Sistemas Dinámicos

Inteligencia Colectiva y Sistemas de Recomendación

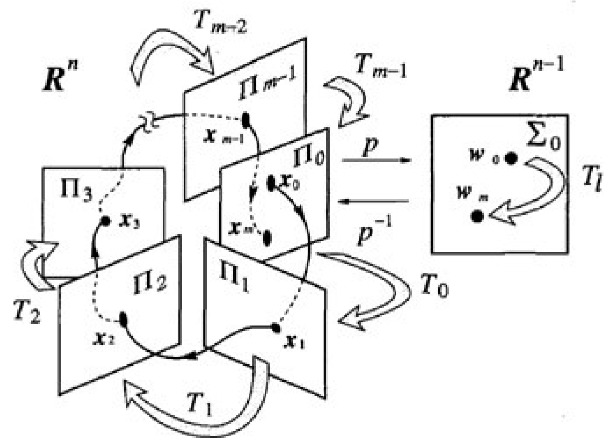
Master Propio en Data Science y Big Data

Sistemas Dinámicos: Primera Formalización para la Complejidad

Un sistema dinámico es una 3-tupla (T,M,Φ), donde

- T es el tiempo,
- M es un conjunto de posibles estados del sistema
- Φ es una función verificando:

$$\Phi : T \times M \to M \begin{cases} \Phi(0, x) = x \\ \Phi(t_2, \Phi(t_1, x)) = \Phi(t_2 + t_1, x) \end{cases}$$

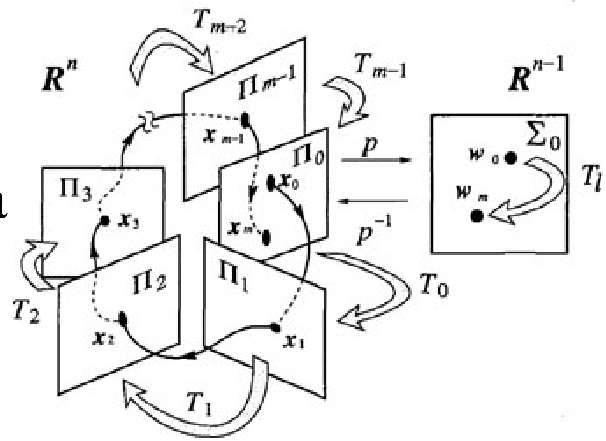


Sistemas Dinámicos: Primera Formalización para la Complejidad

Esencialmente, (T,M,Φ) produce una serie de aplicaciones de M en sí mismo.

Dada una condición inicial $x_0 = x(0)$, (T,M,Φ) produce una trayectoria determinista, $x(t)$, para cada t en T.

Habitualmente, o bien T es un intervalo de la recta real (y suele llamarse **flujo**), o bien los números naturales (y suele llamarse **mapeado**).

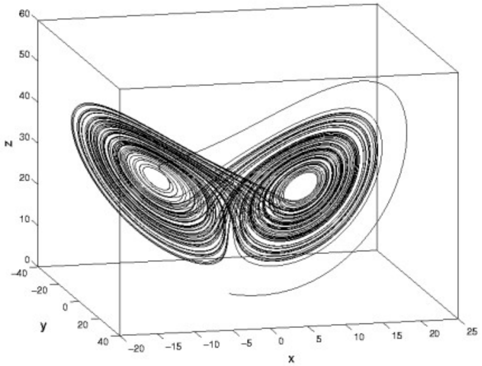


Sistema Dinámico = Tiempo + Estados + Determinismo

Expresiones habituales de SSDD

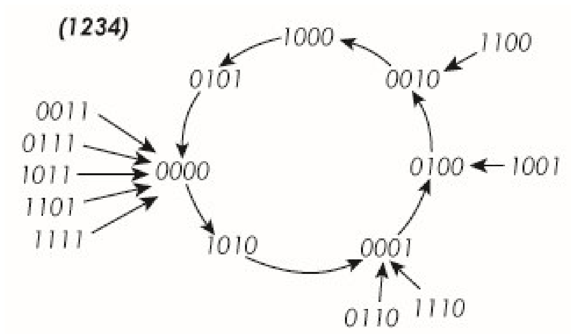
Cuando el sistema es **continuo**, suele ser habitual tenerlo representado por medio de **ecuaciones diferenciales**:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(x_1,\dots,x_n;\lambda_1,\dots,\lambda_m) \\
\vdots &= \qquad\qquad \vdots \\
\dot{x}_n &= f_n(x_1,\dots,x_n;\lambda_1,\dots,\lambda_m)
\end{aligned}
$$



