Tema 2: Tableros Semánticos

Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

Lógica Informática
(Tecnologías Informáticas)
Curso 2019–20

Contenido

Introducción

- Algoritmo para estudiar la satisfactibilidad de un conjunto de fórmulas proposicionales y de primer orden.
- Trabaja directamente sobre el conjunto de fórmulas, **sin preprocesamiento**.
- Basado en la sintaxis de las fórmulas.
- Reduce la satisfactibilidad de las formulas consideradas a la de ciertos conjuntos de literales, que proporcionan modelos.
- Se representará gráficamente mediante un árbol binario.
- Es muy flexible y puede adaptarse a otras lógicas (descriptivas, modales, etc.).

Tableros Semánticos en LP

El método de tableros semánticos en LP:

1. Clasifica las fórmulas en dos clases:
   - Las fórmulas α, que se comportan como conjunciones.
   - Las fórmulas β, que se comportan como disyunciones.
2. Asocia a cada fórmula, F, otras dos fórmulas más sencillas (sus **componentes**) de modo que la satisfactibilidad de F se reduce a la de sus componentes.

Fórmulas de tipo α

Las fórmulas de tipo α son las siguientes:

α	α_1	α_2
$\neg\neg F$	F	
$F_1 \wedge F_2$	F_1	F_2
$\neg(F_1 \vee F_2)$	$\neg F_1$	$\neg F_2$
$\neg(F_1 \rightarrow F_2)$	F_1	$\neg F_2$
$F_1 \leftrightarrow F_2$	$F_1 \rightarrow F_2$	$F_2 \rightarrow F_1$

- Las fórmulas α_1 y α_2 son las componentes de α.
- Si F es de tipo α, entonces $F \equiv \alpha_1 \wedge \alpha_2$.
- Para satisfacer una fórmula de tipo α es necesario y suficiente satisfacer **simultáneamente** sus dos componentes α_1 y α_2.

Fórmulas de tipo β

Las fórmulas de tipo β son las siguientes:

β	β_1	β_2
$F_1 \vee F_2$	F_1	F_2
$\neg(F_1 \wedge F_2)$	$\neg F_1$	$\neg F_2$
$(F_1 \to F_2)$	$\neg F_1$	F_2
$\neg(F_1 \leftrightarrow F_2)$	$\neg(F_1 \to F_2)$	$\neg(F_2 \to F_1)$

- Las fórmulas β_1 y β_2 son las componentes de β.
- Si F es de tipo β, entonces $F \equiv \beta_1 \vee \beta_2$
- Para satisfacer una fórmula de tipo β es necesario y suficiente satisfacer sólo una de sus componentes β_1 y β_2.

Reglas α y β

Reducen la consistencia de un conjunto de fórmulas a la de otro conjunto formado por fórmulas más sencillas.

- **Regla** α: Si $F \in U$ es de tipo α, entonces

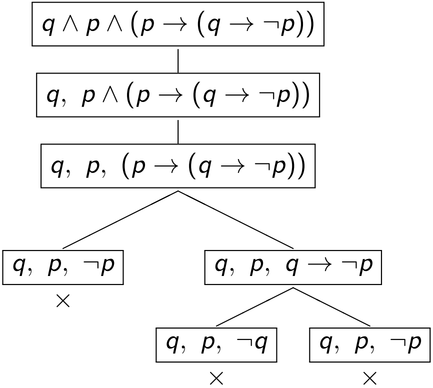
$$U \text{ satisfactible} \iff (U - \{F\}) \cup \{\alpha_1, \alpha_2\} \text{ satisfactible}$$

- **Regla** β: Si $F \in U$ es de tipo β, entonces

$$U \text{ satisfactible} \iff \begin{cases} (U - \{F\}) \cup \{\beta_1\} \text{ satisfactible} \\ \text{o} \\ (U - \{F\}) \cup \{\beta_2\} \text{ satisfactible} \end{cases}$$

Ejemplo

Tablero semántico para la fórmula $q \wedge p \wedge (p \rightarrow (q \rightarrow \neg p))$:



Construcción de un tablero completo

Un **tablero** para $\{A_1, \dots, A_n\}$ es un árbol T, con nodos etiquetados por conjuntos de fórmulas, que se ha construido siguiendo los siguientes pasos:

