Tema 3:
Tableros Semánticos

Dpto. Ciencias de la Computación Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

Lógica Informática
(Tecnologías Informáticas)
Curso 2017–18

Introducción
Tableros Semánticos en LP
Fórmulas α y β
Tableros completos
Búsqueda de modelos
Formas normales
Consecuencia lógica
Tableros Semánticos en LPO
Fórmulas δ y γ
Tableros completos
Búsqueda de modelos
Consecuencia lógica
Razonamiento con igualdad

Contenido

Introducción

Tableros Semánticos en LP
- Fórmulas α y β
- Tableros completos
- Búsqueda de modelos
- Formas normales
- Consecuencia lógica

Tableros Semánticos en LPO
- Fórmulas δ y γ
- Tableros completos
- Búsqueda de modelos
- Consecuencia lógica
- Razonamiento con igualdad

Introducción

- Presentaremos un algoritmo para estudiar la satisfactibilidad de un conjunto de fórmulas proposicionales y de primer orden.
- Basado en una búsqueda sistemática de modelos.
- La búsqueda suele representarse gráficamente mediante un árbol.
- Trabaja directamente sobre el conjunto de fórmulas, **sin preprocesamiento**.
- Es muy flexible y puede adaptarse a otras lógicas (lógicas descriptivas, modales, etc.).
- Resulta útil en el estudio teórico de diversas lógicas, para probar propiedades formales como la completitud.

Tableros Semánticos en LP

- Gracias a la FND sabemos que la satisfactibilidad de una fórmula puede reducirse a la de ciertos conjuntos de literales.
- El método de los tableros semánticos organiza de manera sistemática la búsqueda de modelos, reduciendo la satisfactibilidad de las fórmulas consideradas a la de ciertos conjuntos de literales.

El método de tableros semánticos en LP:

1. Clasifica las fórmulas en dos clases:
   - Las fórmulas α, que se comportan como conjunciones
   - Las fórmulas β, que se comportan como disyunciones
2. Asocia a cada fórmula, F, otras dos fórmulas más sencillas (sus **componentes**) de modo que la satisfactibilidad de F se reduce a la de sus componentes.

Fórmulas de tipo α

Las fórmulas de tipo α son las siguientes:

α	α_1	α_2
$\neg\neg F$	F	
$F_1 \wedge F_2$	F_1	F_2
$\neg(F_1 \vee F_2)$	$\neg F_1$	$\neg F_2$
$\neg(F_1 \to F_2)$	F_1	$\neg F_2$
$F_1 \leftrightarrow F_2$	$F_1 \to F_2$	$F_2 \to F_1$

- Las fórmulas α_1 y α_2 son las componentes de α.
- Si F es de tipo α, entonces $F \equiv \alpha_1 \wedge \alpha_2$.
- Para satisfacer una fórmula de tipo α es necesario y suficiente satisfacer **simultáneamente** sus dos componentes α_1 y α_2.

Fórmulas de tipo β

Las fórmulas de tipo β son las siguientes:

β	β_1	β_2
$F_1 \vee F_2$	F_1	F_2
$\neg(F_1 \wedge F_2)$	$\neg F_1$	$\neg F_2$
$(F_1 \rightarrow F_2)$	$\neg F_1$	F_2
$\neg(F_1 \leftrightarrow F_2)$	$\neg(F_1 \rightarrow F_2)$	$\neg(F_2 \rightarrow F_1)$

- Las fórmulas β_1 y β_2 son las componentes de β.
- Si F es de tipo β, entonces $F \equiv \beta_1 \vee \beta_2$
- Para satisfacer una fórmula de tipo β sólo es necesario y suficiente satisfacer una de sus componentes β_1 y β_2.

Reglas α y β

Reducen la consistencia de un conjunto de fórmulas U a la de otro conjunto U' formado por fórmulas más sencillas.