Si el sistema es **discreto**, suele venir dado por una **ecuación iterativa**:

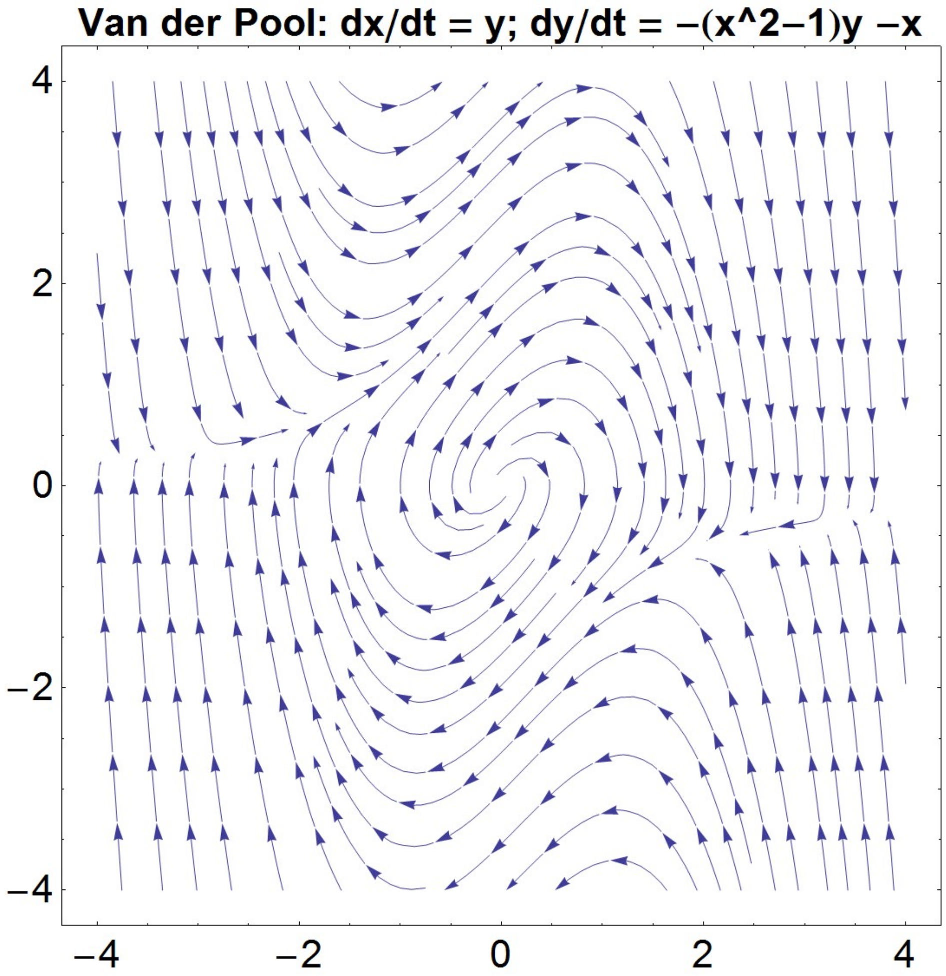
$$x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-m})$$



