

# Tema 2: Tableros Semánticos

Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial  
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Lógica Informática  
(Tecnologías Informáticas)  
Curso 2018–19

Introducción

Tableros  
Semánticos en LP

Fórmulas  $\alpha$  y  $\beta$

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Tableros  
Semánticos en  
LPO

Fórmulas  $\delta$  y  $\gamma$

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Razonamiento con igualdad

# Contenido

## Introducción

### Tableros Semánticos en LP

Fórmulas  $\alpha$  y  $\beta$

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

### Tableros Semánticos en LPO

Fórmulas  $\delta$  y  $\gamma$

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Razonamiento con igualdad

Introducción

Tableros  
Semánticos en LP

Fórmulas  $\alpha$  y  $\beta$

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Tableros  
Semánticos en  
LPO

Fórmulas  $\delta$  y  $\gamma$

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Razonamiento con igualdad

# Introducción

- ▶ Algoritmo para estudiar la satisfactibilidad de un conjunto de fórmulas proposicionales y de primer orden.
- ▶ Trabaja directamente sobre el conjunto de fórmulas, **sin preprocesamiento**.
- ▶ Basado en la sintaxis de las fórmulas.
- ▶ Reduce la satisfactibilidad de las formulas consideradas a la de ciertos conjuntos de literales, que proporcionan modelos.
- ▶ Se representará gráficamente mediante un árbol binario.
- ▶ Es muy flexible y puede adaptarse a otras lógicas (descriptivas, modales, etc.).

## Introducción

### Tableros Semánticos en LP

Fórmulas  $\alpha$  y  $\beta$   
 Tableros completos  
 Búsqueda de modelos  
 Consecuencia lógica

### Tableros Semánticos en LPO

Fórmulas  $\delta$  y  $\gamma$   
 Tableros completos  
 Búsqueda de modelos  
 Consecuencia lógica  
 Razonamiento con igualdad

# Tableros Semánticos en LP

El método de tableros semánticos en LP:

1. Clasifica las fórmulas en dos clases:
  - ▶ Las fórmulas  $\alpha$ , que se comportan como conjunciones.
  - ▶ Las fórmulas  $\beta$ , que se comportan como disyunciones.
2. Asocia a cada fórmula,  $F$ , otras dos fórmulas más sencillas (sus **componentes**) de modo que la satisfactibilidad de  $F$  se reduce a la de sus componentes.

Introducción

Tableros  
Semánticos en LP

Fórmulas  $\alpha$  y  $\beta$

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Tableros  
Semánticos en  
LPO

Fórmulas  $\delta$  y  $\gamma$

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Razonamiento con igualdad

## Fórmulas de tipo $\alpha$

Las fórmulas de tipo  $\alpha$  son las siguientes:

$\alpha$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
$\neg\neg F$	$F$	
$F_1 \wedge F_2$	$F_1$	$F_2$
$\neg(F_1 \vee F_2)$	$\neg F_1$	$\neg F_2$
$\neg(F_1 \rightarrow F_2)$	$F_1$	$\neg F_2$
$F_1 \leftrightarrow F_2$	$F_1 \rightarrow F_2$	$F_2 \rightarrow F_1$

- ▶ Las fórmulas  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son las componentes de  $\alpha$ .
- ▶ Si  $F$  es de tipo  $\alpha$ , entonces  $F \equiv \alpha_1 \wedge \alpha_2$ .
- ▶ Para satisfacer una fórmula de tipo  $\alpha$  es necesario y suficiente satisfacer **simultáneamente** sus dos componentes  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ .

# Fórmulas de tipo $\beta$

Las fórmulas de tipo  $\beta$  son las siguientes:

$\beta$	$\beta_1$	$\beta_2$
$F_1 \vee F_2$	$F_1$	$F_2$
$\neg(F_1 \wedge F_2)$	$\neg F_1$	$\neg F_2$
$(F_1 \rightarrow F_2)$	$\neg F_1$	$F_2$
$\neg(F_1 \leftrightarrow F_2)$	$\neg(F_1 \rightarrow F_2)$	$\neg(F_2 \rightarrow F_1)$

- ▶ Las fórmulas  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son las componentes de  $\beta$ .
- ▶ Si  $F$  es de tipo  $\beta$ , entonces  $F \equiv \beta_1 \vee \beta_2$
- ▶ Para satisfacer una fórmula de tipo  $\beta$  es necesario y suficiente satisfacer sólo una de sus componentes  $\beta_1$  y  $\beta_2$ .

Introducción

Tableros  
Semánticos en LP

Fórmulas  $\alpha$  y  $\beta$

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Tableros  
Semánticos en  
LPO

Fórmulas  $\delta$  y  $\gamma$

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Razonamiento con igualdad

## Reglas $\alpha$ y $\beta$

Reducen la consistencia de un conjunto de fórmulas a la de otro conjunto formado por fórmulas más sencillas.

- ▶ **Regla  $\alpha$ :** Si  $F \in U$  es de tipo  $\alpha$ , entonces

$$U \text{ satisfactible} \iff (U - \{F\}) \cup \{\alpha_1, \alpha_2\} \text{ satisfactible}$$

- ▶ **Regla  $\beta$ :** Si  $F \in U$  es de tipo  $\beta$ , entonces

$$U \text{ satisfactible} \iff \begin{cases} (U - \{F\}) \cup \{\beta_1\} \text{ satisfactible} \\ \text{o} \\ (U - \{F\}) \cup \{\beta_2\} \text{ satisfactible} \end{cases}$$

Introducción

Tableros  
Semánticos en LP

Fórmulas  $\alpha$  y  $\beta$

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Tableros  
Semánticos en  
LPO

Fórmulas  $\delta$  y  $\gamma$

Tableros completos

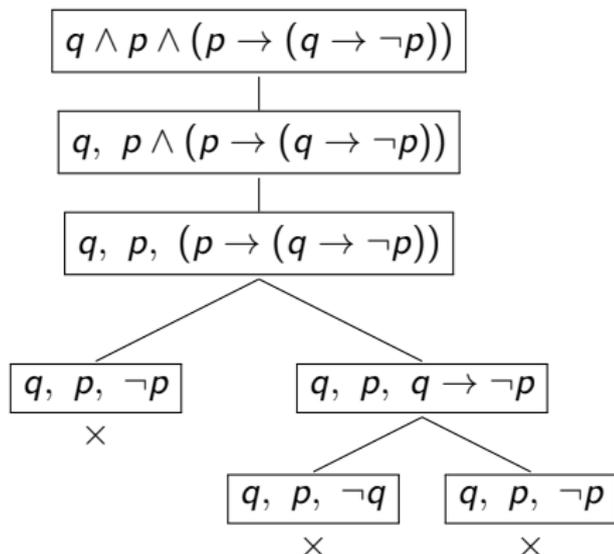
Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Razonamiento con igualdad

# Ejemplo

Tablero semántico para la fórmula  $q \wedge p \wedge (p \rightarrow (q \rightarrow \neg p))$ :



Introducción

Tableros  
Semánticos en LP

Fórmulas  $\alpha$  y  $\beta$

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Tableros  
Semánticos en  
LPO

Fórmulas  $\delta$  y  $\gamma$

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Razonamiento con igualdad

# Construcción de un tablero completo

Un **tablero** para  $\{A_1, \dots, A_n\}$  es un árbol  $T$ , con nodos etiquetados por conjuntos de fórmulas, que se ha construido siguiendo los siguientes pasos:

- ▶ La raíz  $r$  de  $T$  se etiqueta con  $U_r = \{A_1, \dots, A_n\}$ .
- ▶ Mientras  $T$  tenga hojas no marcadas, seleccionar una hoja  $n$  de  $T$ , con etiqueta  $U_n$ , no marcada, y hacer:
  1. Si  $U_n$  es un conjunto de literales, entonces:
    - 1.1 Si existe un par de literales complementarios en  $U_n$ , marcar con  $\times$  (y se denomina **hoja cerrada**).
    - 1.2 Si no existe tal par, marcar con  $\circ$  (**hoja abierta**).
  2. Si  $U_n$  no es un conjunto de literales, elegir  $A$  de  $U_n$  no literal.
    - 2.1 Si  $A$  es una  $\alpha$ -fórmula, entonces añadir un hijo  $m$  a  $n$  con  $U_m = (U_n \setminus \{A\}) \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ .
    - 2.2 Si  $A$  es una  $\beta$ -fórmula, entonces añadir dos hijos  $n_1, n_2$  con etiquetas  $U_{n_1} = (U_n \setminus \{A\}) \cup \{\beta_1\}$  y  $U_{n_2} = (U_n \setminus \{A\}) \cup \{\beta_2\}$ .

Introducción

Tableros  
Semánticos en LPFórmulas  $\alpha$  y  $\beta$ 

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Tableros  
Semánticos en  
LPOFórmulas  $\delta$  y  $\gamma$ 

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Razonamiento con igualdad

# Propiedades de los tableros completos

- ▶ La construcción siempre termina (se puede probar por inducción).
- ▶ El tablero final se denomina **tablero completo**.
- ▶ Un tablero se dice **cerrado** si todas sus hojas son cerradas, y **abierto** en caso contrario (basta que una de sus hojas sea abierta).

## **Teorema.** (Corrección y Completitud)

Sea  $S$  un conjunto de fórmulas y  $T$  un tablero completo para  $S$ .

1. **Corrección:** Si  $T$  es cerrado, entonces  $S$  es insatisfactible.
2. **Completitud:** Si  $S$  es insatisfactible, entonces  $T$  es cerrado.

Introducción

Tableros  
Semánticos en LP

Fórmulas  $\alpha$  y  $\beta$

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Tableros  
Semánticos en  
LPO

Fórmulas  $\delta$  y  $\gamma$

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Razonamiento con igualdad

## Extrayendo modelos de un tablero completo

- ▶ Un conjunto de fórmulas  $S = \{A_1, \dots, A_n\}$  admite un tablero completo abierto si y sólo si es un conjunto satisfactible.
- ▶ Además, cada rama abierta del tablero completo define un modelo (no necesariamente distinto) de  $S$  de la siguiente forma:

*Si  $U$  es la etiqueta de una hoja abierta, podemos obtener un modelo  $v$  del conjunto  $\{A_1, \dots, A_n\}$ , como sigue*

- ▶ *Si  $p \in U$ , entonces  $v(p) = 1$ ,*
- ▶ *Si  $\neg p \in U$ , entonces  $v(p) = 0$ ,*
- ▶ *Si  $p \notin U$  y  $\neg p \notin U$ , entonces  $v(p)$  puede tomar cualquier valor, 0 o 1.*

Introducción

Tableros  
Semánticos en LP

Fórmulas  $\alpha$  y  $\beta$

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Tableros  
Semánticos en  
LPO