- **Regla** α: Si $F \in U$ es de tipo α, entonces

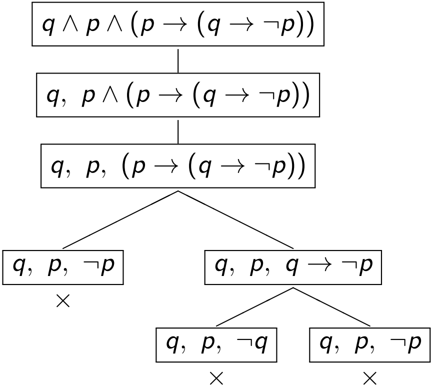
$$U \text{ satisfactible} \iff (U-\{F\})\cup\{\alpha_1,\alpha_2\} \text{ satisfactible}$$

- **Regla** β: Si $F \in U$ es de tipo β, entonces

$$U \text{ satisfactible} \iff \begin{cases} (U-\{F\})\cup\{\beta_1\} \text{ satisfactible} \\ \text{o} \\ (U-\{F\})\cup\{\beta_2\} \text{ satisfactible} \end{cases}$$

Ejemplo

La fórmula $q \wedge p \wedge (p \rightarrow (q \rightarrow \neg p))$ es insatisfactible:



Introducción
Tableros Semánticos en LP
Fórmulas α y β
Tableros completos
Búsqueda de modelos
Formas normales
Consecuencia lógica
Tableros Semánticos en LPO
Fórmulas δ y γ
Tableros completos
Búsqueda de modelos
Consecuencia lógica
Razonamiento con igualdad

Construcción de un tablero completo

Un **tablero** para $\{A_1, \dots, A_n\}$ es un árbol T, con nodos etiquetados por conjuntos de fórmulas, tal que:

- La raíz r de T está etiquetado por $U(r) = \{A_1, \dots A_n\}$.
- Para cada hoja l de T, con etiqueta $U(l)$, no marcada, hacer:
  1. Si $U(l)$ es un conjunto de literales, entonces:
     1.1 Si existe un par de literales complementarios en $U(l)$, marcar con $\times$ (y se denomina **hoja cerrada**).
     1.2 Si no existe tal par, marcar con $\bigcirc$ (**hoja abierta**).
  2. Si $U(l)$ no es un conjunto de literales, elegir A de $U(l)$ no literal.
     2.1 Si A es una α–fórmula, entonces añadir un hijo l' de l con $U(l') = (U(l) \setminus \{A\}) \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ (α_2 puede no existir).
     2.2 Si A es una β–fórmula, entonces añadir dos hijos l', l'' con etiquetas

$$U(l') = (U(l)\setminus\{A\})\cup\{\beta_1\} \text{ y } U(l'') = (U(l)\setminus\{A\})\cup\{\beta_2\}$$

Propiedades de los tableros completos

- La construcción siempre termina. El tablero final se denomina **tablero completo**.
- Un tablero T es **cerrado** si todas sus hojas son cerradas. En otro caso es **abierto**.

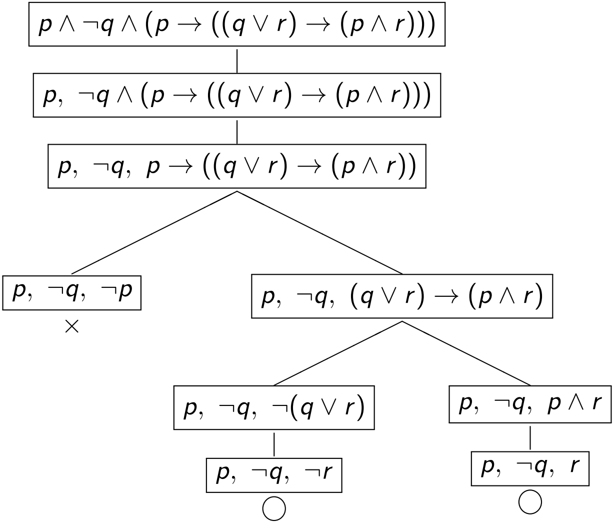
Teorema. (Corrección y Completitud)
Sea S un conjunto de fórmulas y T un tablero completo para S.

1. **Corrección**: Si T es cerrado, entonces S es insatisfactible.
2. **Completitud**: Si S es insatisfactible, entonces T es cerrado.