- La raíz r de T se etiqueta con $U_r = \{A_1, \dots, A_n\}$.
- Mientras T tenga hojas no marcadas, seleccionar una hoja n de T, con etiqueta U_n, no marcada, y hacer:
  1. Si U_n es un conjunto de literales, entonces:
     - 1.1 Si existe un par de literales complementarios en U_n, marcar con $\times$ (y se denomina **hoja cerrada**).
     - 1.2 Si no existe tal par, marcar con $\bigcirc$ (**hoja abierta**).
  2. Si U_n no es un conjunto de literales, elegir A de U_n no literal.
     - 2.1 Si A es una α–fórmula, entonces añadir un hijo m a n con $U_m = (U_n \setminus \{A\}) \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$.
     - 2.2 Si A es una β–fórmula, entonces añadir dos hijos n_1, n_2 con etiquetas $U_{n_1} = (U_n \setminus \{A\}) \cup \{\beta_1\}$ y $U_{n_2} = (U_n \setminus \{A\}) \cup \{\beta_2\}$.

Propiedades de los tableros completos

- La construcción siempre termina (se puede probar por inducción).
- El tablero final se denomina **tablero completo**.
- Un tablero se dice **cerrado** si todas sus hojas son cerradas, y **abierto** en caso contrario (basta que una de sus hojas sea abierta).

Teorema. (Corrección y Completitud)
Sea S un conjunto de fórmulas y T un tablero completo para S.

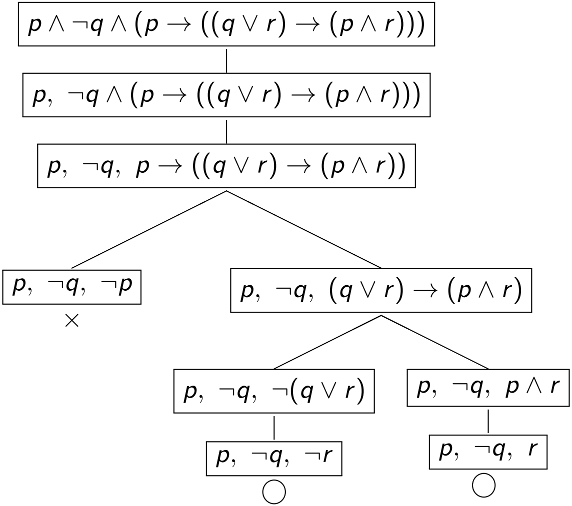
1. **Corrección**: Si T es cerrado, entonces S es insatisfactible.
2. **Completitud**: Si S es insatisfactible, entonces T es cerrado.

Extrayendo modelos de un tablero completo

- Un conjunto de fórmulas $S = \{A_1, \ldots, A_n\}$ admite un tablero completo abierto si y sólo si es un conjunto satisfactible.
- Además, cada rama abierta del tablero completo define un modelo (no necesariamente distinto) de S de la siguiente forma:

  Si U es la etiqueta de una hoja abierta, podemos obtener un modelo v del conjunto $\{A_1, \ldots, A_n\}$, como sigue
  - *Si $p \in U$, entonces $v(p) = 1$,*
  - *Si $\neg p \in U$, entonces $v(p) = 0$,*
  - *Si $p \notin U$ y $\neg p \notin U$, entonces $v(p)$ puede tomar cualquier valor, 0 o 1.*

Ejemplo



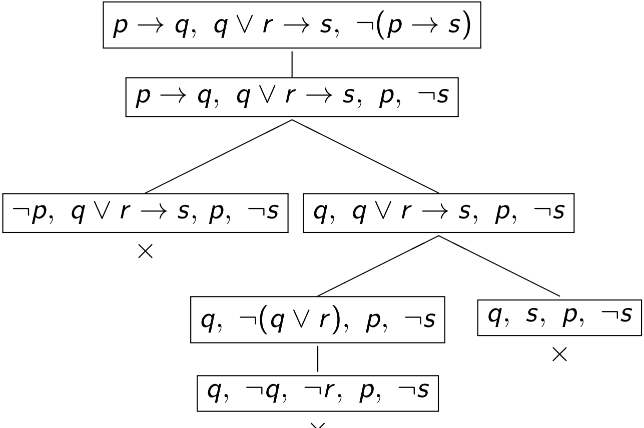
Obtenemos los modelos $v_1(p) = 1$, $v_1(r) = v_1(q) = 0$ y $v_2(p) = v_2(r) = 1$, $v_2(q) = 0$.

Consecuencia lógica

Corolario.

$\{A_1, \ldots A_n\} \models A$ si y solo si $\{A_1, \ldots, A_n, \neg A\}$ admite un tablero cerrado.

Por ejemplo: $\{p \rightarrow q, q \vee r \rightarrow s\} \models p \rightarrow s$.



