

Tema 1: Sintaxis y Semántica de las Lógicas Proposicional y de Primer Orden

Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Lógica Informática
(Tecnologías Informáticas)
Curso 2018–19

Introducción

Lógica
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica y
satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de términos
y fórmulas

Consecuencia lógica y
validez

Contenido

Introducción

Lógica Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica y satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de términos y fórmulas

Consecuencia lógica y validez

Introducción

Lógica Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica y
satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de términos
y fórmulas

Consecuencia lógica y
validez

Dados un conjunto de **afirmaciones** (hechos, hipótesis,...), BC , y una afirmación, A , decidir si A ha de ser necesariamente cierta, suponiendo que todos las afirmaciones de BC lo son.

La **Lógica** proporciona formulaciones precisas de este problema y diferentes soluciones.

Para abordar este problema formalmente hemos de:

1. Dar un lenguaje para expresar las afirmaciones (*representación*).
2. Concretar qué entendemos por *afirmación cierta*.
3. Proporcionar mecanismos efectivos para garantizar la *corrección de las deducciones*.

A lo largo de este curso estudiaremos estas cuestiones en los dos casos más comunes: la **Lógica Proposicional**, y la **Lógica de Primer Orden**.

Introducción

Lógica
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica y
satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de términos
y fórmulas

Consecuencia lógica y
validez

Características generales de la Lógica Proposicional:

- ▶ Sus expresiones (fórmulas) representan *afirmaciones* que pueden considerarse *verdaderas* o *falsas*.
- ▶ Se construyen a partir de expresiones básicas usando operadores (*conectivas*).
- ▶ Las conectivas se corresponden con formas sencillas de construir afirmaciones complejas en el lenguaje natural partiendo de otras más sencillas:
 - ▶ Conjunción: "... tal ... **y** ... cual ..."
 - ▶ Disyunción: "... tal ... **o** ... cual ..."
 - ▶ Implicación "**Si** ... tal ... **entonces** ... cual ..."
 - ▶ Negación: "**No** es cierto que tal ..."
- ▶ Sólo permite analizar las formas de razonamiento ligadas a este tipo de construcciones.

Introducción

Lógica
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica y
satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de términos
y fórmulas

Consecuencia lógica y
validez

El Lenguaje de la Lógica Proposicional

Formalmente, el *lenguaje de la Lógica Proposicional* consta de:

1. Un conjunto numerable de **variables proposicionales**:

$$VP = \{p, p_0, p_1, \dots, q, q_0, q_1, \dots, r, r_0, \dots\}$$

2. Operadores básicos de construcción, **Conectivas lógicas**:

- ▶ De aridad 1: \neg (negación).
- ▶ De aridad 2: \vee (disyunción), \wedge (conjunción),
 \rightarrow (condicional) y \leftrightarrow (bicondicional).

3. **Símbolos auxiliares**: “(” y “)”.

Introducción

Lógica
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica y
satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de términos
y fórmulas

Consecuencia lógica y
validez

El conjunto de las *fórmulas proposicionales*, **PROP**, es el menor conjunto de expresiones que verifica:

- ▶ $VP \subseteq \mathbf{PROP}$,
- ▶ Es cerrado bajo las conectivas, es decir:
 - ▶ Si $F \in \mathbf{PROP}$, entonces $\neg F \in \mathbf{PROP}$.
 - ▶ Si $F, G \in \mathbf{PROP}$, entonces $(F \vee G)$, $(F \wedge G)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \leftrightarrow G) \in \mathbf{PROP}$.

La sintaxis del lenguaje pretende evitar la ambigüedad en la interpretación de las fórmulas. Esa es la función de los símbolos auxiliares.

Introducción

Lógica Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica y satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

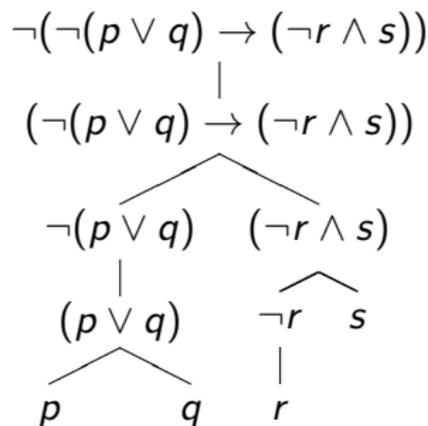
Interpretación de términos y fórmulas

Consecuencia lógica y validez

Árboles de formación

- ▶ Asociamos a cada fórmula un *árbol de formación* (esencialmente único) que describe el modo en que se construye la fórmula a partir de otras más sencillas.

- ▶ **Ejemplo:**



- ▶ Las fórmulas que aparecen en el árbol de formación de una fórmula F se denominan **subfórmulas** de F .

Introducción

Lógica
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica y
satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de términos
y fórmulas

Consecuencia lógica y
validez

Reducción de paréntesis

Para facilitar la lectura de las fórmulas adoptaremos los siguientes convenios de notación:

1. Omitiremos los paréntesis externos.
2. Daremos a las conectivas una precedencia de asociación. De mayor a menor, están ordenadas por: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$.
▶ **Ejemplo:** $F \wedge G \rightarrow \neg F \vee G$ es $((F \wedge G) \rightarrow (\neg F \vee G))$.
3. Siempre se dejarán los paréntesis para la conectiva \leftrightarrow .
4. Cuando una conectiva se usa repetidamente, se asocia por la derecha: $F \vee G \vee H$ es $(F \vee (G \vee H))$.

Introducción

Lógica
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica y
satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de términos
y fórmulasConsecuencia lógica y
validez

Principio de Inducción sobre fórmulas

Gracias a la definición de **PROP** si deseamos probar que toda fórmula proposicional satisface cierta propiedad Ψ , podemos probarlo por **inducción sobre fórmulas**.

