Lógica Informática. (Tecnologías Informáticas) Curso 2017–2018

Relación 3:. Tableros Semánticos.

Ejercicio 34.– Sea F la fórmula proposicional $p \land q \leftrightarrow \neg p \lor r$.

1. Escribe un tablero completo para F y otro para $\neg F$.
2. Describe todos los modelos y todos los contramodelos de la fórmula F.
3. Calcula una FNC y una FND de F.

Ejercicio 35.– Responde a las siguientes preguntas usando Tableros Semánticos:

1. ¿Es $(p \lor q \to r) \land (t \to \neg r) \land \neg(\neg t \to q)$ satisfactible?
2. ¿Es $(p \lor q \to r) \to (\neg r \to \neg p)$ una tautología?
3. ¿ $\{p \to q,\, q \to r\} \models p \to r$?
4. ¿ $p \land q \to r \;\equiv\; q \to p \lor r$?

Ejercicio 36.– Sea $U = \{p \to (q \leftrightarrow r),\, r\}$. Decide, mediante tableros semánticos, si:

1. $U \models r \to (p \land q)$.
2. $U \models (r \land p) \to q$.
3. $U \models (s \lor p) \land (s \to q) \to q$.

Ejercicio 37.– Usando tableros semánticos, decide si las siguientes fórmulas son tautologías:

$$\begin{array}{ll} (p \to q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow (q \lor q)) & \qquad p \leftrightarrow p \lor p \\ (p \land q) \leftrightarrow p & \qquad p \to (p \to \neg p) \end{array}$$

Ejercicio 38.– Decide **razonadamente** si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. Si existe un tablero completo cerrado con raíz la fórmula proposicional F, entonces todo tablero completo para F es cerrado.
2. Si existe un tablero completo abierto con raíz la fórmula proposicional F, entonces todo tablero completo para F es abierto.
3. Si F es una tautología, cualquier hoja de un tablero completo para F es abierta.
4. Si existe un tablero completo para F tal que todas sus hojas son abiertas, F es una tautología.

Ejercicio 39.– Sean A, B, C y D fórmulas proposicionales. Usando los teoremas de correción y completitud para tableros semánticos, demuestra que:

1. Si cada uno de los siguientes conjuntos de fórmulas $U_1 = \{A, \neg B\}$ y $U_2 = \{B, \neg C\}$ admite un tablero completo cerrado, entonces la fórmula $\neg(A \to C)$ admite un tablero completo cerrado.

2. Si cada uno de los conjuntos $U_1 = \{A, \neg B, \neg C\}$, $U_2 = \{B, \neg D\}$ y $U_3 = \{C, \neg D\}$ admite un tablero completo cerrado, entonces la fórmula $\neg(A \to D)$ admite un tablero completo cerrado.

Ejercicio 40.– Alberto, Berta y Carlos son los tres sospechosos de un robo. Se les interroga por separado y éstas son sus declaraciones.

Alberto:	Berta es culpable y Carlos es inocente.
Berta:	Si Alberto es culpable, Carlos también.
Carlos:	Yo soy inocente, pero al menos uno de los otros dos es culpable.

1. Formaliza las declaraciones de los sospechosos en el lenguaje de la lógica proposicional.

2. ¿Son consistentes los testimonios de los tres?

3. El testimonio de un sospechoso se sigue lógicamente de los de los otros dos. ¿Cúal?

4. Se sabe que todos los culpables han mentido y todos los inocentes han dicho la verdad. ¿Quién es inocente y quién es culpable?

Ejercicio 41.– Prueba que $S = \{p \to q,\ \neg s \wedge r \to q,\ \neg q,\ q \leftrightarrow r \wedge s\}$ es satisfactible utilizando tableros semánticos.