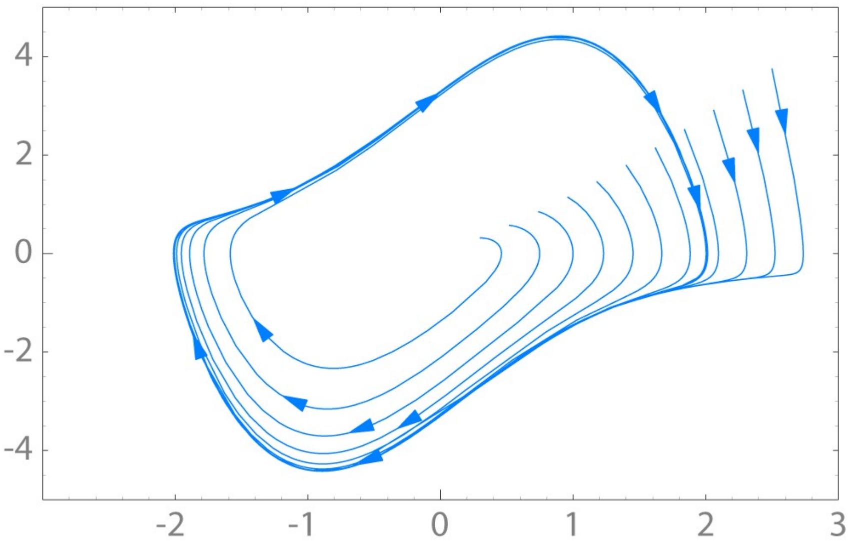
Ejemplo de flujo 2D

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -(x^2 - 1)y - x$$



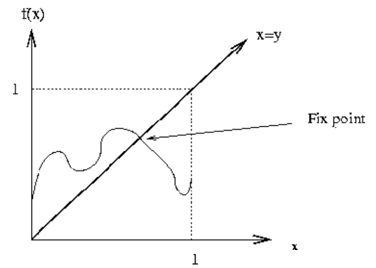
Atractores y Puntos Fijos



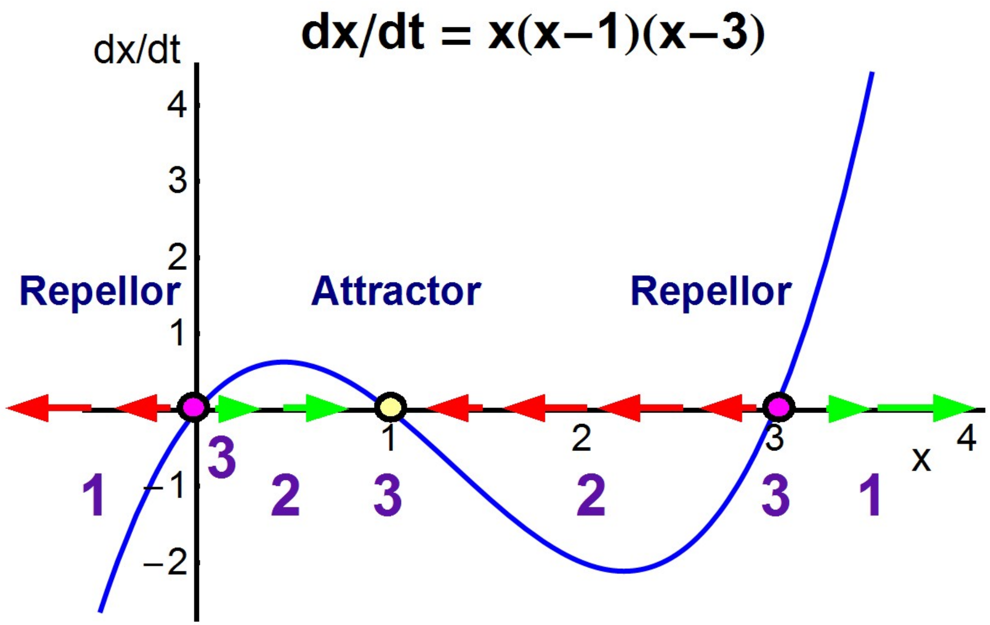
Definición: Un **atractor**, A, de un sistema dinámico (T,M,Φ) es un subconjunto de M tal que:

1. A es **invariante**: T(A) ⊆ A.
2. A **atrae un conjunto abierto de condiciones iniciales**, *U* : existe un abierto, U, tal que si $x(0) \in U$, entonces $x(t)$ se acerca a A con el tiempo. Al mayor abierto, *U*, verificando esta propiedad, se le llama **cuenca de atracción**.
3. A is **minimal**: no tiene ningún subconjunto propio verificando las condiciones anteriores.