Para ello probamos:

1. **Caso base:** Todos los elementos de VP tienen la propiedad Ψ .
2. **Paso de inducción:**
 - 2.1 Si $F \in \mathbf{PROP}$ tiene la propiedad Ψ , entonces $\neg F$ tiene la propiedad Ψ .
 - 2.2 Si $F, G \in \mathbf{PROP}$ tienen la propiedad Ψ , entonces las fórmulas $(F \vee G)$, $(F \wedge G)$, $(F \rightarrow G)$ y $(F \leftrightarrow G)$ también tienen la propiedad Ψ .

Introducción

Lógica
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica y
satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de términos
y fórmulas

Consecuencia lógica y
validez

- ▶ Los elementos del conjunto $\{0, 1\}$ se llaman **valores de verdad**. Se dice que 0 es el valor **falso** y el 1 es el valor **verdadero**.
- ▶ El significado de una conectiva se determina mediante su **función de verdad**:
 - ▶ $H_{\neg}(i) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = 0; \\ 0, & \text{si } i = 1. \end{cases}$
 - ▶ $H_{\vee}(i, j) = \begin{cases} 0, & \text{si } i = j = 0; \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$
 - ▶ $H_{\wedge}(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j = 1; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$
 - ▶ $H_{\rightarrow}(i, j) = \begin{cases} 0, & \text{si } i = 1, j = 0; \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$
 - ▶ $H_{\leftrightarrow}(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$

- ▶ Las variables proposicionales se interpretan mediante una **valoración de verdad** (o interpretación), es decir, una aplicación

$$v : VP \rightarrow \{0, 1\}$$

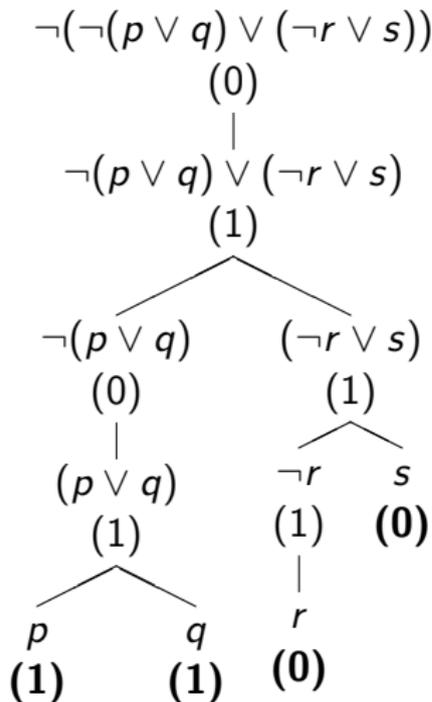
- ▶ Podemos extender cada valoración, v , **de forma única**, al conjunto de todas las fórmulas de manera que para cada fórmula F se verifique:

- ▶ $v(\neg F) = H_{\neg}(v(F))$.
- ▶ $v((F \vee G)) = H_{\vee}(v(F), v(G))$.
- ▶ $v((F \wedge G)) = H_{\wedge}(v(F), v(G))$.
- ▶ $v((F \rightarrow G)) = H_{\rightarrow}(v(F), v(G))$.
- ▶ $v((F \leftrightarrow G)) = H_{\leftrightarrow}(v(F), v(G))$.

- ▶ Se dice que $v(F)$ es el **valor de verdad** de F respecto de v .

Valor de verdad

Veamos el cálculo de $v(\neg(\neg(p \vee q) \vee (\neg r \vee s)))$ en el árbol de formación (de abajo a arriba):



Tablas de verdad

Dada una valoración, v , el valor de verdad de una fórmula F respecto de v está determinado por los valores de verdad de las subfórmulas de F .

Ejemplo: si $v(p) = v(q) = 0$ y $v(r) = 1$, entonces

$$\begin{aligned} v(\neg((p \rightarrow q) \vee r)) &= H_{\neg}(H_{\vee}(v(p \rightarrow q), v(r))) = \\ &= H_{\neg}(H_{\vee}(H_{\rightarrow}(v(p), v(q)), 1)) = 0 \end{aligned}$$

Fijada v podemos presentar el cálculo de F mediante una tabla que recorre los valores de sus subfórmulas:

p	q	r	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \vee r$	$\neg((p \rightarrow q) \vee r)$
0	0	1	1	1	0

Una **tabla de verdad** para F es una tabla similar que contiene una fila por cada posible valoración que asigne valores a las variables proposicionales que aparecen en F .

Introducción

Lógica
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica y
satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de términos
y fórmulas

Consecuencia lógica y
validez

Validez y satisfactibilidad (I)

- ▶ Decimos que una fórmula F es **válida en** v , o que v es un **modelo** de F , si $v(F) = 1$.
 - ▶ Notación: $v \models F$.
 - ▶ Una valoración v es *modelo* de un conjunto de fórmulas U , $v \models U$, si v es modelo de todas las fórmulas de U .
- ▶ Una fórmula F es una **tautología** (o **válida**) si es válida para toda valoración (notación $\models F$).
- ▶ Una fórmula F es **satisfactible** (o consistente) si existe una valoración que es modelo de F . En caso contrario diremos que es **insatisfactible** (o inconsistente).
 - ▶ Análogamente, un conjunto de fórmulas U es satisfactible (o consistente) si existe una valoración que es modelo de U . En caso contrario diremos que es insatisfactible (o inconsistente).