Extrayendo modelos de un tablero completo

- Un conjunto de fórmulas $\{A_1, \ldots, A_n\}$ admite un tablero completo abierto si y sólo si es un conjunto satisfactible.
- Además cada rama abierta del tablero completo define un modelo.
- Si U es la etiqueta de una hoja abierta, podemos obtener un modelo v del conjunto $\{A_1, \ldots, A_n\}$, como sigue
  - $v(p) = 1$ si $p \in U$ ó $\neg p \notin U$, y
  - $v(p) = 0$ si $\neg p \in U$.

Extrayendo modelos de un tablero completo (II)



Induce $v(p) = v(r) = 1$, $v(q) = 0$

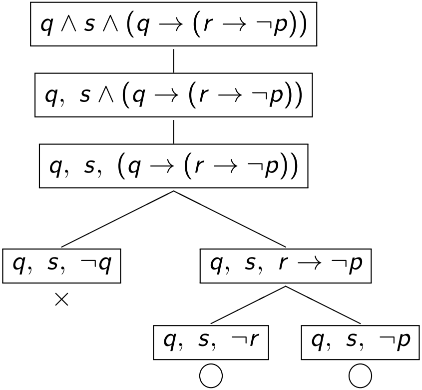
Tableros completos y FND

- Un tablero completo para una fórmula F puede utilizarse para obtener una FND de F.
- Si T es un tablero completo para F, procedemos como sigue:
  1. Si $U_1, \dots, U_k$ son los conjuntos de literales que etiquetan las hojas abiertas de T, formamos para cada U_j una conjunción, C_j, con todos los literales de U_j.
  2. Una FND de F se obtiene formando la disyunción

$$C_1 \vee \cdots \vee C_k.$$

Tableros y FND: Ejemplo

Si F es la fórmula $q \land s \land (q \to (r \to \neg p))$



Una FND de F es $(q \land s \land \neg r) \lor (q \land s \land \neg p)$.

Tableros y FNC

- Para obtener una FNC de una fórmula F nos basamos en la siguiente observación:
  - Si G es una FND de $\neg F$, aplicando a $\neg G$ las leyes de De Morgan y eliminación de negaciones dobles transformamos $\neg G$ en una FNC de F.
- Por tanto, para obtener una FNC de F seguimos el siguiente procedimiento:
  1. Calculamos un tablero completo para $\neg F$.
  2. Si $U_1, \dots, U_k$ son los conjuntos de literales que etiquetan las hojas abiertas del tablero completo para $\neg F$, formamos para cada U_j una disyunción D_j con los literales complementarios de los literales de U_j.
  3. Una FNC de F es la conjunción

$$D_1 \wedge \cdots \wedge D_k.$$

Tableros y FNC: Ejemplos

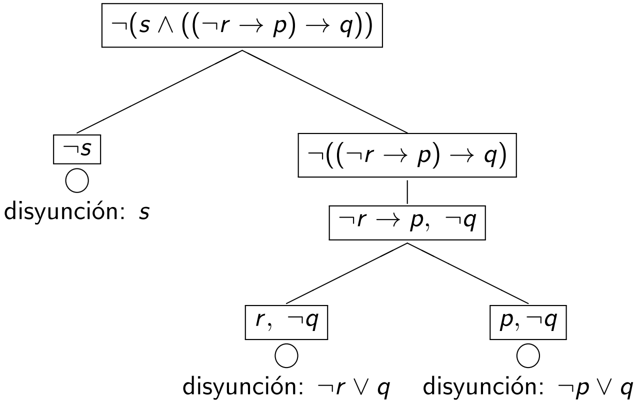
Sea F la fórmula $s \wedge ((\neg r \to p) \to q)$.

1. Una FND de $\neg F$ es $G \equiv \quad \neg s \vee (r \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q)$
2. Ahora $\neg G$ proporciona una FNC de F:

$$\begin{aligned} F \equiv \neg G \quad & \equiv \quad \neg(\neg s \vee (r \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q)) \\ & \equiv \quad \neg\neg s \wedge \neg(r \wedge \neg q) \wedge \neg(p \wedge \neg q)) \\ & \equiv \quad s \wedge (\neg r \vee \neg\neg q) \wedge (\neg p \vee \neg\neg q)) \\ & \equiv \quad s \wedge (\neg r \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \end{aligned}$$

Tableros y FNC: Ejemplo (II)

Si F es la fórmula $s \wedge ((\neg r \rightarrow p) \rightarrow q)$. Calculamos un tablero completo para $\neg F$:



Una FNC de F es $s \wedge (\neg r \vee q) \wedge (\neg p \vee q)$.