Tableros Semánticos en LPO

- Recordemos que:
  - Las fórmulas α se comportan como conjunciones
  - Las fórmulas β se comportan como disyunciones

  y asociamos a cada fórmula, F, de estos tipos otras dos fórmulas más sencillas (sus **componentes**) de modo que la satisfactibilidad de F se reduce a la de sus componentes.
- Para extenderlo a LPO debemos proporcionar formas de trabajar con los cuantificadores: $\exists$ y $\forall$.
- Por ello, introduciremos dos nuevos tipos de fórmulas:
  - Las fórmulas de tipo γ, que se comportan como fórmulas cuantificadas universalmente, y
  - Las fórmulas de tipo δ, que se comportan como fórmulas cuantificadas existencialmente.

Fórmulas de tipo γ

Las fórmulas de tipo γ son las siguientes:

γ	γ_t
$\forall x\, F$	$F[x/t]$ (t es un término cerrado)
$\neg\exists x\, F$	$\neg F[x/t]$ (t es un término cerrado)

- Las fórmulas γ_t son las componentes de γ.
- Para satisfacer una fórmula de tipo γ es necesario satisfacer **simultáneamente** todas sus componentes γ_t, para todo término cerrado t.
- En este caso, dependiendo del lenguaje, puede haber una cantidad infinita de componentes (por ejemplo, basta que el lenguaje tenga un símbolo de constante y un símbolo de función).

Fórmulas de tipo δ

Las fórmulas de tipo δ son las siguientes:

δ	δ_a
$\exists x\, F$	$F[x/a]$ (a es una nueva constante)
$\neg\forall x\, F$	$\neg F[x/a]$ (a es una nueva constante)

- Las fórmulas δ_a son las componentes de δ.
- Para satisfacer una fórmula de tipo δ es necesario y suficiente satisfacer alguna de sus componentes δ_a, para alguna nueva constante a.

Reglas γ y δ

Reducen la consistencia de un conjunto de fórmulas a la de otro conjunto formado por fórmulas más sencillas.

- **Regla** γ: Si $F \in U$ es de tipo γ, entonces

  $$U \text{ consistente } \Leftrightarrow U \cup \{\gamma_t : \ t \text{ término cerrado}\} \text{ consistente}$$

- **Regla** δ: Si $F \in U$ es de tipo δ, entonces para cada constante nueva, a, se tiene:

  $$U \text{ consistente} \quad \Longleftrightarrow \quad (U - \{F\}) \cup \{\delta_a\} \text{ consistente}$$

Ejemplo

Tablero Semántico para el conjunto de fórmulas

$$U = \{\exists x\, Q(x),\ \forall x\, (Q(x) \rightarrow R(x)),\ \forall x\, \neg R(x)\}$$

$$\underline{\exists x\, Q(x)},\ \forall x\, (Q(x) \rightarrow R(x)),\ \forall x\, \neg R(x)$$

$$Q(a),\ \underline{\forall x\, (Q(x) \rightarrow R(x))},\ \forall x\, \neg R(x)$$

$$Q(a),\ \underline{Q(a) \rightarrow R(a)},\ \forall x\, (Q(x) \rightarrow R(x)),\ \forall x\, \neg R(x)$$

- $Q(a),\ \neg Q(a),\ \forall x\, (Q(x) \rightarrow R(x)),\ \forall x\, \neg R(x)$

  $\times$

- $Q(a),\ R(a),\ \forall x\, (Q(x) \rightarrow R(x)),\ \underline{\forall x\, \neg R(x)}$

  $Q(a),\ R(a),\ \forall x\, (Q(x) \rightarrow R(x)),\ \forall x\, \neg R(x),\ \neg R(a)$

  $\times$

En cada paso subrayamos la fórmula sobre la que se aplica una regla.

Notación

En LPO representaremos los tableros etiquetando cada nodo con una fórmula. El tablero anterior se escribirá:

$$
\begin{array}{c}
\exists x\, Q(x) \\
| \\
\forall x\, (Q(x) \to R(x)) \\
| \\
\forall x\, \neg R(x) \\
| \\
Q(a) \\
| \\
Q(a) \to R(a) \\
\diagup \qquad \diagdown \\
\begin{array}{cc}
\neg Q(a) & R(a) \\
\times & | \\
 & \neg R(a) \\
 & \times
\end{array}
\end{array}
$$

Notación: Si n es un nodo de T, E_n es la etiqueta de n (una sola fórmula), y U_n es el conjunto de etiquetas de todos los antecesores de n en T, incluyendo al propio nodo n.