Introducción

Lógica
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica y
satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de términos
y fórmulasConsecuencia lógica y
validez

Validez y satisfactibilidad (II)

Relación entre ambos conceptos:

Lema. Para cada $F \in \mathbf{PROP}$ se verifica:

- ▶ Si F es un tautología entonces F es satisfactible.
- ▶ F es una tautología si y sólo si $\neg F$ insatisfactible.

Ejemplos:

- ▶ Son tautologías: $(p \vee \neg p)$ y $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$.
- ▶ $p \wedge \neg p$ es insatisfactible y, por tanto, $\neg(p \wedge \neg p)$ es una tautología.
- ▶ $(p \rightarrow q) \rightarrow p$ es satisfactible pero no es una tautología.

Introducción

Lógica
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

**Consecuencia lógica y
satisfactibilidad**

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de términos
y fórmulas

Consecuencia lógica y
validez

- ▶ Una fórmula F es **consecuencia lógica** de un conjunto de fórmulas U , si todo modelo de U es modelo de F .
Es decir, para toda valoración, v ,

$$v \models U \implies v \models F$$

- ▶ Notación: $U \models F$.
- ▶ La relación de consecuencia lógica permite formular el problema básico en el marco de la lógica proposicional.

Relación entre consecuencia lógica, consistencia y validez:

Proposición. Sea $\{F_1, \dots, F_n\} \subseteq \mathbf{PROP}$. Son equivalentes:

- ▶ $\{F_1, \dots, F_n\} \models F$
- ▶ $F_1 \wedge \dots \wedge F_n \rightarrow F$ es un tautología.
- ▶ $\{F_1, \dots, F_n, \neg F\}$ es insatisfactible.

Algoritmos de decisión (I)

Dado un conjunto de fórmulas proposicionales, U , un **algoritmo de decisión** para U es un algoritmo que dada $A \in PROP$, devuelve SI cuando $A \in U$, y NO si $A \notin U$.

Casos especialmente interesantes:

- ▶ **SAT** = $\{A \in PROP : A \text{ es satisfactible}\}$
- ▶ **TAUT** = $\{A \in PROP : A \text{ es una tautología}\}$
- ▶ Fijado $U \subseteq PROP$, la **Teoría de U** es

$$\mathcal{T}(U) = \{A \in PROP : U \models A\}$$

Un algoritmo de decisión para $\mathcal{T}(U)$ proporciona una respuesta al Problema Básico expuesto al principio del tema.

Introducción

Lógica
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica y
satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de términos
y fórmulas

Consecuencia lógica y
validez

Algoritmos de decisión (II)

Problema Básico:

Obtener un algoritmo que, dado un conjunto finito de fórmulas proposicionales, U , y una fórmula F , decida si $U \models F$.

El problema anterior se reduce a decidir la **satisfactibilidad** de una cierta fórmula (o si se prefiere, la **validez** de otra). Por tanto,

- ▶ La construcción de tablas de verdad proporciona un algoritmo (ineficiente) para decidir la consecuencia lógica.
- ▶ El Problema Básico es resoluble algorítmicamente, aunque no se conoce ninguna solución eficiente y se duda de la existencia de algoritmos de decisión eficientes para este problema, ya que ...
- ▶ ... determinar la satisfactibilidad de una fórmula proposicional es un problema **NP-completo**.

Introducción

Lógica
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica y
satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de términos
y fórmulas

Consecuencia lógica y
validez

Algoritmos de decisión (III)

Problema Básico (bis):

Obtener un algoritmo eficiente que, dado un conjunto finito de fórmulas proposicionales, U , y una fórmula F , decida si $U \models F$.

Observaciones:

- ▶ Este problema es equivalente al de obtener un algoritmo eficiente para determinar la satisfactibilidad de una fórmula proposicional.
- ▶ Se trata de un **problema abierto**, que posiblemente tendrá una respuesta negativa (se cree que no existen algoritmos eficientes para resolver SAT).
- ▶ Para propósitos prácticos puede bastar con algoritmos eficientes para alguna clase especial de fórmulas.

Introducción

Lógica
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica y
satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de términos
y fórmulas

Consecuencia lógica y
validez

Limitaciones de la lógica proposicional

- ▶ La lógica proposicional posee una semántica sencilla y existen algoritmos de decisión para sus problemas básicos, como SAT o la consecuencia lógica.
- ▶ Sin embargo, la expresividad de la lógica proposicional es bastante limitada.
- ▶ Existen problemas cuya descripción mediante lógica proposicional es complicada, ya que requieren un gran número de fórmulas o bien fórmulas de gran tamaño.
- ▶ Más aún, existen formas de razonamiento válido que no pueden ser expresadas mediante la lógica proposicional, por ejemplo:
 - ▶ Todos los hombres son mortales
 - ▶ Sócrates es un hombre.
 - ▶ Por tanto, Sócrates es mortal.
- ▶ La Lógica de Primer Orden extiende a la Lógica Proposicional proporcionando mayor expresividad.

Ejemplo (I)

Consideremos las siguientes afirmaciones:

1. Marco era pompeyano.
2. Todos los pompeyanos eran romanos.
3. Cada romano, o era leal a César, o le odiaba.
4. Todo el mundo es leal a alguien.
5. La gente sólo intenta asesinar a aquellos a quienes no es leal.
6. Marco intentó asesinar a César.
7. Todo pompeyano es leal a su padre.

¿Podemos deducir a partir de esta información que Marco era leal a César? ¿Podemos deducir que Marco odiaba a César? ¿Era César el padre de Marco?