Un **punto fijo** es un punto verificando: $T(x)=x$.



Puntos fijos en 1D

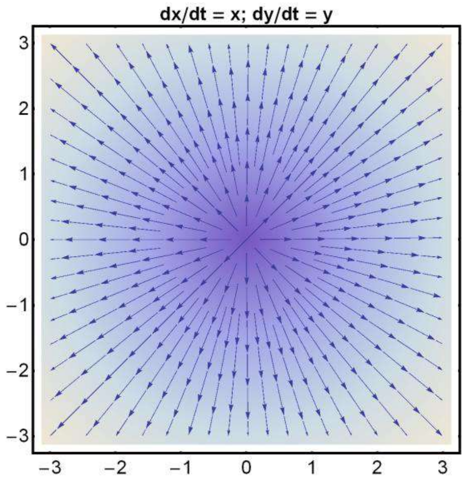


En dimensión 1, y con un sistema dinámico continuo que proviene de una ecuación diferencial, la cosas son fáciles y tenemos, esencialmente, dos opciones:

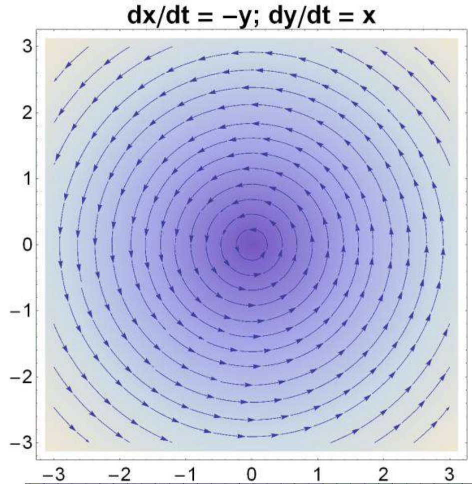
Los puntos fijos son atractores o repulsores

