

Relación 5: Sistemas Deductivos y Resolución.

Ejercicio 66.– Sea \mathbf{T} el siguiente sistema deductivo:

- $Ax(\mathbf{T}) = \{\neg A \vee A : A \in PROP\}$

- Reglas de inferencia:

$$\text{Asociativa: } \frac{A \vee (B \vee C)}{(A \vee B) \vee C} \quad \text{Corte: } \frac{A \vee B, \neg A \vee C}{B \vee C} \quad \text{Expansión: } \frac{A}{B \vee A}$$

Demuestra que:

1. $\vdash_{\mathbf{T}} (q \vee \neg p) \vee p$.
2. Si $\vdash_{\mathbf{T}} A \vee B$ entonces $\vdash_{\mathbf{T}} B \vee A$.
3. $\vdash_{\mathbf{T}} (q \vee \neg p) \vee \neg q$.

Ejercicio 67.– Sea \mathbf{T} el siguiente sistema deductivo:

$$\text{Reglas de inferencia: } \left\{ \begin{array}{lll} \text{(R1)} & \frac{A \wedge B}{A} & \text{(R2)} \frac{A \wedge B}{B \wedge A} & \text{(R3)} \frac{\neg \neg A}{A} \\ \text{(R4)} & \frac{A, A \rightarrow B}{A \wedge B} & \text{(R5)} \frac{\neg(A \rightarrow B)}{\neg B} \end{array} \right.$$

Axiomas: $Ax(\mathbf{T}) = \{p \rightarrow (\neg q \rightarrow p \wedge \neg q), \neg(p \rightarrow \neg p), \neg q\}$.

Prueba que $\vdash_{\mathbf{T}} p \wedge \neg q$.

Ejercicio 68.– Sea \mathbf{T} el siguiente sistema deductivo:

$$\text{Reglas de inferencia: } \left\{ \begin{array}{lll} \text{(R1)} & \frac{A \vee \neg B, B}{A} & \text{(R2)} \frac{A \wedge B}{A} & \text{(R3)} \frac{A, A \rightarrow B}{B} \end{array} \right.$$

Axiomas: $Ax(\mathbf{T}) = \{t \rightarrow (s \vee r), q \rightarrow (s \vee r) \rightarrow r, (q \wedge s) \vee \neg(s \vee r), t\}$.

Prueba que $\vdash_{\mathbf{T}} r$.

Ejercicio 69.– Sea $U = \{\neg A_1 \vee \neg B_1 \vee C_2, \neg A_1 \vee B_1, \neg A_2 \vee B_2, A_1, A_2\}$

- Prueba que U es consistente y describir razonadamente todos los modelos de U .
- Prueba que $U \models C_2$ mediante encadenamiento hacia adelante.

Ejercicio 70.— Demuestra, mediante encadenamiento hacia adelante, la corrección del siguiente argumento.

1. *Los animales con pelo o que dan leche son mamíferos.*
2. *Los mamíferos que tienen pezuñas o que rumian son ungulados.*
3. *Los ungulados de cuello largo son jirafas.*
4. *Los ungulados con rayas negras son cebras.*

Se observa un animal que tiene pelos, pezuñas y rayas negras. Por tanto, el animal es una cebra.

Ejercicio 71.— Indica en cuáles de los siguientes ejemplos se ha aplicado correctamente la regla de resolución proposicional y en cuáles no. En este último caso, escribe las resolventes correctas.

<ol style="list-style-type: none"> 1. $\{p, q, r\}$ Hipótesis 2. $\{p, q, s\}$ Hipótesis 3. $\{p, q, r, s\}$ Resolvente de 1 y 2 	<ol style="list-style-type: none"> 1. $\{p, \neg q\}$ Hipótesis 2. $\{\neg q\}$ Hipótesis 3. $\{p\}$ Resolvente de 1 y 2
<ol style="list-style-type: none"> 1. $\{p, \neg q, \neg r\}$ Hipótesis 2. $\{\neg p, q, r\}$ Hipótesis 3. \square Resolvente de 1 y 2 	<ol style="list-style-type: none"> 1. $\{r, \neg r\}$ Hipótesis 2. $\{r, \neg r\}$ Resolvente de 1 y 1

Ejercicio 72.— Usando resolución por saturación y regular (y pasando previamente las fórmulas a forma clausal), demuestra que:

1. $(p \leftrightarrow q \rightarrow r) \wedge (p \leftrightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg r)$ es una contradicción.
2. $\{p \rightarrow q, q \rightarrow p \wedge r\} \models p \rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow r$.