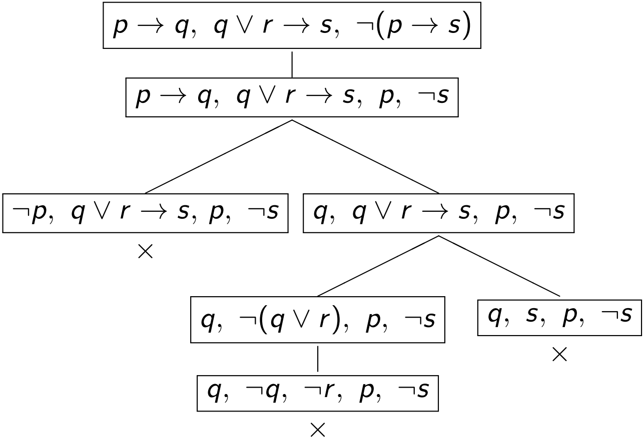
Introducción
Tableros Semánticos en LP
Fórmulas α y β
Tableros completos
Búsqueda de modelos
Formas normales
Consecuencia lógica
Tableros Semánticos en LPO
Fórmulas δ y γ
Tableros completos
Búsqueda de modelos
Consecuencia lógica
Razonamiento con igualdad

Consecuencia lógica

Utilizamos la siguiente reducción:

$$\boxed{\{A_1, \ldots A_n\} \models A \iff \{A_1, \ldots, A_n, \neg A\} \text{ **admite un tablero cerrado.**}}$$

Por ejemplo, $\{p \to q, q \vee r \to s\} \models p \to s$.



Introducción
Tableros Semánticos en LP
Fórmulas α y β
Tableros completos
Búsqueda de modelos
Formas normales
Consecuencia lógica
Tableros Semánticos en LPO
Fórmulas δ y γ
Tableros completos
Búsqueda de modelos
Consecuencia lógica
Razonamiento con igualdad

Tableros Semánticos en LPO

- Recordemos que:
  - Las fórmulas α, que se comportan como conjunciones
  - Las fórmulas β, que se comportan como disyunciones
- y asocia a cada fórmula, F, otras dos fórmulas más sencillas (sus **componentes**) de modo que la satisfactibilidad de F se reduce a la de sus componentes.
- Para extenderlo a la lógica de primer orden deberemos tener en cuenta los cuantificadores: $\exists$ y $\forall$.
- Se introducen dos nuevas clases de fórmulas:
  - Las fórmulas de tipo γ que se comportan como fórmulas cuantificadas universalmente, y
  - Las fórmulas de tipo δ, que se comportan como fórmulas cuantificadas existencialmente.

Tableros Semánticos

Introducción

Tableros Semánticos en LP
Fórmulas α y β
Tableros completos
Búsqueda de modelos
Formas normales
Consecuencia lógica

Tableros Semánticos en LPO
Fórmulas δ y γ
Tableros completos
Búsqueda de modelos
Consecuencia lógica
Razonamiento con igualdad

Fórmulas de tipo γ

Las fórmulas de tipo γ son las siguientes:

γ	γ_t
$\forall x\, F$	$F[x/t]$ (t es un término cerrado)
$\neg\exists x\, F$	$\neg F[x/t]$ (t es un término cerrado)

- Los términos cerrados son términos sin variables y se denominan también términos básicos.
- Las fórmulas γ_t son las componentes de γ.
- Para satisfacer una fórmula de tipo γ es necesario satisfacer **simultáneamente** todas sus componentes γ_t, para todo término cerrado t.

Fórmulas de tipo δ

Las fórmulas de tipo δ son las siguientes:

δ	δ_a
$\exists x\, F$	$F[x/a]$ (a es una nueva constante)
$\neg\forall x\, F$	$\neg F[x/a]$ (a es una nueva constante)

- Las fórmulas δ_a son las componentes de δ.
- Para satisfacer una fórmula de tipo δ es necesario y suficiente satisfacer alguna de sus componentes δ_a, para alguna nueva constante a.