Introducción

Lógica
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica y
satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de términos
y fórmulas

Consecuencia lógica y
validez

Ejemplo (II)

- ▶ Podemos formalizar las afirmaciones observando que todas ellas expresan propiedades de los elementos de un cierto conjunto de individuos (romanos) y las relaciones que se dan entre ellos.
- ▶ Introduzcamos símbolos para expresar estas relaciones y para referirnos a los individuos de los que estamos hablando:
 - ▶ $P(x)$ expresa “ x es pompeyano”.
 - ▶ $R(x)$ expresa “ x es romano”.
 - ▶ $L(x, y)$: “ x es leal a y ”.
 - ▶ $O(x, y)$: “ x odia a y ”.
 - ▶ $IA(x, y)$: “ x intentó asesinar a y ”.
 - ▶ Por último, parece natural introducir una función f que para cada x , devuelve el padre de x , $f(x)$.

Introducción

Lógica
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica y
satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de términos
y fórmulasConsecuencia lógica y
validez

Ejemplo (III)

Ahora podemos formalizar los enunciados anteriores:

1. $P(\mathbf{Marco})$ expresa “Marco es pompeyano”
2. $\forall x (P(x) \rightarrow R(x))$
 - ▶ “Todos los pompeyanos son romanos”
3. $\forall x (R(x) \rightarrow (L(x, \mathbf{Cesar}) \vee O(x, \mathbf{Cesar})))$
 - ▶ “Todo romano es leal a César o le odia”
4. $\forall x \exists y L(x, y)$
 - ▶ “Todo el mundo es leal a alguien”.
5. $\forall x \forall y (IA(x, y) \rightarrow \neg L(x, y))$
 - ▶ “La gente sólo intenta asesinar a aquellos a quienes no es leal”.
6. $IA(\mathbf{Marco}, \mathbf{Cesar})$
 - ▶ “Marco intentó asesinar a César”.
7. $\forall x (P(x) \rightarrow L(x, f(x)))$
 - ▶ “Todo pompeyano es leal a su padre”.

Introducción

Lógica
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica y
satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de términos
y fórmulasConsecuencia lógica y
validez

Ejemplo (IV)

- ▶ Para las preguntas podemos escribir:
 - a. $L(\mathbf{Marco}, \mathbf{Cesar})$: Marco es leal a César.
 - b. $O(\mathbf{Marco}, \mathbf{Cesar})$: Marco odia a César.
- ▶ Sin embargo, no podemos expresar que “Marco es el padre de César” sin considerar algún símbolo más.
- ▶ Una posibilidad es añadir a nuestro lenguaje el símbolo “=” para expresar al igualdad entre dos objetos. De este modo tendríamos:
 - ▶ $f(\mathbf{Marco}) = \mathbf{Cesar}$: César es el padre de Marco.
- ▶ Como puede verse, hemos ampliado el conjunto de símbolos disponibles en la lógica proposicional.
- ▶ El conjunto de símbolos introducidos constituye lo que denominamos un **Lenguaje de Primer Orden**.

Introducción

Lógica
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica y
satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de términos
y fórmulas

Consecuencia lógica y
validez

- ▶ Un **lenguaje de primer orden** L consta de:
 - ▶ Símbolos lógicos (comunes a todos los lenguajes):
 1. Un conjunto de **variables**: $V = \{x_0, x_1, \dots\}$.
 2. **Conectivas lógicas**: $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$.
 3. **Cuantificadores**: \exists (existencial), \forall (universal).
 4. **Símbolos auxiliares**: “(”, “)” y “;”
 - ▶ Símbolos no lógicos (propios de cada lenguaje):
 1. Un conjunto L_C de **constantes**.
 2. Un conjunto de **símbolos de función**
 $L_F = \{f_0, f_1, \dots\}$, cada uno con su aridad.
 3. Un conjunto de **símbolos de predicados**
 $L_P = \{p_0, p_1, \dots\}$, cada uno con su aridad.

(Los conjuntos V, L_F, L_C y L_P son disjuntos)
- ▶ Los símbolos de predicado de aridad 0 actúan como símbolos proposicionales.
- ▶ El símbolo $=$ no es un predicado común a todos los lenguajes de primer orden. Cuando está incluido en el lenguaje decimos que se trata de un **Lenguaje de Primer Orden con igualdad**.

- ▶ En el ejemplo de los romanos se introdujo el lenguaje:

$$LR = \left\{ \underbrace{\text{Marco, Cesar}}_{\text{constantes}}, \underbrace{P, L, O, R, IA}_{\text{símb. predicado}}, \underbrace{f}_{\text{símb. función}} \right\}$$

P, R y f tienen aridad 1. L, O y IA tienen aridad 2.

- ▶ El lenguaje de la Aritmética (números naturales):

$$LA = \left\{ \underbrace{0, 1}_{\text{constantes}}, \underbrace{<, =}_{\text{símb. predicado}}, \underbrace{\cdot, +}_{\text{símb. de función}} \right\}$$

$<, +$ y \cdot tienen aridad 2.

- ▶ Un lenguaje para el parentesco:

$$LP = \left\{ \underbrace{\text{padre_de, madre_de, hijo, hermano, casados}}_{\text{símb. predicado}} \right\}$$

Todos de aridad 2.

- ▶ Los **términos** de un lenguaje L se definen como:
 1. Las variables y las constantes son términos.
 2. Si t_1, \dots, t_n son términos y f es un símbolo de función de L de aridad n , entonces $f(t_1, \dots, t_n)$ es un término.
- ▶ Los términos son expresiones que me permiten hablar de objetos del mundo.
- ▶ Ejemplos:
 - ▶ Son términos del lenguaje LR :

Marco, Cesar, $f(x)$, $f(\mathbf{Cesar})$, $f(f(\mathbf{Cesar}))$, ...

- ▶ Son términos del lenguaje de la Aritmética:

0 , $+(x, y)$, $\cdot(x, +(y, \mathbf{1}))$, ...