Ejercicio 73.— Usando resolución regular, determina la consistencia de los conjuntos de cláusulas:

- | | |
|---|---|
| (1) $\{p \vee \neg q, p \vee q, \neg p \vee \neg q, \neg p \vee q\}$ | (2) $\{\neg r, q, p \vee \neg q, \neg p \vee r\}$ |
| (3) $\{p \vee q \vee r, \neg p \vee q, \neg q \vee r, \neg r, p \vee r\}$ | (4) $\{p, \neg p \vee q, r\}$ |

Ejercicio 74.— Demuestra, utilizando resolución por entradas, la inconsistencia del conjunto de cláusulas $\{\neg p \vee \neg q \vee r, \neg s \vee t, \neg t \vee p, s, \neg s \vee u, \neg u \vee q, \neg r\}$.

Ejercicio 75.— Determina la inconsistencia del conjunto

$$\{p \vee q, q \vee r, r \vee w, \neg r \vee \neg p, \neg w \vee \neg q, \neg q \vee \neg r\}$$

mediante (1) resolución lineal, (2) resolución positiva, y (3) resolución negativa.

Ejercicio 76.— Determina la inconsistencia del conjunto

$$\{\neg A \vee \neg B \vee C, \neg A \vee \neg G \vee H, \neg A \vee \neg H \vee F, \neg G \vee B, G, A, \neg F\}$$

mediante (1) resolución lineal, (2) resolución positiva, (3) resolución negativa, (4) resolución por entradas, y (5) resolución unidad.

Ejercicio 77.— Decide por el método de resolución la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

1. $\{p \rightarrow (q \rightarrow r), r \rightarrow q\} \models r \leftrightarrow q$
2. $\{p \rightarrow q, q \rightarrow (p \wedge q), p \rightarrow r\} \models q \rightarrow r$

Ejercicio 78.— Sea A la fórmula proposicional

$$(p \vee q \leftrightarrow \neg r) \wedge (\neg p \rightarrow s) \wedge (\neg t \rightarrow q) \wedge (s \wedge t \rightarrow u)$$

1. Prueba que A es satisfactible.
2. Prueba por resolución proposicional que

$$\{p \vee q \leftrightarrow \neg r, \neg p \rightarrow s, \neg t \rightarrow q, s \wedge t \rightarrow u\} \models r \rightarrow u$$

Ejercicio 79.— Ash, Misty y Brock han organizado una batalla entre sus *Pokemon*. Se conocen los siguientes datos al respecto:

- a) *Uno, y sólo uno, de los siguientes Pokemon fue el vencedor: Pikachu, Bulbasaur, Togepi, Starmie, Vulpix y Onix.*
- b) *Ash ganó la batalla si el Pokemon vencedor fue Pikachu o Bulbasaur.*
- c) *Si o bien Togepi o bien Starmie fue el vencedor, Misty ganó la batalla.*
- d) *Brock ganó la batalla si el vencedor fue Onix o Vulpix.*
- e) *Si Onix fue derrotado, Starmie también.*
- f) *Bulbasaur fue derrotado.*
- g) *Si Pikachu fue derrotado, entonces Ash no ganó la batalla.*
- h) *Brock no ganó la batalla si Bulbasaur fue derrotado.*
- i) *Si Vulpix fue derrotado, Togepi y Onix también corrieron la misma suerte.*

1. Formaliza los datos anteriores en el lenguaje de la lógica proposicional.
2. Para cada fórmula obtenida, escribe un conjunto de cláusulas equivalente.
3. Usando resolución proposicional, demuestra que Ash fue el ganador.