Reglas γ y δ

Reducen la consistencia de un conjunto de fórmulas U a la de otro conjunto U' formado por fórmulas más sencillas.

- **Regla** γ: Si $F \in U$ es de tipo γ, entonces

  $$U \text{ consistente } \Leftrightarrow U \cup \{\gamma_t : \ t \text{ término básico } \} \text{ consistente}$$

- **Regla** δ: Si $F \in U$ es de tipo δ, entonces para cada constante nueva, a, se tiene:

  $$U \text{ consistente} \quad \Longleftrightarrow \quad (U - \{F\}) \cup \{\delta_a\} \text{ consistente}$$

Ejemplo

El conjunto $U = \{\exists x\, Q(x), \forall x\, (Q(x) \to R(x)), \forall x\, \neg R(x)\}$ es insatisfactible:

- $\exists x\, Q(x),\ \forall x\, (Q(x) \to R(x)),\ \forall x\, \neg R(x)$
  - $Q(a),\ \forall x\, (Q(x) \to R(x)),\ \forall x\, \neg R(x)$
    - $Q(a),\ Q(a) \to R(a),\ \forall x\, (Q(x) \to R(x)),\ \forall x\, \neg R(x)$
      - $Q(a),\ \neg Q(a),\ \forall x\, (Q(x) \to R(x)),\ \forall x\, \neg R(x)$
        - $\times$
      - $Q(a),\ R(a),\ \forall x\, (Q(x) \to R(x)),\ \forall x\, \neg R(x)$
        - $Q(a),\ R(a),\ \forall x\, (Q(x) \to R(x)),\ \forall x\, \neg R(x),\ \neg R(a)$
          - $\times$

Notación

En lógica de primer orden representaremos los tableros etiquetando cada nodo con una fórmula. El tablero anterior se escribirá:

$$
\begin{array}{ccc}
 & \exists x\, Q(x) & \\
 & | & \\
 & \forall x\, (Q(x) \to R(x)) & \\
 & | & \\
 & \forall x\, \neg R(x) & \\
 & | & \\
 & Q(a) & \\
 & | & \\
 & Q(a) \to R(a) & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 \neg Q(a) & & R(a) \\
 \times & & | \\
 & & \neg R(a) \\
 & & \times
\end{array}
$$

Notación: Si l es un nodo de T, ahora $U(l)$ es el conjunto de las fórmulas que etiquetan los antecesores de l en T y el propio nodo l.

Construcción de un tablero completo

Un **tablero** para F (un árbol T, con nodos etiquetados por fórmulas y cuya raíz está etiquetado por F) se construye mediante el siguiente procedimiento:

- Para cada hoja l de T, ni abierta ni cerrada, hacer:
  1. Si existe un par de literales complementarios en $U(l)$, marcar con $\times$ (y se denomina **hoja cerrada**).
  2. Si no existe tal par pero existe alguna fórmula en $U(l)$ **no usada** (en la rama de l), elegir A en $U(l)$ no usada:
     - 2.1 Si A es de tipo α, entonces, añadir un hijo l' de l etiquetado con α_1 y otro hijo l'' de l' etiquetado con α_2 y marcar A como usada en l''.
     - 2.2 Si A es de tipo β, añadir dos hijos a l: l' con etiqueta β_1 y l'' con β_2. Marcar A como usada (en l' y l'').
     - 2.3 Si A es de tipo δ, añadir un hijo l' de l con etiqueta δ_a (a una nueva constante). Marcar A como usada en l'.
     - 2.4 Si A es de tipo γ y existe un término básico (del lenguaje del tablero) tal que $\gamma_t \notin U(l)$, elegir uno de tales términos y añadir un hijo con etiqueta γ_t.
  3. Si no es posible extender l mediante las reglas anteriores marcarla con $\bigcirc$ (**hoja abierta**).