Ejercicio 42.– Formaliza los siguientes argumentos y estudia su validez:

1. Si llueve las calles están vacías. Si las calles están vacías, los comercios obtienen pérdidas. Los músicos no podrían sobrevivir si los comerciantes no les contratasen para componer canciones para publicidad. Los comerciantes invierten en canciones publicitarias cuando tienen pérdidas. Por tanto, si llueve los músicos pueden sobrevivir.

2. Si el barco entra en el puerto, habrá una gran fiesta. El barco entra en el puerto sólo si necesita repostar combustible. El barco no necesita combustible a menos que venga de muy lejos. Es imposible que no necesite combustible si la comida ya se les ha terminado. Sabemos que, o bien se le ha terminado la comida, o bien necesita combustible. Por tanto: habrá una gran fiesta.

3. Si f es diferenciable en $[a, b]$, es continua y acotada en $[a, b]$. Si f no fuese acotada en $[a, b]$ no podrá ser diferenciable en $[a, b]$. Por tanto: si f es discontinua y acotada en $[a, b]$ no es diferenciable en $[a, b]$.

4. Si llueve no iré al mercado. Si no iré al mercado, o bien no tendré comida o bien iré al restaurante. Llueve y tengo comida. Por lo tanto, no iré al restaurante.

Ejercicio 43.– En un texto de Lewis Carroll, el tio Jorge y el tío Jaime discuten acerca de la barbería del pueblo, atendida por tres barberos: Alberto, Benito y Carlos. Los dos tíos aceptan las siguientes premisas:

1. Si Carlos no está en la barbería, entonces ocurrirá que si tampoco está Alberto, Benito tendrá que estar para atender el establecimiento.
2. Si Alberto no está, tampoco estará Benito.

El tío Jorge concluye de todo esto que Carlos no puede estar ausente, mientras que el tío Jaime afirma que sólo puede concluirse que Carlos y Alberto no pueden estar ausentes a la vez. ¿Cuál de los dos tiene razón?

Ejercicio 44.– Las guerras clon han comenzado. Durante el transcurso de una refriega, tres caballeros Jedi, Anakin, Obi Wan y Yoda, se encuentran con el conde Dooku. Utilizaremos el lenguaje proposicional A, O, Y para denotar que el correspondiente caballero participa en el combate, y G para denotar los Jedi han ganado.

1. Formaliza las siguientes afirmaciones:

   F_1 : Para derrotar al conde Dooku deben participar al menos dos caballeros Jedi.

   F_2 : El Conde Dooku gana cuando sólo participa un caballero.

   F_3 : Si el Conde Dooku pierde entonces Anakin ha participado en el combate.

   F_4 : Si el Conde Dooku pierde, entonces no han participado los tres caballeros.
2. ¿Es cierto que $\{F_1, F_2, F_3\} \models G \to A \wedge O$? Razona formalmente la respuesta.

Ejercicio 45.– En el lenguaje con igualdad $L = \{a, f\}$, siendo f un símbolo de función de aridad 1 y a una constante, se consideran las siguientes fórmulas:

$$\begin{array}{ll} \varphi_1 : & \forall x(f(x) \neq a) \\ \varphi_2 : & \forall x \forall y(f(x) = f(y) \to x = y) \\ \varphi_3 : & \forall x(x \neq a \to \exists y(f(y) = x)) \end{array}$$

Prueba que ninguna de estas fórmulas es consecuencia lógica de las demás mediante tableros semánticos.

Ejercicio 46.– Decide utilizando tableros semánticos, cuáles de los siguientes conjuntos de fórmulas son consistentes (suponemos que P, Q y R son predicados de la aridad correcta).

1. $\{\exists x\, Q(x),\ \forall x\, (Q(x) \to R(x)),\ \forall x \neg R(x)\}$
2. $\{\exists y \forall x\, P(x, y),\ \forall x \neg P(x, x)\}$

3. $\{\forall x \forall y\,(P(x,y) \to P(y,x)),\ \forall x \neg P(x,x),\ \exists x \exists y\, P(x,y)\}$

4. $\{\forall x \exists y\, P(x,y),\ \forall x \neg P(x,x)\}$

Ejercicio 47.– Determina si son ciertas las siguientes afirmaciones utilizando tableros semánticos:

1. $\models \exists x P(x) \to P(a)$, ($a$ símbolo de constante).

