

Relación 4: Algoritmo DPLL y Teorema de Herbrand.

Ejercicio 53.— Alberto, Berta y Carlos son los tres sospechosos de un robo. Se les interroga por separado y éstas son sus declaraciones.

Alberto: Berta es culpable y Carlos es inocente.

Berta: Si Alberto es culpable, Carlos también.

Carlos: Yo soy inocente, pero al menos uno de los otros dos es culpable.

1. Formaliza las declaraciones de los sospechosos en el lenguaje de la lógica proposicional.
2. ¿Son consistentes los testimonios de los tres?
3. El testimonio de un sospechoso se sigue lógicamente de los de los otros dos. ¿Cuál?
4. Se sabe que todos los culpables han mentido y todos los inocentes han dicho la verdad. ¿Quién es inocente y quién es culpable?

Ejercicio 54.— Consideremos el conjunto de fórmulas

$$U = \{r \leftrightarrow p \vee q, s \rightarrow p, \neg s \wedge \neg r \rightarrow s \vee t\}.$$

1. Obtener una forma clausal de U .
2. Pruébese utilizando el algoritmo DPLL que $U \not\models p$. ¿Qué modelo nos proporciona el algoritmo?
3. Pruébese, mediante DPLL, que $U \models \neg p \rightarrow (q \vee t)$.
4. Pruébese, usando los apartados 2. y 3., que $U \not\models \neg q \wedge \neg t$.

Ejercicio 55.— Sea S el siguiente conjunto de fórmulas proposicionales:

$$\{p \vee q \rightarrow m, m \wedge (s \vee r) \rightarrow u, u \wedge w \rightarrow j, u \wedge r \rightarrow v, p \wedge s \wedge r \rightarrow v, \neg v\}$$

Decide, usando el algoritmo DPLL, si S es consistente. Y en caso de que lo sea, explicita el modelo que se encuentra al aplicar el algoritmo.

Ejercicio 56.— Sean $S = \{p \rightarrow q, \neg s \wedge r \rightarrow q, \neg q, q \leftrightarrow r \wedge s\}$. Obtener todos los modelos de S por medio de DPLL.

Ejercicio 57.— Decide, usando el algoritmo DPLL, si el siguiente conjunto de cláusula, S , es satisfactible. Y en caso de que lo sea, explicita el modelo que se encuentra al aplicar el algoritmo.

- 1.— $p \vee \neg q \vee r \vee \neg s \vee \neg t$
- 2.— $p \vee r \vee s \vee t$
- 3.— $p \vee \neg r \vee s$
- 4.— $p \vee r \vee \neg s \vee t$
- 5.— $p \vee \neg r \vee \neg s$
- 6.— $\neg p \vee \neg q$
- 7.— $\neg q \vee r \vee s \vee \neg t$
- 8.— $s \vee \neg t$

Ejercicio 58.— Probar la corrección del siguiente argumento utilizando el algoritmo DPLL:

1. *Los animales con pelo o que dan leche son mamíferos.*
2. *Los mamíferos que tienen pezuñas o que rumian son ungulados.*
3. *Los ungulados de cuello largo son jirafas.*
4. *Los ungulados con rayas negras son cebras.*

Se observa un animal que tiene pelos, pezuñas y rayas negras. Por tanto, el animal es una cebra.

Ejercicio 59.— Formaliza los siguientes argumentos y estudia su validez haciendo uso de DPLL:

1. Si llueve las calles están vacías. Si las calles están vacías, los comercios obtienen pérdidas. Los músicos no podrían sobrevivir si los comerciantes no les contratasen para componer canciones para publicidad. Los comerciantes invierten en canciones publicitarias cuando tienen pérdidas. Por tanto, si llueve los músicos pueden sobrevivir.
2. Si el barco entra en el puerto, habrá una gran fiesta. El barco entra en el puerto sólo si necesita repostar combustible. El barco no necesita combustible a menos que venga de muy lejos. Es imposible que no necesite combustible si la comida ya se les ha terminado. Sabemos que, o bien se le ha terminado la comida, o bien necesita combustible. Por tanto: habrá una gran fiesta.
3. Si f es diferenciable en $[a, b]$, es continua y acotada en $[a, b]$. Si f no fuese acotada en $[a, b]$ no podrá ser diferenciable en $[a, b]$. Por tanto: si f es discontinua y acotada en $[a, b]$ no es diferenciable en $[a, b]$.
4. Si llueve no iré al mercado. Si no iré al mercado, o bien no tendré comida o bien iré al restaurante. Llueve y tengo comida. Por lo tanto, no iré al restaurante.

Ejercicio 60.— Ash, Misty y Brock han organizado una batalla entre sus *Pokemon*. Se conocen los siguientes datos al respecto:

- a) *Uno, y sólo uno, de los siguientes Pokemon fue el vencedor: Pikachu, Bulbasaur, Togepi, Starmie, Vulpix y Onix.*
- b) *Ash ganó la batalla si el Pokemon vencedor fue Pikachu o Bulbasaur.*
- c) *Si o bien Togepi o bien Starmie fue el vencedor, Misty ganó la batalla.*
- d) *Brock ganó la batalla si el vencedor fue Onix o Vulpix.*
- e) *Si Onix fue derrotado, Starmie también.*
- f) *Bulbasaur fue derrotado.*
- g) *Si Pikachu fue derrotado, entonces Ash no ganó la batalla.*
- h) *Brock no ganó la batalla si Bulbasaur fue derrotado.*
- i) *Si Vulpix fue derrotado, Togepi y Onix también corrieron la misma suerte.*

Utiliza el algoritmo DPLL para probar que Ash fue el ganador.