Puntos fijos en 2D

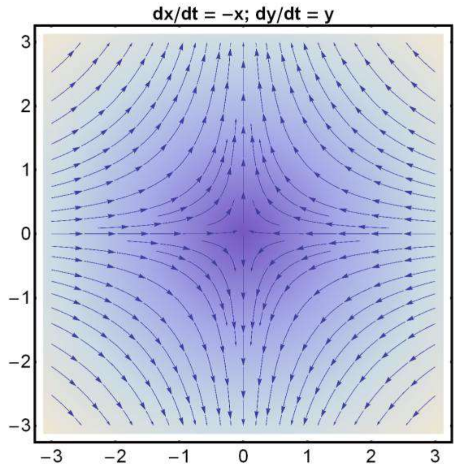
Punto Fijo

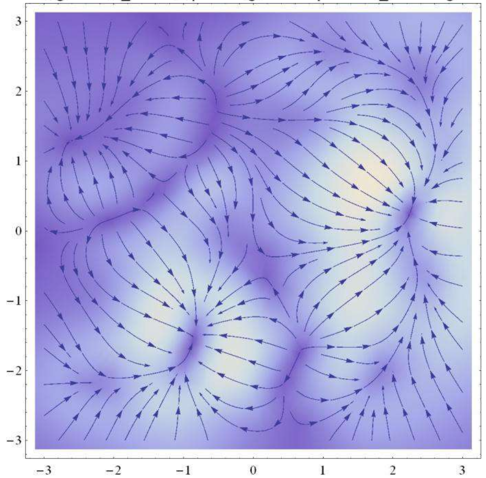


Oscilante



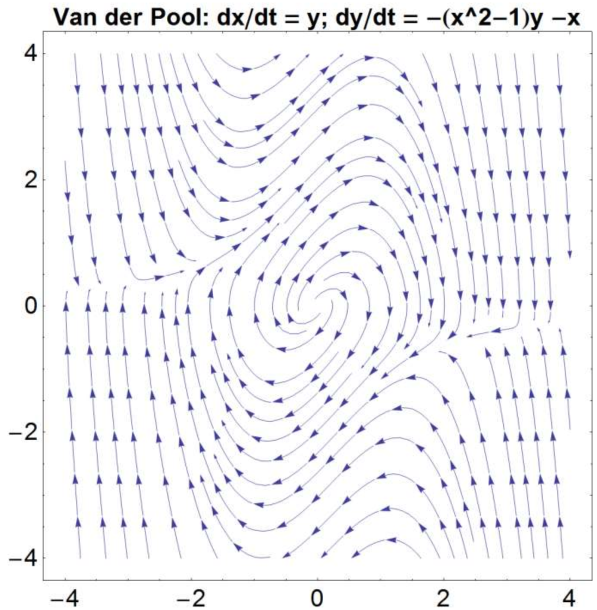
Punto de silla

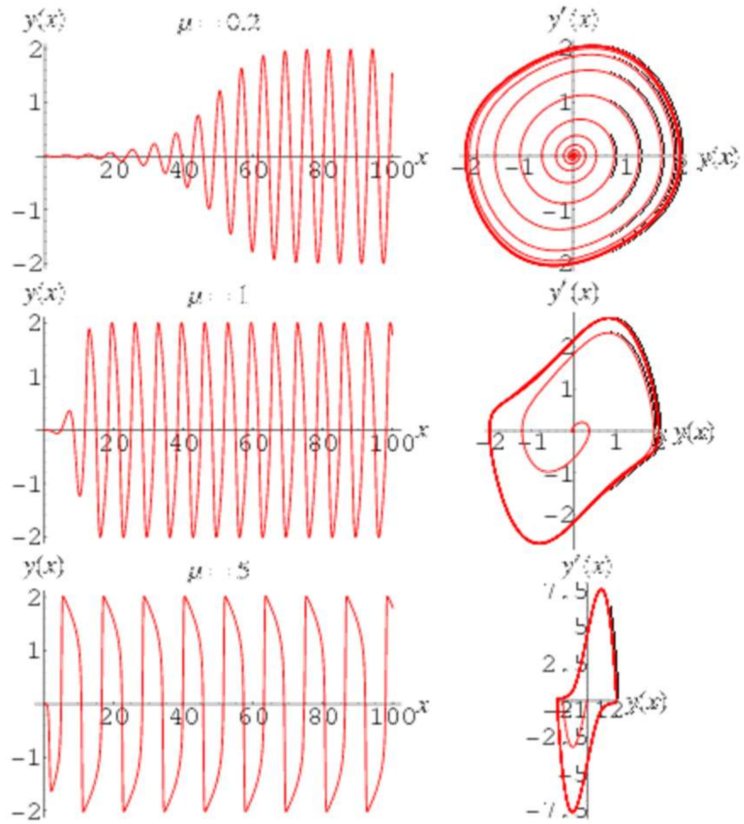




Mezcla de
Varios tipos

2D: Más complicado todavía…

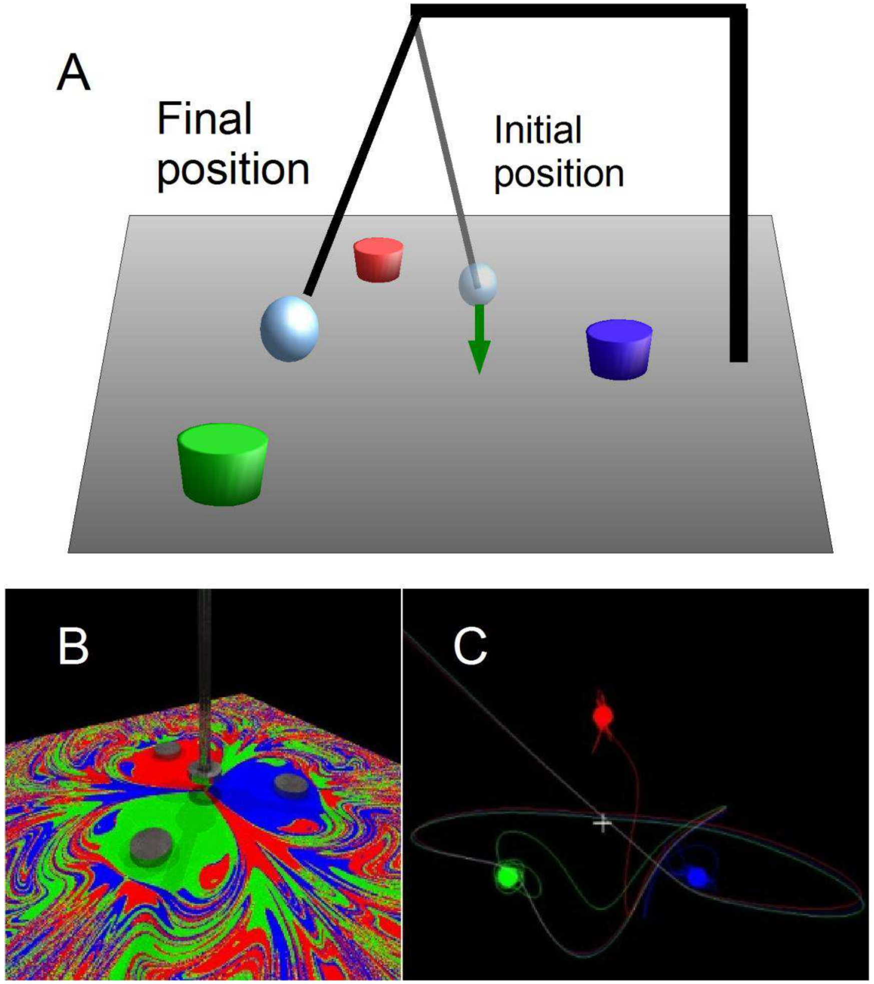




Junto a las oscilaciones y los puntos fijos, los sistemas 2D pueden presentar ciclos.

Teorema de Poincare-Bendixon: *En el plano, solo se presentan puntos fijos u órbitas cerradas.*

… ¿y qué ocurre en dimensiones superiores?



- 2 ángulos y 2 velocidades angulares: 4 variables.
- Se observa un movimiento caótico.
- Los atractores no son ni puntos, ni líneas, ni áreas. Son **atractores extraños** (fractales).