Fórmulas  $\delta$  y  $\gamma$

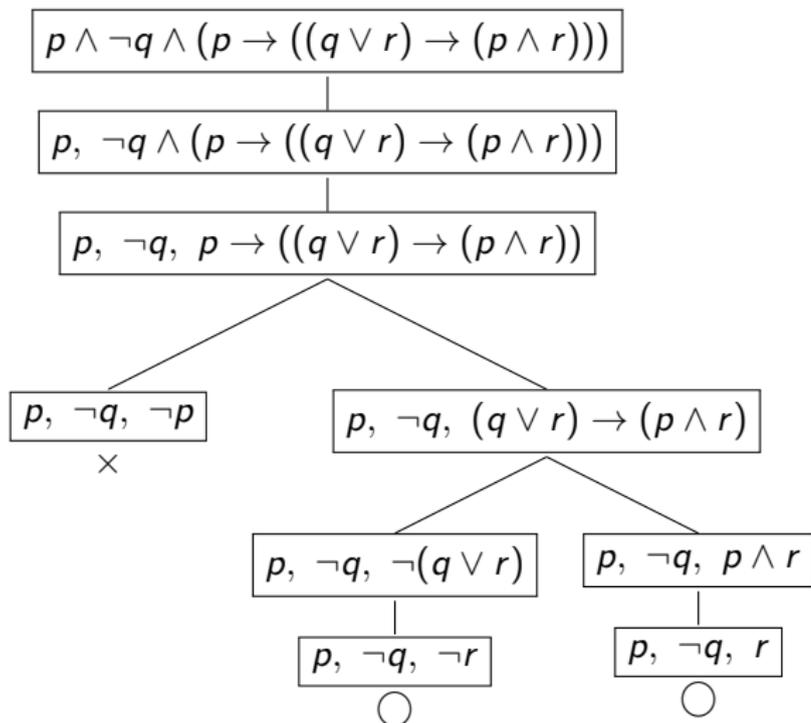
Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Razonamiento con igualdad

# Ejemplo



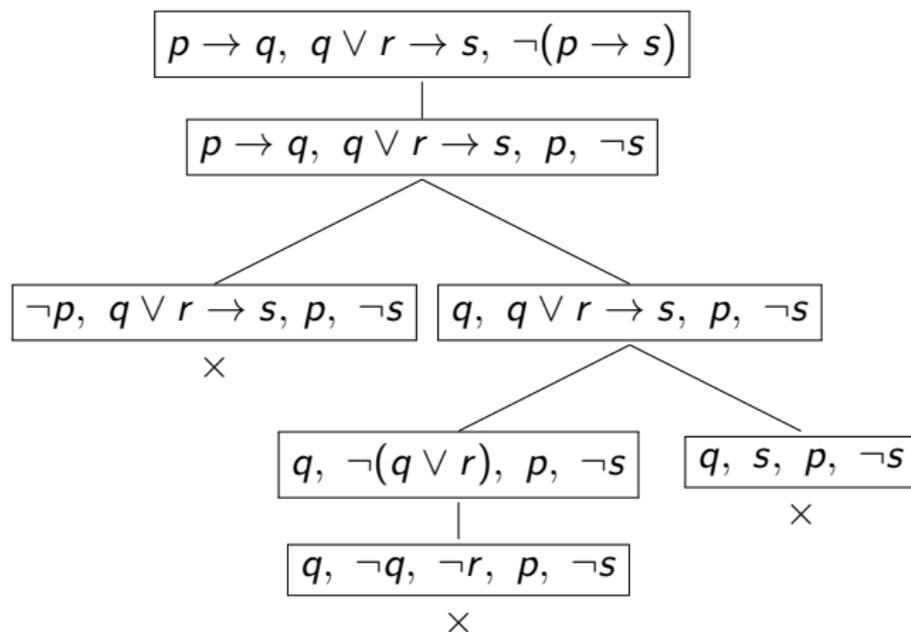
Obtenemos los modelos  $v_1(p) = 1, v_1(r) = v_1(q) = 0$  y  $v_2(p) = v_2(r) = 1, v_2(q) = 0$ .

# Consecuencia lógica

## Corolario.

$\{A_1, \dots, A_n\} \models A$  si y solo si  $\{A_1, \dots, A_n, \neg A\}$  admite un tablero cerrado.

Por ejemplo:  $\{p \rightarrow q, q \vee r \rightarrow s\} \models p \rightarrow s$ .