Construcción de un tablero completo

Un **tablero** para F es un árbol T, con nodos etiquetados por fórmulas y cuya raíz está etiquetada por F que se construye mediante el siguiente procedimiento: Para cada hoja n de T, ni abierta ni cerrada, hacer:

1. Si existe un par de literales complementarios en U_n, marcar con $\times$ (**hoja cerrada**).
2. Si no, pero hay una fórmula, A, en U_n **no usada**:
   - 2.1 A de tipo α: añadir n_1 a n, $E_{n_1} = \alpha_1$, y n_2 a n_1, $E_{n_2} = \alpha_2$, y marcar A como usada en n''.
   - 2.2 A de tipo β: añadir n_1, n_2 a n, $E_{n_1} = \beta_1$, $E_{n_2} = \beta_2$, y marcar A como usada en n_1 y n_2.
   - 2.3 A de tipo δ: añadir m a n, $E_m = \delta_a$ (a una nueva constante), y marcar A como usada en m.
   - 2.4 A de tipo γ y existe t, término cerrado del lenguaje del tablero, con $\gamma_t \notin U_n$: añadir m a n, $E_m = \gamma_t$ (**no se marca A como usada**).
3. Si no se verifica ninguno de los anteriores en U_n, marcar con $\bigcirc$ (**hoja abierta**).

Propiedades de los tableros completos

- Un tablero para un conjunto de fórmulas $\{A_1, \dots, A_n\}$ es un tablero para la fórmula $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$.
- Un **tablero completo** es un tablero construido siguiendo las reglas anteriores y que no puede extenderse más.
- Puede ocurrir que un tablero completo sea infinito (una rama puede crecer indefinidamente).
- Un tablero es **cerrado** si todas sus hojas son cerradas, y **abierto** en caso contrario.
- Los tableros completos con ramas infinitas son abiertos, porque una rama infinita no puede tener hojas cerradas.

Teorema. (Corrección y Completitud)
Sea S un conjunto de fórmulas cerradas:

1. **Corrección**: Si S admite un tablero completo y cerrado, entonces S es inconsistente.
2. **Completitud**: Si S es inconsistente, entonces S admite un tablero completo y cerrado.

Extrayendo modelos de un tablero completo

Si un conjunto de fórmulas cerradas S es consistente, entonces pueden darse dos situaciones:

1. S admite un tablero completo abierto finito, y por tanto tiene una rama finita abierta.
2. El tablero para S tiene una rama infinita abierta, R, donde:
   2.1 Para toda fórmula de tipo α que etiqueta un nodo de R existen descendientes de dicho nodo en R etiquetados con las componentes de dicha fórmula.
   2.2 Para cada fórmula de tipo β o δ que etiqueta un nodo de R existe un descendiente de dicho nodo en R etiquetado con una de las componentes de la fórmula.
   2.3 Para toda fórmula de tipo γ que etiqueta un nodo de R y cada término cerrado t del lenguaje de R, existe un nodo en R etiquetado con γ_t.

En cualquier caso, podemos definir un modelo utilizando la rama abierta correspondiente.

Extrayendo modelos de un tablero completo (II)

- Un tablero finito completo para el conjunto

  $$S = \{\forall x\,\forall y\,(P(x,y) \to P(y,x)),\ \forall x\,\neg P(x,x),\ \exists x\,\exists y\,P(x,y)\}$$

  proporciona el siguiente modelo:
  - Universo $M = \{0,1\}$
  - $P^{\mathcal{M}} = \{(0,1),\ (1,0)\}$
- El conjunto

  $$\{\exists x\,Q(x),\ \forall x\,P(x,f(x)),\ \forall x\,\neg P(x,x)\}$$

  es consistente pero no admite ningún tablero completo **finito**. Sin embargo, es posible construir un tablero infinito en el que una rama infinita proporciona el siguiente modelo:
  - Universo: $M = \{0,1,2,\dots\}$
  - $Q^{\mathcal{M}} = \{0\}$
  - Para cada $j \in M$, $f^{\mathcal{M}}(j) = j+1$
  - $P^{\mathcal{M}} = \{(j,j+1) :\ j \in M\}$.