2. $\{\forall x\,(P(x) \to Q(x)),\ \forall y\,(Q(a) \lor R(y) \to S(a))\} \models \forall x\,(P(x) \to S(a))$.

Ejercicio 48.– Decide mediante tableros si son correctas o no las siguientes deducciones:

1. $\{\forall x\,(P(x) \to Q(x))\} \models \forall x\, P(x) \to \forall x\, Q(x)$

2. $\{\forall x\, P(x) \to \forall x\, Q(x)\} \models \forall x\,(P(x) \to Q(x))$

3. $\{\neg\forall x\,(P(x) \land Q(x))\} \models \exists x \neg P(x) \land \exists x \neg Q(x)$

4. $\{\forall x\,(P(x) \lor Q(f(x)))\} \models \forall x\,(P(x) \lor Q(x))$

Ejercicio 49.– Prueba mediante tableros semánticos:

$$\forall x\,(p(x) \land q(x)) \equiv \forall x\, p(x) \land \forall x\, q(x) \qquad \exists x(p(x) \lor q(x)) \equiv \exists x p(x) \lor \exists x q(x)$$
$$\forall x(p(x) \lor q(x)) \not\equiv \forall x p(x) \lor \forall x q(x) \qquad \exists x(p(x) \land q(x)) \not\equiv \exists x p(x) \land \exists x q(x)$$

Ejercicio 50.– Determina, mediante tableros semánticos, cuáles de las siguientes fórmulas son lógicamente válidas y cuáles insatisfactibles (en cada caso, los símbolos de predicado p y q tienen la aridad adecuada):

1. $\forall x \forall y(p(x) \lor q(y)) \lor \exists x \exists y(\neg p(x) \land \neg q(y))$
2. $\exists x \exists y p(x,y) \lor \neg\exists x p(x,x)$
3. $\forall x p(x,x) \to \exists x \forall y(p(x,y) \to p(y,x))$
4. $\exists x \forall y(p(x,y) \leftrightarrow \neg p(y,y))$
5. $\neg\exists x \exists y p(x,y) \lor \exists x p(x,x)$
6. $\forall x \forall y(p(x,y) \lor \neg p(y,x))$
7. $\forall x p(x,x) \to \forall x \exists y(p(x,y) \to p(y,x))$
8. $\exists x \forall y(p(x,y) \leftrightarrow \neg\exists z(p(y,z) \land p(z,y)))$

Ejercicio 51.– Sea U el conjunto formado por las siguientes fórmulas de la LPO con igualdad:

- $\forall x\, \forall y\, \forall z\,(x \star (y \star z)) = (x \star y) \star z)$
- $\forall x\, \exists y\,(x \star y = e)$.
- $\forall x\,(x \star e = x \land e \star x = x)$

Prueba mediante tableros que:

1. $U \models \forall x\,(\forall y\,(x \star y = y) \to x = e)$.

2. $U \models \forall x\, \exists y\, (y \star x = e)$.

Ejercicio 52.– Prueba mediante tableros que:

1. $\{\forall x\, \exists y\, (f(y) = x),\ \forall x\, (g(f(x)) = x)\} \models \forall y\, (f(g(y)) = y)$.
2. $\{\forall x\, \neg(S(x) = 0),\ \forall x\, \forall y\, (S(x) = S(y) \to x = y)\} \models \neg(S(S(S(0))) = S(0))$
3. $\{\forall x\, (x + 0 = x),\ \forall x\, \forall y\, (x + S(y) = S(x + y))\} \models S(0) + S(S(0)) = S(S(S(0)))$.