Ejercicio 61.— Las guerras clon han comenzado. Durante el transcurso de una refriega, tres caballeros Jedi, Anakin, Obi Wan y Yoda, se encuentran con el conde Dooku. Utilizaremos el lenguaje proposicional A, O, Y para denotar que el correspondiente caballero participa en el combate, y G para denotar los Jedi han ganado.

1. Formaliza las siguientes afirmaciones:

F_1 : Para derrotar al conde Dooku deben participar al menos dos caballeros Jedi.

F_2 : El Conde Dooku gana cuando sólo participa un caballero.

F_3 : Si el Conde Dooku pierde entonces Anakin ha participado en el combate.

F_4 : Si el Conde Dooku pierde, entonces no han participado los tres caballeros.

2. ¿Es cierto que $\{F_1, F_2, F_3\} \models G \rightarrow A \wedge O$? Razónese formalmente la respuesta.

Ejercicio 62.— Obtener formas clausales de las siguientes fórmulas:

1. $\forall x [P(x) \rightarrow P(x)]$
2. $\neg[(\forall x)P(x)] \rightarrow (\exists x)[\neg P(x)]$
3. $\neg(\forall x)[P(x) \rightarrow [(\forall y)[P(y) \rightarrow P(f(x, y))]] \wedge \neg(\forall y)[Q(x, y) \rightarrow P(y)]$
4. $(\forall x)(\exists y)[[P(x, y) \rightarrow Q(y, x)] \wedge [Q(x, y) \rightarrow S(x, y)]] \rightarrow (\exists x)(\forall y)[P(x, y) \rightarrow S(x, y)]$

Ejercicio 63.— Obtener formas prenex, de Skolem y clausal de la fórmula:

$$\forall x \exists v \forall u [Q(u, x) \rightarrow (\exists y P(u, y) \rightarrow \exists y (Q(y, v) \wedge P(u, y)))]$$

Ejercicio 64.— Introduciendo la notación apropiada, escribir las sentencias de los siguientes razonamientos como fórmulas de primer orden y decidir si la conclusión es consecuencia lógica de las premisas, utilizando para ello formas clausales.

1. Todos los científicos están locos. No existen vegetarianos locos. Por tanto, no existen científicos vegetarianos.
2. Todos los hombres son animales. Algunos animales son carnívoros. Por tanto, algún hombre es carnívoro.
3. Todo barbero de esta ciudad afeita exactamente a los hombres que no se afeitan a si mismos. Por tanto, no existen barberos en esta ciudad.
4. Para cualesquiera x e y , si $x > y$ e $y > z$, entonces $x > z$. Además, $x > x$ es falso para cualquier x . Por tanto, para cualesquiera x e y , si $x > y$, entonces no es posible que $y > x$.

Ejercicio 65.— Para cada una de las siguientes fórmulas, encontrar una forma de Skolem y un subconjunto finito de su extensión de Herbrand que sea inconsistente.

1. $\exists x \forall y (p(x, y) \leftrightarrow \neg p(y, y))$
2. $\exists x \forall y [p(x, y) \leftrightarrow \neg \exists z (p(y, z) \wedge p(z, y))]$.

Ejercicio 66.— Consideremos las siguientes fórmulas

$$\begin{aligned}\varphi_1 : & \quad \forall x [p(c) \wedge \neg p(f(c)) \wedge p(f(f(f(c)))) \wedge (\neg p(x) \vee p(f(f(x))))] \\ \varphi_2 : & \quad \forall x [p(c) \wedge \neg p(f(c)) \wedge p(f(f(f(f(c)))) \wedge (\neg p(x) \vee p(f(f(x))))]\end{aligned}$$

1. Probar que φ_1 es satisfactible.
2. Probar que φ_2 es insatisfactible. Dar un conjunto de la extensión de Herbrand de su matriz que sea inconsistente.

Ejercicio 67.— En el lenguaje con igualdad $L = \{a, f\}$, siendo f un símbolo de función de aridad 1 y a una constante, se consideran las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}\varphi_1 : & \quad \forall x (f(x) \neq a) \\ \varphi_2 : & \quad \forall x \forall y (f(x) = f(y) \rightarrow x = y) \\ \varphi_3 : & \quad \forall x (x \neq a \rightarrow \exists y (f(y) = x))\end{aligned}$$

Probar que ninguna de estas fórmulas es consecuencia lógica de las demás mediante el teorema de Herbrand.

Ejercicio 68.— Determinar si son ciertas las siguientes afirmaciones, utilizando en ambos casos el teorema de Herbrand:

1. $\models \exists x P(x) \rightarrow P(a)$, (a símbolo de constante).
2. $\{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \forall y (Q(a) \vee R(y) \rightarrow S(a))\} \models \forall x (P(x) \rightarrow S(a))$.