por tanto, Juan es comunista.
2. Cuando tanto la temperatura como la presión atmosférica permanecen constantes, no llueve. La temperatura permanece constante. En consecuencia, en caso de que llueva, la presión atmosférica no permanece constante.
3. Siempre que un número x es divisible por 10, acaba en 0. El número x no acaba en 0. Luego, x no es divisible por 10.
4. Para que un número x sea divisible por 5, es necesario que el número acabe en 0. El número x no acaba en 0. Luego, x no es divisible por 5.
5. El número y es negativo si x es positivo. Cuando z es negativo, y también lo es. Por tanto, y es negativo siempre que o bien x sea positivo o bien z sea negativo.
6. En cierto experimento, cuando hemos empleado un fármaco A, el paciente ha mejorado considerablemente en el caso, y sólo en el caso, en que no se haya empleado también un fármaco B. Además, o se ha empleado el fármaco A o se ha empleado el fármaco B. En consecuencia, podemos afirmar que si no hemos empleado el fármaco B, el paciente ha mejorado considerablemente.

Ejercicio 17.– Determinar cuáles de las siguientes fórmulas son consecuencia lógica de la fórmula $A \wedge B$ y cuáles de $A \vee \neg B$: $A, \neg B \rightarrow A, \neg A \vee B, B \rightarrow \neg A$

Ejercicio 18.– Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

$$\begin{array}{ll} \{p \vee q\} \models p \rightarrow r & \{p \rightarrow q, q \rightarrow p \wedge r\} \models p \rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow r \\ \{p \wedge \neg p\} \models r \rightarrow r \vee q & \{p \wedge q \wedge r\} \models r \rightarrow \neg p \end{array}$$

Ejercicio 19.– Sea A una tautología. Determinar $T(\{A\})$.

Ejercicio 20.– Determinar, usando formas normales conjuntivas y formas normales disyuntivas, cuáles de las siguientes fórmulas son tautologías y cuáles satisfactibles:

$$p \rightarrow (p \vee p), \quad (p \leftrightarrow q) \vee p, \quad p \rightarrow p \rightarrow q \rightarrow p, \quad p \rightarrow r \vee q \rightarrow r \rightarrow r$$

Ejercicio 21.– Usar el método de los tableros semánticos para decidir si las siguientes fórmulas son tautologías o no:

$$\begin{array}{lll} (p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow p \wedge q) & (p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow (q \vee q)) & p \leftrightarrow p \vee p \\ (p \wedge q) \leftrightarrow ((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \vee q)) & (p \wedge q) \leftrightarrow p & p \rightarrow (p \rightarrow \neg p) \end{array}$$

Ejercicio 22.– ¿Es cierto, en general, que si una fórmula A admite un tablero completo con todas las hojas abiertas, entonces A es una tautología?

Ejercicio 23.– Utilizar el método de los tableros semánticos para decidir la validez de las afirmaciones del ejercicio 18.

Ejercicio 24.– Demostrar que la construcción del tablero modificada con el criterio de cerrar los nodos que contengan un par complementario de fórmulas (no necesariamente literales) también proporciona un método de decisión adecuado y completo para decidir la satisfactibilidad.

Ejercicio 25.– Para cada una de las siguientes fórmulas proposicionales, obtener una fórmula equivalente en forma normal disyuntiva y determinar todas las valoraciones que validan la fórmula:

$$(p \leftrightarrow q) \wedge r, \quad ((p \wedge q) \vee r) \wedge (\neg((p \vee r) \wedge (q \vee r))), \quad \neg(p \wedge q \wedge r) \vee ((p \wedge q) \vee r)$$

¿Cuáles de las fórmulas anteriores son satisfactibles? ¿Y cuáles son tautologías?

Ejercicio 26.– Sea $U = \{p \rightarrow (q \leftrightarrow r), r\}$. Decide, mediante tableros semánticos, si:

1. $U \models r \rightarrow (p \wedge q)$.
2. $U \models (r \wedge p) \rightarrow q$.
3. $U \models (s \vee p) \wedge (s \rightarrow q) \rightarrow q$.

Ejercicio 27.– Decide razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. Si existe un tablero completo cerrado con raíz la fórmula proposicional A , entonces todo tablero completo para A es cerrado.
2. Si existe un tablero completo abierto con raíz la fórmula proposicional A , entonces todo tablero completo para A es abierto.
3. Si A es una tautología, entonces cualquier hoja de un tablero completo para la fórmula A es abierta.
4. Si existe un tablero completo para A tal que todas sus hojas son abiertas, entonces la fórmula A es una tautología.
5. Dos tableros completos para una misma fórmula proposicional A siempre poseen el mismo número de ramas.

Ejercicio 28.– Sean A, B, C y D fórmulas proposicionales. Usando los teoremas de adecuación y completitud para tableros semánticos, demuestra que:

1. Si cada uno de los siguientes conjuntos de fórmulas $U_1 = \{A, \neg B\}$ y $U_2 = \{B, \neg C\}$ admite un tablero completo cerrado, entonces la fórmula $\neg(A \rightarrow C)$ admite un tablero completo cerrado.
2. Si cada uno de los conjuntos $U_1 = \{A, \neg B, \neg C\}$, $U_2 = \{B, \neg D\}$ y $U_3 = \{C, \neg D\}$ admite un tablero completo cerrado, entonces la fórmula $\neg(A \rightarrow D)$ admite un tablero completo cerrado.