Ejercicio 80.— Sea Σ el conjunto de fórmulas (donde a y b son símbolos de constante):

$$\{\forall x (P(x, f(x)) \rightarrow \neg P(x, b)), \forall x (P(x, a) \rightarrow P(x, b)), \forall x (\neg \exists z P(x, z) \vee P(x, f(x)))\}$$

Decide, mediante resolución, si:

1. $\Sigma \models \neg \exists x \exists z (P(x, z) \wedge P(x, a))$
2. $\Sigma \models P(x, z) \wedge P(x, a)$

Ejercicio 81.— Determina si existe una refutación a partir de los siguientes conjuntos de cláusulas, y si no es posible, justifícalo:

- (a) $\{p(x, x), \neg p(x, f(x)), p(x, f(x)) \vee \neg p(f(x), y), p(x, y) \vee \neg p(x, z) \vee \neg p(y, z)\}$
- (b) $\{p(x, x), \neg p(x, f(x)), p(x, f(x)) \vee \neg p(f(x), y), \neg p(x, y) \vee p(x, z) \vee p(y, z)\}$

Ejercicio 82.— Sea $\Gamma = \{p(x, 0, x), p(x, y, z) \rightarrow p(x, s(y), s(z))\}$. Utilizando resolución, prueba que:

1. $\Gamma \models p(s(s(0)), s(0), s(s(s(0))))$.
2. $\Gamma \not\models p(0, x, x)$.

Ejercicio 83.— Sea Σ el conjunto formado por las siguientes fórmulas:

- (1) $P(\mathbf{a}) \wedge \forall x (P(x) \rightarrow Q(f(x), x))$
- (2) $Q(x, y) \rightarrow [R(f(x)) \wedge \neg R(f(f(x)))]$
- (3) $\forall x (P(x) \vee R(x))$
- (4) $\forall x \neg (P(x) \wedge R(x))$

Se pide:

1. Prueba mediante resolución que $\Sigma \models P(f(f(f(\mathbf{a}))))$.
2. Prueba, utilizando el teorema de Herbrand, que $\Sigma \not\models Q(f(x), x) \rightarrow P(x)$.
3. Prueba, por inducción en n , que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\Sigma \models R(f^{3n+2}(\mathbf{a})) \wedge P(f^{3n}(\mathbf{a}))$.

Ejercicio 84.— Aplica el algoritmo de unificación a los siguientes conjuntos:

- (1) $\{p(x, y), p(y, f(z))\}$
- (2) $\{p(c, y, f(y)), p(z, z, u)\}$
- (3) $\{p(x, g(x)), p(y, y)\}$
- (4) $\{p(x, g(x), y), p(z, u, g(u))\}$
- (5) $\{p(g(x), y), p(y, y), p(u, f(w))\}$
- (6) $\{p(x, f(y), z), p(g(w), u, g(w)), p(v, v, g(w))\}$

Ejercicio 85.— Encuentra, si existe, un unificador para cada conjunto de expresiones (como siempre, las últimas letras del alfabeto son símbolos de variables y las primeras, de constantes):

- (1) $\{P(x, z, y), P(w, u, w), P(a, u, u)\}$
- (2) $\{\neg P(a), P(x)\}$
- (3) $\{P(f(f(x)), z), P(f(u), f(v))\}$
- (4) $\{Q(f(x), a, y), Q(u, f(v), b)\}$
- (5) $\{P(f(x, x), a), P(f(y, f(y, a)), a)\}$
- (6) $\{P(f(a), x), P(x, a)\}$
- (7) $\{P(f(x), x), P(u, f(u))\}$
- (8) $\{Q(f(x), y, z), Q(f(u), a, f(a))\}$

Ejercicio 86.— Sean t_1 y t_2 dos sustituciones. Diremos que t_1 es más general que t_2 si existe una sustitución λ tal que $t_2 = t_1\lambda$. Decide, en los siguientes casos, si el primer término es más general que el segundo:

- (1) $x, f(x, y)$ (2) $h(h(x, y), x), h(z, x)$ (3) $f(g(y), y), f(g(x), a)$.
(4) $h(x, y), h(g(y), y)$ (5) $f(x, x), f(x, y)$.

Ejercicio 87.— Determina, por resolución, la validez de las fórmulas:

1. $\exists x [[P(x) \rightarrow P(a)] \wedge [P(x) \rightarrow P(b)]]$
2. $\forall z [Q(z) \rightarrow P(z)] \rightarrow [\exists x [Q(x) \rightarrow P(a)] \wedge [Q(x) \rightarrow P(b)]]$
3. $\exists x \exists y [[P(f(x)) \wedge Q(f(b))] \rightarrow [P(f(a)) \wedge P(y) \wedge Q(y)]]$
4. $\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$
5. $\forall x [P(x) \wedge [Q(a) \vee Q(b)]] \rightarrow \exists x [P(x) \wedge Q(x)]$

Ejercicio 88.— Determina la consistencia de los conjuntos de cláusulas:

1. $\{Q(u) \vee P(a), \neg Q(w) \vee P(w), \neg Q(x) \vee \neg P(x)\}$
2. $\{Q(u) \vee P(a), \neg Q(w) \vee P(w), \neg Q(x) \vee \neg P(x), Q(y) \vee \neg P(y)\}$
3. $\{I(a), \neg R(x) \vee L(x), \neg D(y) \vee \neg L(y), D(a)\}$
4. $\{I(a), \neg R(x) \vee L(x), \neg D(y) \vee \neg L(y), D(a), \neg I(z) \vee R(z)\}$
5. $\{\neg P(x, y) \vee \neg P(y, z) \vee P(x, z), P(a, x), P(x, b), P(x, f(x))\}$
6. $\{M(a, s(c), s(b)), P(a), M(x, x, s(x)), \neg M(x, y, z) \vee D(x, z), \neg P(x) \vee \neg M(y, z, u) \vee \neg D(x, u) \vee D(x, y), \neg D(a, b)\}$

Ejercicio 89.— Determina los problemas de deducción:

1. $\{\forall x [P(x) \rightarrow \exists y [R(y) \wedge Q(x, y)]]\}, \exists x [P(x)] \models \exists x \exists y Q(x, y)$
2. $\{\neg A(x) \vee F(x) \vee G(f(x)), \neg F(x) \vee B(x), \neg F(x) \vee C(x), \neg G(x) \vee B(x), \neg G(x) \vee D(x), A(g(x)) \vee F(h(x))\} \models \exists x \exists y [[B(x) \wedge C(x)] \vee [D(y) \wedge B(y)]]$
3. $\{\exists x \forall y \neg P(y, x), \forall z \exists y \forall x [P(x, y) \leftrightarrow [P(x, z) \wedge \neg P(x, y)]]\} \models \forall x \forall y \neg P(y, x)$
4. $\{\exists x \forall y P(x, y), \forall x \forall y [P(x, y) \rightarrow \neg P(y, x)]\} \models \forall x \exists y P(x, y)$
5. $\{\forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \forall w [P(x, y, u) \wedge P(y, z, v) \wedge P(x, v, w) \rightarrow P(u, z, w)], \forall x \forall y \exists z P(z, x, y), \forall x \forall y \exists z P(x, z, y)\} \models \exists x \forall y P(y, x, y)$

Ejercicio 90.— Sabemos que:

1. Pepe tiene dinero: $DI(Pepe)$.
2. La librería Lib tiene el libro Sistemas Expertos: $TL(Lib, SE)$.
3. Pepe quiere ese libro: $Q(Pepe, SE)$.
4. Si una librería L envía el libro l a un cliente c , $ENV(L, l, c)$, entonces el cliente recibe el libro: $R(c, l)$.
5. Si una librería L tiene un libro l , y un cliente c le envía un cheque, $CH(c, L)$, entonces la librería L envía el libro l al cliente c .
6. Si un cliente quiere un libro, y tiene dinero, entonces puede enviar un cheque a una librería.

Expresa estos conocimientos en forma de cláusulas y, por resolución, determinar si Pepe recibirá el libro Sistemas Expertos.

Ejercicio 91.— Sabemos que

1. Existen pacientes a quienes les gustan todos los médicos.
2. A ningún paciente le gusta ningún curandero

Con los predicados $P(x) = “x$ es un paciente”, $M(x) = “x$ es un médico”, $C(x) = “x$ es un curandero”, y $G(x, y) = “a$ x le gusta $y”$, expresar los conocimientos anteriores en forma de cláusulas y, por resolución, demostrar que ningún médico es curandero.

Ejercicio 92.— Sabemos que:

1. Los aficionados a la música son cultos.
2. A algunos cultos les gusta el fútbol.
3. Los aficionados a todo no son cultos.
4. Los aficionados al fútbol, pero no a la música, no son cultos.

Con los predicados $AF(x, y) = “x$ es aficionado a $y”$ y $CU(x) = “x$ es culto”, prueba por resolución que hay a quien le gusta la música y el fútbol.

Ejercicio 93.— Sabemos que

1. Marco era pompeyano.
2. Todos los pompeyanos eran romanos.
3. Cada romano, o era leal a César, o le odiaba.

4. Todo el mundo es leal a alguien.
5. La gente sólo intenta asesinar a quienes no es leal.
6. Marco intentó asesinar a César.