Consecuencia lógica

Para determinar si se tiene

$$\{\forall x\,(P(x) \to Q(x)),\, \forall y\,(Q(y) \vee R(y) \to S(a))\} \models \forall x\,(P(x) \to S(a))$$

- Como $\forall x\,(P(x) \to S(a))$ es **cerrada** podemos trabajar con el conjunto

$$\Sigma = \{\forall x\,(P(x) \to Q(x)),\, \forall y\,(Q(y) \vee R(y) \to S(a)),$$
$$\neg\forall x\,(P(x) \to S(a))\}$$

- Si Σ es inconsistente la fórmula $\forall x\,(P(x) \to S(a))$ será consecuencia lógica del resto de fórmulas.
- Podemos verificarlo con un tablero:

Consecuencia lógica

$$\forall x\,(P(x) \to Q(x))$$

$$\forall y\,(Q(y) \vee R(y) \to S(a))$$

$$\neg\forall x\,(P(x) \to S(a))$$

$$\neg(P(b) \to S(a))$$

$$P(b)$$

$$\neg S(a)$$

$$P(b) \to Q(b)$$

$$\neg P(b) \qquad\qquad Q(b)$$

$$\times \qquad\qquad Q(b) \vee R(b) \to S(a)$$

$$\neg(Q(b) \vee R(b)) \qquad S(a)$$

$$\neg Q(b) \qquad \times$$

$$\times$$

Razonamiento con igualdad

- Si L es un LPO con igualdad, el razonamiento con fórmulas de L debe debe tener en cuenta que el predicado de igualdad necesita un tratamiento específico.
- Un posibilidad es incluir **axiomas** que describen las propiedades fundamentales del predicado de igualdad:
  - (Identidad) $\forall x\,(x = x)$.
  - (Sustitución) Si $t_1, \dots, t_n$ son términos de L y $F(x_1, \dots, x_n)$ es una fórmula **atómica** entonces

$$\forall x_1 \dots \forall x_n\,(x_1 = t_1 \wedge \cdots \wedge x_n = t_n \to (F(x_1, \dots, x_n) \to F(t_1, \dots, t_n))$$

- Otras propiedades de la igualdad pueden obtenerse a partir de las anteriores, por ejemplo:
  - (Simetría) $\forall x\,\forall y\,(x = y \to y = x)$.
  - (Transitividad) $\forall x\,\forall y\,(x = y \wedge y = z \to x = z)$.

Tableros e igualdad

En el método de tableros para tener en cuenta estas propiedades basta incorporar dos nuevas reglas, conocidas como **reglas de igualdad**:

- **Regla** I_1. Para cada término **cerrado** t, se puede extender cualquier rama del tablero T añadiendo a su hoja un nuevo descendiente marcado con la fórmula

$$t = t$$

- **Regla** I_2. Si t y s son términos **cerrados** y en una rama de T aparecen un **literal** $P(t_1, \ldots, t, \ldots, t_n)$ y la fórmula $t = s$ (o la fórmula $s = t$), entonces podemos extender dicha rama añadiendo a su hoja un nuevo descendiente marcado con la fórmula

$$P(t_1, \ldots, s, \ldots, t_n)$$

Ejemplos (I)

$\forall x \, \forall y \, (x = y \to f(x) = f(y))$ es lógicamente válida:

$$\begin{array}{c}
\neg \forall x \, \forall y \, (x = y \to f(x) = f(y)) \\
| \\
\neg \forall y \, (a = y \to f(a) = f(y)) \\
| \\
\neg (a = b \to f(a) = f(b)) \\
| \\
a = b \\
| \\
\neg f(a) = f(b) \\
| \\
\neg f(b) = f(b) \\
| \\
f(b) = f(b) \\
\times
\end{array}$$

Ejemplos (II)

$\forall x \forall y \forall z (x = y \land y = z \to x = z)$ es lógicamente válida:

$$\neg\forall x \forall y \forall z (x = y \land y = z \to x = z)$$
$$|$$
$$\neg\forall y \forall z (a = y \land y = z \to a = z)$$
$$|$$
$$\neg\forall z (a = b \land b = z \to a = z)$$
$$|$$
$$\neg(a = b \land b = c \to a = c)$$
$$|$$
$$a = b \land b = c$$
$$|$$
$$\neg a = c$$
$$|$$
$$a = b$$
$$|$$
$$b = c$$
$$|$$
$$a = c$$
$$\times$$

Ejemplos (III)

$$\{\exists x\,(f(x,x)=a),\ \forall x\,(f(x,a)=b)\} \models \exists x\,(f(x,f(x,x))=b)$$

$$\exists x\,(f(x,x)=a)$$
$$\forall x\,(f(x,a)=b)$$
$$\neg\exists x\,(f(x,f(x,x))=b)$$
$$f(c,c)=a$$
$$\neg f(c,f(c,c))=b$$
$$\neg f(c,a)=b$$
$$f(c,a)=b$$
$$\times$$