Determinismo Débil y Fuerte

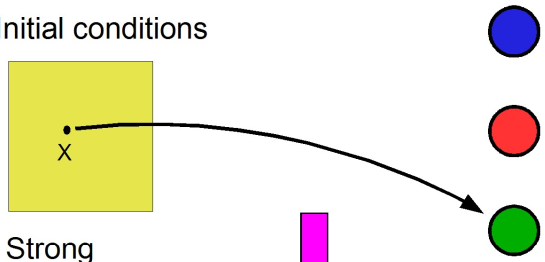
- **Determinismo Débil**: condiciones iniciales idénticas conllevan trayectorias idénticas.
- **Determinismo Fuerte**: Débil + condiciones iniciales "similares" conllevan órbitas cercanas.

Los sistemas que verifican el determinismo fuerte son "sencillos". Los que verifican únicamente el determinismo débil, a pesar de ser deterministas, pueden llegar a ser impredecibles.

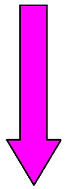
Determinismo Débil y Fuerte: Representación Geométrica

System with three fixed points.

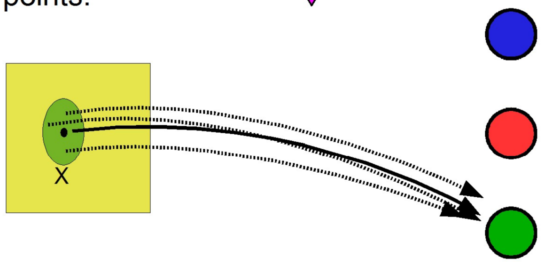
Initial conditions



Strong causality implies usually for almost all points:

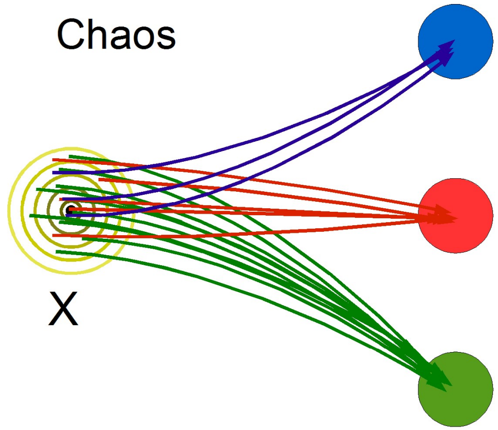


No CHAOS!



Means, if X goes green, so do his immediate buddies. This is true for almost all X's, except some borderliners. If X lifes in a n-dim space, the borderliners life on n-1 dim subsets.

Chaos



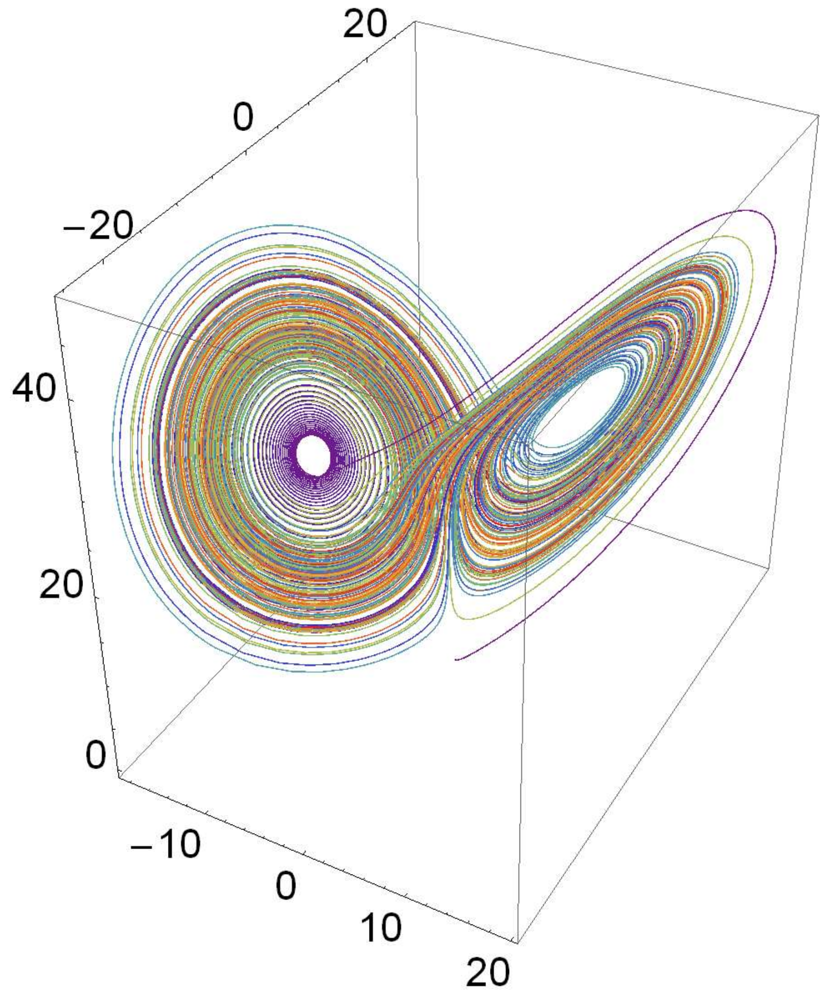
Despite the fate of X is determined in all, arbitrary small neighborhoods there are points going to another fixed point.