Con los predicados $P(x) = “x \text{ es pompeyano}”$, $R(x) = “x \text{ es romano}”$, $L(x, y) = “x \text{ es leal a } y”$, $O(x, y) = “x \text{ odia a } y”$, y $IA(x, y) = “x \text{ intentó asesinar a } y”$, formaliza los conocimientos anteriores y, por resolución, responde a las preguntas: ¿Era leal Marco a César? ¿Odiaba Marco a César?

Ejercicio 94.– Sabemos que

1. Todos los pasajeros que no eran VIP’s fueron registrados por algún aduanero.
2. Algunos pasajeros eran narcotraficantes, y fueron registrados sólo por narcotraficantes.
3. Ningún narcotraficante era VIP.

Con los predicados $P(x) = “x \text{ es pasajero}”$, $V(x) = “x \text{ es VIP}”$, $A(x) = “x \text{ es aduanero}”$, $N(x) = “x \text{ es narcotraficante}”$, y $R(x, y) = “x \text{ es registrado por } y”$, expresa los conocimientos anteriores en forma de cláusulas y, por resolución, demuestra que algún aduanero es narcotraficante.

Ejercicio 95.– Se conocen los siguientes hechos acerca de las preferencias de dos famosos personajes:

1. Silvestre y Garfield son gatos.
2. A todos los gatos les gusta el queso o los ratones.
3. A nadie a quien le guste el queso, le gusta el vino.
4. A quienes les gustan los ratones, les gusta la cerveza.
5. A Garfield no le gusta lo que le gusta a Silvestre.
6. A Silvestre le gusta el vino y la cerveza.

Se pide:

(a) Formaliza los enunciados anteriores en lenguaje de primer orden utilizando:

- **a**, **b**, **c**, **d**, como constantes para queso, ratones, vino y cerveza, respectivamente.
- **SIL** y **GAR** como constantes para Silvestre y Garfield, respectivamente.
- Los predicados: $G(x)$: “ x es un gato”, $GU(x, y)$: “a x le gusta y ”.

(b) Obtén una forma clausal para el conjunto de fórmulas obtenido en el apartado anterior.

(c) Prueba mediante resolución que a Garfield le gusta el queso y no le gusta el vino.

Ejercicio 96.— Las relaciones de parentesco verifican la siguientes propiedades generales:

- Si x es hermano de y , entonces y es hermano de x .
- Todo el mundo es hijo de alguien.
- Nadie es hijo del hermano de su padre.
- Cualquier padre de una persona es también padre de todos los hermanos de esa persona.
- Nadie es hijo ni hermano de sí mismo.

Tenemos los siguientes miembros de la familia Peláez: D. Antonio, D. Luis, Antoñito y Manolito, y sabemos que D. Antonio y D. Luis son hermanos, Antoñito y Manolito son hermanos, y Antoñito es hijo de D. Antonio. Se pide:

1. Formaliza los conocimientos anteriores en un lenguaje de primer orden usando tan solo:
 - **A, L, a, m** como constantes para D. Antonio, D. Luis, Antoñito y Manolito, resp.
 - Los predicados: $Her(x, y) = x$ es hermano de y , $Hijo(x, y) = x$ es hijo de y
2. Obtén una forma clausal para el conjunto de fórmulas obtenido en el apartado 1.
3. Decide mediante resolución no restringida si D. Luis es el padre de Manolito o no.

Ejercicio 97.— Se conocen los siguientes hechos:

1. Todos los ordenadores son máquinas.
2. El TX-150 es un ordenador.
3. Félix puede arreglar, o bien estropear, cualquier máquina.
4. Cada cosa puede ser arreglada por alguien.
5. Las cosas solamente desesperan a quienes no son capaces de arreglarlas.
6. El TX-150 desespera a Félix.
7. Ninguna máquina puede ser arreglada por sí misma.

Se pide:

(a) Formaliza los hechos anteriores utilizando los siguientes símbolos de predicado:

$O(x)$: “ x es un ordenador”, $M(x)$: “ x es una máquina”, $A(x, y)$: “ x puede arreglar y ”,
 $E(x, y)$: “ x estropea y ” y $D(x, y)$: “ x desespera a y ”.

Y **a**, **b** como constantes para TX-150 y Félix, respectivamente.

(b) Utilizando resolución no restringida responder a las siguientes preguntas: ¿Puede arreglar Félix el TX-150? ¿Estropea Félix el TX-150?