Utilizando la notación infija tradicional se escriben

$$x + y, x \cdot (y + \mathbf{1})$$

- ▶ Las fórmulas son expresiones que permiten hablar de veracidad y falsedad.
- ▶ Las **fórmulas atómicas** de L son las expresiones $p(t_1, \dots, t_n)$, donde p es un símbolo de predicado de aridad n y t_1, \dots, t_n son términos.
- ▶ Las **fórmulas** de L se definen como sigue:
 1. Las fórmulas atómicas de L son fórmulas de L .
 2. Si F y G son fórmulas de L , entonces $\neg F$, $(F \vee G)$, $(F \wedge G)$, $(F \rightarrow G)$ y $(F \leftrightarrow G)$ también lo son.
 3. Si x es una variable y F es una fórmula de L , entonces $\exists x F$ y $\forall x F$ también son fórmulas.

- ▶ En LA , $\neg \exists x(x \cdot \mathbf{0} = y)$
- ▶ En LP , $\exists x(\text{padre_de}(x, y) \wedge \text{padre_de}(x, z))$.
Pero $\exists x \text{ padre_de}(\text{padre_de}(x, y), z)$, NO es una fórmula.
- ▶ En LR ,

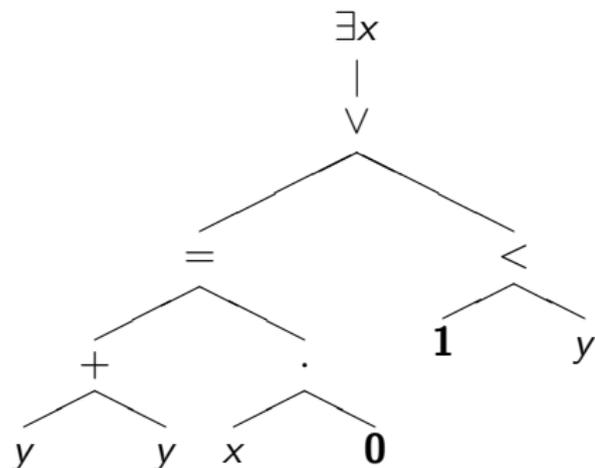
$$\forall x \exists y L(x, y)$$

$$\forall x (R(x) \rightarrow (L(x, \mathbf{Cesar}) \vee O(x, \mathbf{Cesar})))$$

- ▶ **Notación:** Para facilitar la lectura de las fórmulas y reducir el número de paréntesis adoptamos los mismos convenios que para la lógica proposicional:
 - ▶ Omitiremos los paréntesis externos.
 - ▶ Daremos a las conectivas una precedencia de asociación. De mayor a menor, están ordenadas por: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$.
 - ▶ Se dejan los paréntesis para la conectiva \leftrightarrow .

Árboles de formación

Análisis sintáctico de la expresión $\exists x(y + y = x \cdot 0 \vee 1 < y)$



O también:

$$\exists x(y + y = x \cdot 0 \vee 1 < y)$$

$$(y + y = x \cdot 0 \vee 1 < y)$$

$$y + y = x \cdot 0 \quad 1 < y$$

Las fórmulas de los nodos se denominan **subfórmulas**.

Introducción

Lógica
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica y
satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de términos
y fórmulas

Consecuencia lógica y
validez

Tratamiento de la cuantificación

- ▶ Significado intuitivo de $\exists x(y \cdot x = \mathbf{1})$:
- ▶ Dado y , existe un elemento, que denotamos por x (no sabemos exactamente su valor), que satisface la propiedad $x \cdot y = \mathbf{1}$, pero **no es cualquiera**.
- ▶ El símbolo que usemos para ese elemento no es importante: la fórmula $\exists z(y \cdot z = \mathbf{1})$ expresa la misma propiedad para y .
- ▶ La fórmula dice algo sobre y (en este caso, si sustituyo y por un elemento del universo, afirma que tal elemento tiene inverso a la derecha), no sobre el elemento x : Si cambio x por y , la fórmula resultante $\exists y(y \cdot y = \mathbf{1})$ **no expresa** lo mismo que la original.

Introducción

Lógica Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica y satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de términos y fórmulas

Consecuencia lógica y validez

- ▶ Una **estancia ligada** de una variable x en una fórmula F es una aparición de x en una subfórmula del tipo $\exists x F$ o $\forall x F$. En otro caso, diremos que es una **estancia libre**.
 - ▶ **Variable libre** en F : Al menos una estancia libre.
 - ▶ **Variable ligada** en F : Al menos una estancia ligada.
- ▶ Según las estancias de sus variables, podemos distinguir los siguientes tipos de expresiones:
 - ▶ Término **cerrado**: no contiene variables.
 - ▶ Fórmula **cerrada**: no contiene variables libres.
 - ▶ Fórmula **abierta**: no contiene cuantificadores.

Introducción

Lógica Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica y
satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de términos
y fórmulas

Consecuencia lógica y
validez

Ejemplos

- ▶ $\exists x \forall y (x \cdot y = z \cdot \mathbf{1})$ no es cerrada (z es libre).
- ▶ $\exists x (\forall y (x \cdot y = \mathbf{1}) \vee x \cdot y = x)$ no es cerrada.
 - ▶ La variable y aparece libre y ligada.
 - ▶ Aunque sintácticamente es correcto, no escribiremos fórmulas en las que una misma variable aparezca libre y ligada. Usaremos en su lugar la fórmula

$$\exists x (\forall y (x \cdot y = \mathbf{1}) \vee (x \cdot z = x))$$

- ▶ $\forall x \exists y \forall z (z < x \leftrightarrow z < y)$ es una fórmula cerrada.
- ▶ $\text{padre_de}(y, x) \vee \text{hermano}(z, x)$ es abierta.
- ▶ La fórmula

$$L(x, y) \wedge \exists z IA(y, z) \rightarrow \neg IA(x, z)$$

no es cerrada ni abierta.