Un ejemplo: Curva de Lorenz

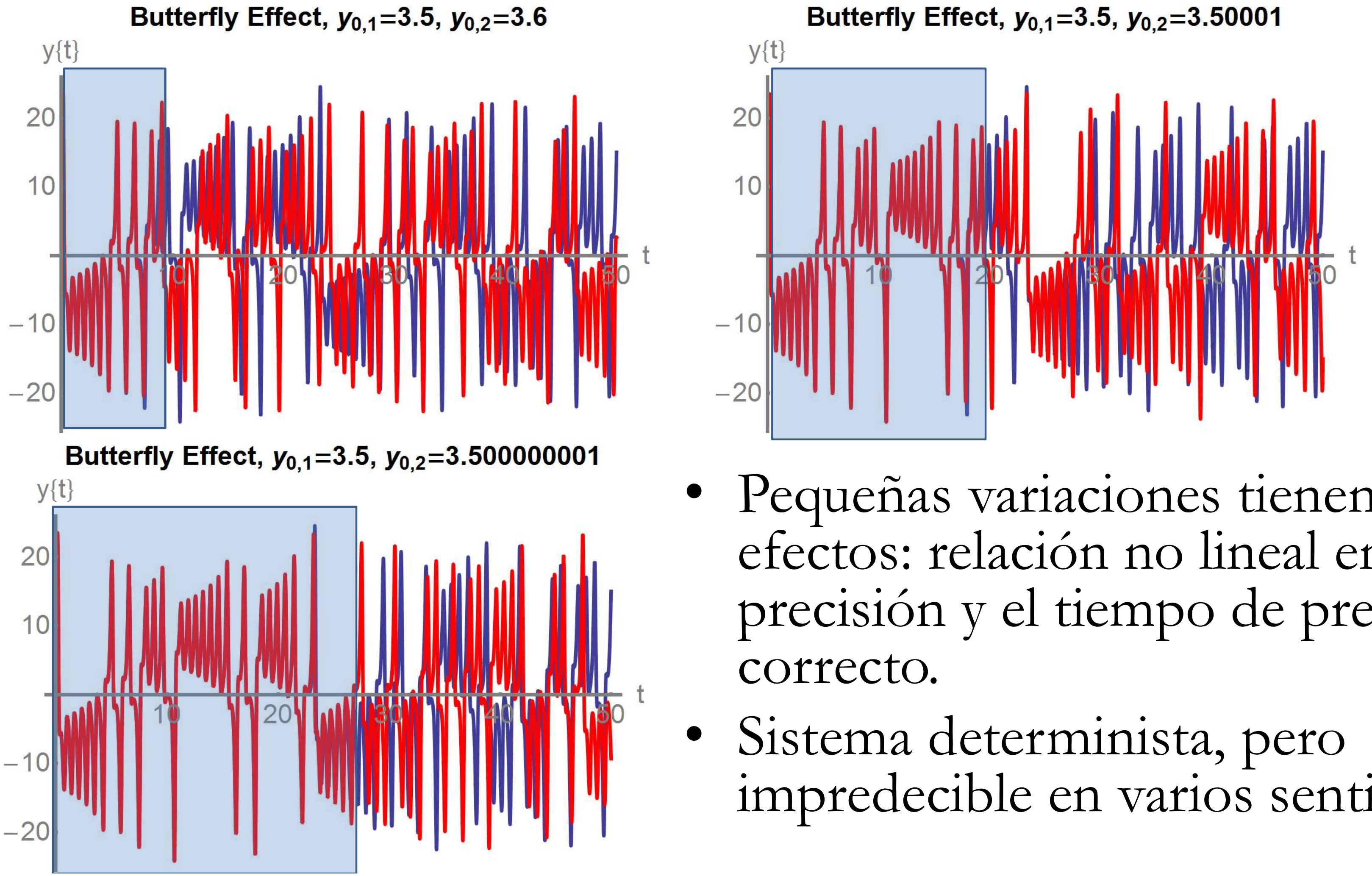
E. Lorenz creó un modelo para ciertos fenómenos meteorológicos.

Observó dependencia crítica de las condiciones iniciales: primera observación “real” de determinismo débil.

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$
$$\dot{y} = x(\rho - z) - y$$
$$\dot{z} = xy - \beta z$$



Atractor de Lorenz: efecto mariposa



- Pequeñas variaciones tienen grandes efectos: relación no lineal entre la precisión y el tiempo de predicción correcto.
- Sistema determinista, pero impredecible en varios sentidos.