Propiedades de los tableros completos

- Un **tablero completo** es un tablero construido siguiendo las reglas anteriores y que no puede extenderse más.
- Un tablero T es **cerrado** si todas sus hojas son cerradas. En otro caso es **abierto**.
- Un tablero para un conjunto de fórmulas $\{A_1, \dots, A_n\}$ es un tablero para la fórmula $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$.
- Decimos que un conjunto de fórmulas S admite un tablero completo cerrado si existe un tablero completo para S que es cerrado.

Teorema. (Corrección y Completitud)
Sea S un conjunto de fórmulas cerradas.

1. **Corrección**: Si S admite un tablero completo y cerrado, entonces S es inconsistente.
2. **Completitud**: Si S es inconsistente, entonces S admite un tablero completo y cerrado.

Extrayendo modelos de un tablero completo

Si un conjunto de fórmulas cerradas $\{A_1, \ldots, A_n\}$ es consistente, entonces pueden darse dos situaciones:

1. $\{A_1, \ldots, A_n\}$ admite un tablero completo abierto, o
2. Existe una sucesión infinita de tableros T_j, con $j \in \mathbb{N}$ tal que:
   - Para cada $j \in \mathbb{N}$, T_{j+1} es una extensión de T_j.
   - Si $T = \bigcup_{j=0}^{\infty} T_j$ y R una rama infinita de T, entonces:
     2.1 Para toda fórmula de tipo α que etiqueta un nodo de R existen descendientes de dicho nodo en R etiquetados con las componentes de dicha fórmula.
     2.2 Para cada fórmula de tipo β o δ que etiqueta un nodo de R existe un descendiente de dicho nodo en R etiquetado con una de las componentes de la fórmula.
     2.3 Para toda fórmula de tipo γ que etiqueta un nodo de R y cada término básico t del lenguaje de R, existe un nodo en R etiquetado con γ_t.

- En cada caso, podemos definir un modelo utilizando:
  - una rama abierta del tablero completo, o bien
  - una rama infinita del tablero límite T.

Extrayendo modelos de un tablero completo (II)

- Un tablero completo para el conjunto

  $$S = \{\forall x \forall y\, (P(x,y) \to P(y,x)),\ \forall x \neg P(x,x),\ \exists x \exists y\, P(x,y)\}$$

  produce el siguiente modelo $\mathcal{M}$:
  - Universo $M = \{0, 1\}$
  - $P^{\mathcal{M}} = \{(0,1),\ (1,0)\}$
- El conjunto $\{\exists x\, Q(x),\ \forall x\, P(x, f(x)),\ \forall x \neg P(x,x)\}$ es consistente pero no admite ningún tablero completo **finito**.
  - Sin embargo, es posible construir una sucesión de tableros cuyo límite proporciona el siguiente modelo $\mathcal{M}$:
    - Universo: $M = \{0, 1, 2, \dots\}$
    - $Q^{\mathcal{M}} = \{0\}$
    - Para cada $j \in M$, $f^{\mathcal{M}}(j) = j + 1$
    - $P^{\mathcal{M}} = \{(j, j+1) :\ j \in M\}$.

Consecuencia lógica

Para determinar si se tiene

$$\{\forall x\,(P(x) \to Q(x)), \forall y\,(Q(y) \vee R(y) \to S(a))\} \models \forall x\,(P(x) \to S(a))$$

- Puesto que $\forall x\,(P(x) \to S(a))$ es **cerrada** consideramos el conjunto

  $$\{\forall x\,(P(x) \to Q(x)), \forall y\,(Q(y) \vee R(y) \to S(a)), \neg\forall x\,(P(x) \to S(a))\}$$

- Si es conjunto es inconsistente la fórmula $\forall x\,(P(x) \to S(a))$ será consecuencia lógica del resto de fórmulas.
- Para comprobarlo construimos un tablero:

Consecuencia lógica (II)

$$\forall x\,(P(x) \to Q(x))$$
$$\forall y\,(Q(y) \lor R(y) \to S(a))$$
$$\neg\forall x\,(P(x) \to S(a))$$
$$\neg(P(b) \to S(a))$$
$$P(b)$$
$$\neg S(a)$$
$$P(b) \to Q(b)$$

- $\neg P(b)$
  - $\times$
- $Q(b)$
  - $Q(b) \lor R(b) \to S(a)$
    - $\neg(Q(b) \lor R(b))$
      - $\neg Q(b)$
        - $\times$
    - $S(a)$
      - $\times$