Introducción

Lógica
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica y
satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de términos
y fórmulas

Consecuencia lógica y
validez

Sustituciones (I)

- ▶ Una **sustitución**, θ , es una asignación de términos a un conjunto finito de variables.

- ▶ La forma de describirla, si $\theta(x_1) = t_1, \dots, \theta(x_n) = t_n$ y las restantes variables quedan invariantes, es $\theta = \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$ ó $\theta = \{(x_1, t_1), \dots, (x_n, t_n)\}$

- ▶ Aplicación de θ a un término t :

$$\theta(t) := \begin{cases} \theta(t), & \text{si } t \text{ es una variable;} \\ f(\theta(t_1), \dots, \theta(t_n)), & \text{si } t \equiv f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

(también se denota por $t\{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$).

- ▶ Ejemplos:

- ▶ Si $\theta = \{x/(x+y), z/\mathbf{0}, u/\mathbf{1}\}$, y $t = (x+y) + z$, entonces

$$\theta(t) \equiv ((x+y) + y) + \mathbf{0}$$

- ▶ $(x \cdot \mathbf{1})\{x/y, y/\mathbf{1}\} \equiv y \cdot \mathbf{1}$

Introducción

Lógica
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica y
satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de términos
y fórmulasConsecuencia lógica y
validez

Sustituciones (II)

- Aplicación de $\theta = \{x/t\}$ a una fórmula F :

$$F\{x/t\} := \begin{cases} p(t_1\{x/t\}, \dots, t_n\{x/t\}), & \text{si } F \equiv p(t_1, \dots, t_n) \\ \neg G\{x/t\}, & \text{si } F \equiv \neg G; \\ G\{x/t\} \vee H\{x/t\}, & \text{si } F \equiv G \vee H: \\ G\{x/t\} \wedge H\{x/t\} & \text{si } F \equiv G \wedge H: \\ G\{x/t\} \rightarrow H\{x/t\}, & \text{si } F \equiv G \rightarrow H: \\ G\{x/t\} \leftrightarrow H\{x/t\}, & \text{si } F \equiv G \leftrightarrow H: \\ \exists yG\{x/t\}, & \text{si } F \equiv \exists yG \text{ y } x \neq y; \\ \forall yG\{x/t\}, & \text{si } F \equiv \forall yG \text{ y } x \neq y; \\ \exists xG, & \text{si } F \equiv \exists xG; \\ \forall xG, & \text{si } F \equiv \forall xG; \end{cases}$$

- Análogamente se define $F\{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$.

Introducción

Lógica
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica y
satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de términos
y fórmulas

Consecuencia lógica y
validez

Sustituciones (III)

- ▶ No toda sustitución es admisible:
Si $F \equiv \exists x \neg(x = y)$ (“existen al menos dos elementos”) y $\theta = \{y/x\}$, entonces $\theta(F) \equiv \exists x \neg(x = x)$ ¡Que es falso!
- ▶ Solución: No admitir la **creación** de nuevas estancias ligadas.
- ▶ Una variable x de F es **sustituible** por el término t si se cumple una de las siguientes condiciones:
 1. F es atómica;
 2. $F \equiv \neg G$ y x es sustituible por t en G ;
 3. $F \equiv G \vee H$, $F \equiv G \wedge H$, $F \equiv G \rightarrow H$ o bien $F \equiv G \leftrightarrow H$ y x es sustituible por t en G y en H ;
 4. $F \equiv \exists x G$; o bien, $F \equiv \exists y G$, $x \neq y$, y no ocurre en t , y x es sustituible por t en G .
 5. $F \equiv \forall x G$; o bien, $F \equiv \forall y G$, $x \neq y$, y no ocurre en t , y x es sustituible por t en G .
- ▶ x es sustituible por t en F si al hacer la sustitución no se crean estancias ligadas nuevas.

Introducción

Lógica
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica y
satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de términos
y fórmulas

Consecuencia lógica y
validez

- ▶ En lo sucesivo, al escribir $F\{x/t\}$, supondremos que x es sustituible por t en F .
- ▶ Escribiremos $F(x_1, \dots, x_n)$ si x_1, \dots, x_n son sus variables libres.
- ▶ Cuando el orden de las variables esté claro, abreviaremos $F\{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$ por $F(t_1, \dots, t_n)$.

- ▶ **Objetivo:** Dotar de significado a los términos y fórmulas de un lenguaje de primer orden.
 - ▶ Términos cerrados: elementos del universo.
 - ▶ Significado de las fórmulas: propiedades sobre los elementos del universo.
- ▶ Una **L -estructura** (o **interpretación**) \mathcal{M} , consta de:
 - ▶ Un conjunto no vacío $M \neq \emptyset$ (el **universo** de la estructura).
 - ▶ Una interpretación en M para cada símbolo de L :
 1. Para cada constante c , $c^{\mathcal{M}} \in M$.
 2. Para cada función, f , de aridad $n > 0$, $f^{\mathcal{M}} : M^n \rightarrow M$.
 3. Para cada predicado, p , de aridad $n > 0$,
 $p^{\mathcal{M}} : M^n \rightarrow \{0, 1\}$ (equiv., $p^{\mathcal{M}} \subseteq M^n$).
 4. Si L es un LPO *con igualdad* la interpretación de $=$ es

$$\{(a, a) : a \in M\}$$

- ▶ Si no hay confusión, escribiremos M en vez de \mathcal{M} , p^M en lugar de $p^{\mathcal{M}}$, etc.

Introducción

Lógica
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica y
satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de términos
y fórmulas

Consecuencia lógica y
validez

Ejemplos (I)

- ▶ Para LP , sea \mathcal{M}_1 la estructura dada por:
 - ▶ Universo: $M_1 = \{Pedro, Pablo, Ana, Laura\}$.
 - ▶ $padre_de^{M_1} = \{(Pablo, Ana), (Pedro, Pablo)\}$.
 - ▶ $madre_de^{M_1} = \{(Ana, Laura)\}$.
 - ▶ $hermano^{M_1} = \emptyset$.
 - ▶ $casados^{M_1} = \emptyset$.

- ▶ Para LP , consideremos \mathcal{M}_2 dada por:
 - ▶ Universo: $M_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
 - ▶ $padre_de^{M_2} \equiv$ ser múltiplo de.
 - ▶ $madre_de^{M_2} \equiv$ ser menor.
 - ▶ $hermano^{M_2} \equiv$ primos entre sí.
 - ▶ $casados^{M_2} = \emptyset$.

Introducción

Lógica Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica y
satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de términos
y fórmulas

Consecuencia lógica y
validez

Ejemplos (II)

► Para LA , sea \mathcal{M}_3 dada por:

- Universo: $M_3 = \mathbb{N}$
- $\mathbf{0}^{M_3} = 0$.
- $\mathbf{1}^{M_3} = 1$.
- La función $+^{M_3}$ es la suma de números naturales.
- La función \cdot^{M_3} es el producto de números naturales.
- $=^{M_3}$ es la igualdad entre números naturales.
- $<^{M_3}$ es el orden entre números naturales.

► Para LA , sea \mathcal{M}_4 dada por:

- Universo: $M_4 = \mathbb{Q}$
- $\mathbf{0}^{M_4} = \frac{1}{2}$.
- $\mathbf{1}^{M_4} = 2$.
- La función $+^{M_4}$ es la diferencia de números racionales.
- La función \cdot^{M_4} está dada por $p \cdot^{M_4} q = p$.
- $=^{M_4}$ es la igualdad entre números naturales.
- $<^{M_4}$ es el orden entre números racionales.

Introducción

Lógica Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica y
satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de términos
y fórmulas

Consecuencia lógica y
validez

Interpretación de términos (I)

► Dada una L -estructura \mathcal{M} , a cada término t de L , **sin variables**, le corresponde un elemento de M , que denotamos por $t^{\mathcal{M}}$ (su **interpretación** en \mathcal{M}):

- Si $t \equiv c$ una constante, entonces $t^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{M}} \in M$.
- Si $t \equiv f(t_1, \dots, t_n)$, entonces $t^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, \dots, t_n^{\mathcal{M}})$.

► Ejemplos:

$$\begin{aligned} ((0 \cdot 1) + 1)^{M_3} &= ((0 \cdot 1)^{M_3} +^{M_3} 1^{M_3}) \\ &= (0^{M_3} \cdot^{M_3} 1^{M_3}) + 1 \\ &= (0 \cdot 1) + 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((0 \cdot 1) + 1)^{M_4} &= ((0 \cdot 1)^{M_4} +^{M_4} 1^{M_4}) \\ &= (0^{M_4} \cdot^{M_4} 1^{M_4}) - 2 \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot^{M_4} 2\right) - 2 \\ &= \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Introducción

Lógica
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica y
satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de términos
y fórmulas

Consecuencia lógica y
validez

Interpretación de términos (II)

- ▶ Asociamos a cada L -estructura, \mathcal{M} , un lenguaje $L(\mathcal{M})$, que tiene todos los símbolos de L y, además, una constante \underline{a} por cada elemento $a \in M$.
- ▶ La interpretación de los símbolos de $L(\mathcal{M})$ en \mathcal{M} es la misma para los símbolos de L , y para cada $a \in M$,

$$\underline{a}^{\mathcal{M}} = a$$

- ▶ Ahora podemos calcular $t^{\mathcal{M}}$ para todo término de $L(\mathcal{M})$ sin variables:

$$\begin{aligned} ((\underline{2} \cdot \underline{5}) + \mathbf{1})^{M_3} &= ((\underline{2} \cdot \underline{5})^{M_3} +^{M_3} \mathbf{1}^{M_3}) \\ &= (\underline{2}^{M_3} \cdot^{M_3} \underline{5}^{M_3}) + 1 \\ &= (2 \cdot 5) + 1 = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((\underline{2}^{M_4} \cdot \underline{5}^{M_4}) + \mathbf{1})^{M_4} &= ((x \cdot y)^{M_4} +^{M_4} \mathbf{1}^{M_4}) \\ &= (\underline{2}^{M_4} \cdot^{M_4} \underline{5}^{M_4}) - 2 \\ &= 2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

Introducción

Lógica Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica y satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de términos y fórmulas

Consecuencia lógica y validez

Interpretación de fórmulas (I)

Dada una L -estructura \mathcal{M} , decimos que una fórmula F cerrada de $L(\mathcal{M})$ se **satisface** en \mathcal{M} , $\mathcal{M} \models F$, si:

- ▶ Si F es $p(t_1, \dots, t_n)$ (atómica), entonces $\mathcal{M} \models F$ sii $(t_1^{\mathcal{M}}, \dots, t_n^{\mathcal{M}}) \in p^{\mathcal{M}}$.
- ▶ Si F es $F_1 \vee F_2$, entonces $\mathcal{M} \models F$ sii se verifica que

$$\mathcal{M} \models F_1 \quad \text{ó} \quad \mathcal{M} \models F_2$$

- ▶ Las conectivas \wedge , \rightarrow y \leftrightarrow se tratan de manera similar.
- ▶ Si F es $\neg F_1$, entonces $\mathcal{M} \models F$ sii no se tiene $\mathcal{M} \models F_1$.
- ▶ Si F es $\exists x F_1(x)$, entonces $\mathcal{M} \models F$ sii

$$\text{existe } b \in M \text{ tal que } \mathcal{M} \models F_1(\underline{b})$$