Introducción
Tableros Semánticos en LP
Fórmulas α y β
Tableros completos
Búsqueda de modelos
Formas normales
Consecuencia lógica
Tableros Semánticos en LPO
Fórmulas δ y γ
Tableros completos
Búsqueda de modelos
Consecuencia lógica
Razonamiento con igualdad

Razonamiento con igualdad

- Si L es un LPO con igualdad, el razonamiento con fórmulas de L debe debe tener en cuenta que el predicado de igualdad necesita un tratamiento específico.
- Un posibilidad es incluir **axiomas** que describen las propiedades fundamentales del predicado de igualdad:
  - (Identidad) $\forall x\,(x = x)$.
  - (Sustitución) Si $t_1, \dots, t_n$ son términos de L y $F(x_1, \dots, x_n)$ es una fórmula **atómica** entonces

$$\forall x_1 \dots \forall x_n\,(x_1 = t_1 \wedge \cdots \wedge x_n = t_n \to (F(x_1, \dots, x_n) \to F(t_1, \dots, t_n)))$$

- Otras propiedades de la igualdad pueden obtenerse a partir de las anteriores, por ejemplo:
  - (Simetría) $\forall x\,\forall y\,(x = y \to y = x)$.
  - (Transitividad) $\forall x\,\forall y\,(x = y \wedge y = z \to x = z)$.

Tableros e igualdad

En el método de tableros los anteriores principios se incorporan mediante dos nuevas **reglas de igualdad** que permiten extender un tablero T de los siguientes modos:

- **Regla 1**. Para cada término **cerrado** t, se puede extender cualquier rama del tablero T añadiendo a su hoja un nuevo descendiente marcado con la fórmula

$$t = t$$

- **Regla 2**. Si t y s son términos **cerrados** y en una rama de T aparecen un **literal** $P(t_1, \ldots, t, \ldots, t_n)$ y la fórmula $t = s$ (o bien, la fórmula $s = t$), entonces podemos extender dicha rama añadiendo a su hoja un nuevo descendiente marcado con la fórmula

$$P(t_1, \ldots, s, \ldots, t_n)$$

Ejemplos (I)

Veamos que $\forall x\, \forall y\, (x = y \rightarrow f(x) = f(y))$ es lógicamente válida:

$$
\begin{array}{c}
\neg \forall x\, \forall y\, (x = y \rightarrow f(x) = f(y)) \\
| \\
\neg \forall y\, (a = y \rightarrow f(a) = f(y)) \\
| \\
\neg (a = b \rightarrow f(a) = f(b)) \\
| \\
a = b \\
| \\
\neg f(a) = f(b) \\
| \\
\neg f(b) = f(b) \\
| \\
f(b) = f(b) \\
\times
\end{array}
$$

Ejemplos (II)

Veamos que $\forall x \, \forall y \forall z \, (x = y \land y = z \to x = z)$ es lógicamente válida:

$$\neg \forall x \, \forall y \forall z \, (x = y \land y = z \to x = z)$$
$$|$$
$$\neg \forall y \forall z \, (a = y \land y = z \to a = z)$$
$$|$$
$$\neg \forall z \, (a = b \land b = z \to a = z)$$
$$|$$
$$\neg (a = b \land b = c \to a = c)$$
$$|$$
$$a = b \land b = c$$
$$|$$
$$\neg a = c$$
$$|$$
$$a = b$$
$$|$$
$$b = c$$
$$|$$
$$a = c$$
$$\times$$

Ejemplos (III)

$\{\exists x\,(f(x,x)=a),\ \forall x\,(f(x,a)=b)\} \models \exists x\,(f(x,f(x,x))=b)$.

$$\exists x\,(f(x,x)=a)$$
$$|$$
$$\forall x\,(f(x,a)=b)$$
$$|$$
$$\neg\exists x\,(f(x,f(x,x))=b)$$
$$|$$
$$f(c,c)=a$$
$$|$$
$$\neg f(c,f(c,c))=b$$
$$|$$
$$\neg f(c,a)=b$$
$$|$$
$$f(c,a)=b$$
$$\times$$