- ▶ Si F es $\forall x F_1(x)$, entonces $\mathcal{M} \models F$ sii

$$\text{para todo } b \in M, \text{ se tiene } \mathcal{M} \models F_1(\underline{b})$$

Introducción

Lógica Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica y
satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de términos
y fórmulasConsecuencia lógica y
validez

Interpretación de fórmulas (II)

- ▶ En particular, la definición anterior nos permite precisar cuándo una fórmula cerrada de L , F , es válida en \mathcal{M} (o bien que \mathcal{M} es un modelo de F) y escribir $\mathcal{M} \models F$.
- ▶ Si F no es cerrada, por definición,

$$\mathcal{M} \models F(x_1, \dots, x_n) \iff \mathcal{M} \models \forall x_1 \cdots \forall x_n F(x_1, \dots, x_n)$$

- ▶ Si Σ es un conjunto de fórmulas de un lenguaje L y \mathcal{M} una estructura para L , decimos que \mathcal{M} **es un modelo de Σ** , si

$$\text{para toda fórmula } F \in \Sigma, \quad \mathcal{M} \models F.$$

Introducción

Lógica
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica y
satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de términos
y fórmulasConsecuencia lógica y
validez

Ejemplos

En \mathcal{M}_1 :

- ▶ Universo: $M_1 = \{Pedro, Pablo, Ana, Laura\}$.
- ▶ $padre_de^{M_1} = \{(Pablo, Ana), (Pedro, Pablo)\}$.
- ▶ $madre_de^{M_1} = \{(Ana, Laura)\}$.
- ▶ $hermano^{M_1} = \emptyset$, $casados^{M_1} = \emptyset$.

Se tiene:

- ▶ $\mathcal{M}_1 \models \exists x (padre_de(Pablo, x) \wedge madre_de(x, \underline{Laura}))$
- ▶ $\mathcal{M}_1 \models \neg \exists x padre_de(x, \underline{Laura})$
- ▶ $\mathcal{M}_1 \models \forall x \forall y \forall z (padre(x, z) \wedge madre(y, z) \rightarrow \neg casados(x, y))$.
- ▶ $\mathcal{M}_1 \models hermano(x, y) \leftrightarrow hermano(y, x)$
- ▶ $\mathcal{M}_1 \not\models \exists x padre_de(x, y)$

Introducción

Lógica
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica y
satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de términos
y fórmulas

Consecuencia lógica y
validez

Ejemplos (II)

En \mathcal{M}_2 :

- ▶ Universo: $M_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- ▶ $padre_de^{M_2} \equiv$ ser múltiplo de.
- ▶ $madre_de^{M_2} \equiv$ ser menor.
- ▶ $hermano^{M_2} \equiv$ primos entre sí, $casados^{M_2} = \emptyset$.

Se tiene:

- ▶ $\mathcal{M}_2 \models \exists x (padre_de(\underline{4}, x) \wedge madre_de(x, \underline{3}))$
- ▶ $\mathcal{M}_2 \models \exists x padre_de(x, \underline{3})$
- ▶ $\mathcal{M}_2 \models hermano(x, y) \leftrightarrow hermano(y, x)$
- ▶ $\mathcal{M}_2 \models \exists x \forall y padre_de(x, y)$ [$x = 0$]
- ▶ ¿Se tiene $\mathcal{M}_2 \models hermano(x, y) \rightarrow \neg padre_de(x, y)$?

Introducción

Lógica
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica y
satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de términos
y fórmulas

Consecuencia lógica y
validez

- ▶ Una fórmula $F(x_1, \dots, x_n)$ de L es **satisfactible** si existe una L -estructura \mathcal{M} y elementos $a_1, \dots, a_n \in M$ tales que

$$\mathcal{M} \models F(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$$

- ▶ Ejemplo: $\exists x \text{ padre_de}(x, y)$
- ▶ Un conjunto de fórmulas cerradas Σ de un lenguaje L es **consistente** si existe una L -estructura, \mathcal{M} , tal que

$$\text{para toda formula } F \in \Sigma, \quad \mathcal{M} \models F$$

- ▶ Una fórmula F es **lógicamente válida** si para toda estructura \mathcal{M} se tiene que $\mathcal{M} \models F$ (Notación: $\models F$).
- ▶ Ejemplo: $\forall x P(x) \vee \exists x \neg P(x)$

Consecuencia lógica y equivalencia

- ▶ Diremos que una fórmula F es **consecuencia lógica** de un conjunto de fórmulas cerradas Σ , ($\Sigma \models F$), si para toda L -estructura \mathcal{M} se tiene que

$$\text{si } \mathcal{M} \models \Sigma, \text{ entonces } \mathcal{M} \models F$$

- ▶ Es decir, si todo modelo de Σ es modelo de F .
- ▶ Los problemas de la consistencia, consecuencia lógica y la validez para la lógica primer orden, **no son decidibles**.

Introducción

Lógica
Proposicional

Sintaxis

Fórmulas

Inducción sobre fórmulas

Semántica

Funciones de verdad

Valoraciones

Consecuencia lógica y
satisfactibilidad

Problemas de decisión

Limitaciones

Lógica de Primer
Orden

Sintaxis

Términos y fórmulas

Sustituciones

Semántica

Estructuras

Interpretación de términos
y fórmulas

Consecuencia lógica y
validez