# Tableros Semánticos en LPO

- ▶ Recordemos que:
  - ▶ Las fórmulas  $\alpha$  se comportan como conjunciones
  - ▶ Las fórmulas  $\beta$  se comportan como disyunciones
 y asociamos a cada fórmula,  $F$ , de estos tipos otras dos fórmulas más sencillas (sus **componentes**) de modo que la satisfactibilidad de  $F$  se reduce a la de sus componentes.
- ▶ Para extenderlo a LPO debemos proporcionar formas de trabajar con los cuantificadores:  $\exists$  y  $\forall$ .
- ▶ Por ello, introduciremos dos nuevos tipos de fórmulas:
  - ▶ Las fórmulas de tipo  $\gamma$ , que se comportan como fórmulas cuantificadas universalmente, y
  - ▶ Las fórmulas de tipo  $\delta$ , que se comportan como fórmulas cuantificadas existencialmente.

Introducción

Tableros  
Semánticos en LP

Fórmulas  $\alpha$  y  $\beta$

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Tableros  
Semánticos en  
LPO

Fórmulas  $\delta$  y  $\gamma$

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Razonamiento con igualdad

## Fórmulas de tipo $\gamma$

Las fórmulas de tipo  $\gamma$  son las siguientes:

$\gamma$	$\gamma_t$
$\forall x F$	$F[x/t]$ ( $t$ es un término cerrado)
$\neg \exists x F$	$\neg F[x/t]$ ( $t$ es un término cerrado)

- ▶ Las fórmulas  $\gamma_t$  son las componentes de  $\gamma$ .
- ▶ Para satisfacer una fórmula de tipo  $\gamma$  es necesario satisfacer **simultáneamente** todas sus componentes  $\gamma_t$ , para todo término cerrado  $t$ .
- ▶ En este caso, dependiendo del lenguaje, puede haber una cantidad infinita de componentes (por ejemplo, basta que el lenguaje tenga un símbolo de constante y un símbolo de función).

Introducción

Tableros  
Semánticos en LP

Fórmulas  $\alpha$  y  $\beta$

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Tableros  
Semánticos en  
LPO

Fórmulas  $\delta$  y  $\gamma$

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Razonamiento con igualdad

## Fórmulas de tipo $\delta$

Las fórmulas de tipo  $\delta$  son las siguientes:

$\delta$	$\delta_a$
$\exists x F$	$F[x/a]$ ( $a$ es una nueva constante)
$\neg \forall x F$	$\neg F[x/a]$ ( $a$ es una nueva constante)

- ▶ Las fórmulas  $\delta_a$  son las componentes de  $\delta$ .
- ▶ Para satisfacer una fórmula de tipo  $\delta$  es necesario y suficiente satisfacer alguna de sus componentes  $\delta_a$ , para alguna nueva constante  $a$ .

Introducción

Tableros  
Semánticos en LP

Fórmulas  $\alpha$  y  $\beta$

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Tableros  
Semánticos en  
LPO

Fórmulas  $\delta$  y  $\gamma$

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Razonamiento con igualdad

## Reglas $\gamma$ y $\delta$

Reducen la consistencia de un conjunto de fórmulas a la de otro conjunto formado por fórmulas más sencillas.

- ▶ **Regla  $\gamma$ :** Si  $F \in U$  es de tipo  $\gamma$ , entonces

$$U \text{ consistente} \Leftrightarrow U \cup \{\gamma_t : t \text{ término cerrado}\} \text{ consistente}$$

- ▶ **Regla  $\delta$ :** Si  $F \in U$  es de tipo  $\delta$ , entonces para cada constante nueva,  $a$ , se tiene:

$$U \text{ consistente} \iff (U - \{F\}) \cup \{\delta_a\} \text{ consistente}$$

Introducción

Tableros  
Semánticos en LP

Fórmulas  $\alpha$  y  $\beta$

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Tableros  
Semánticos en  
LPO

Fórmulas  $\delta$  y  $\gamma$

Tableros completos

Búsqueda de modelos

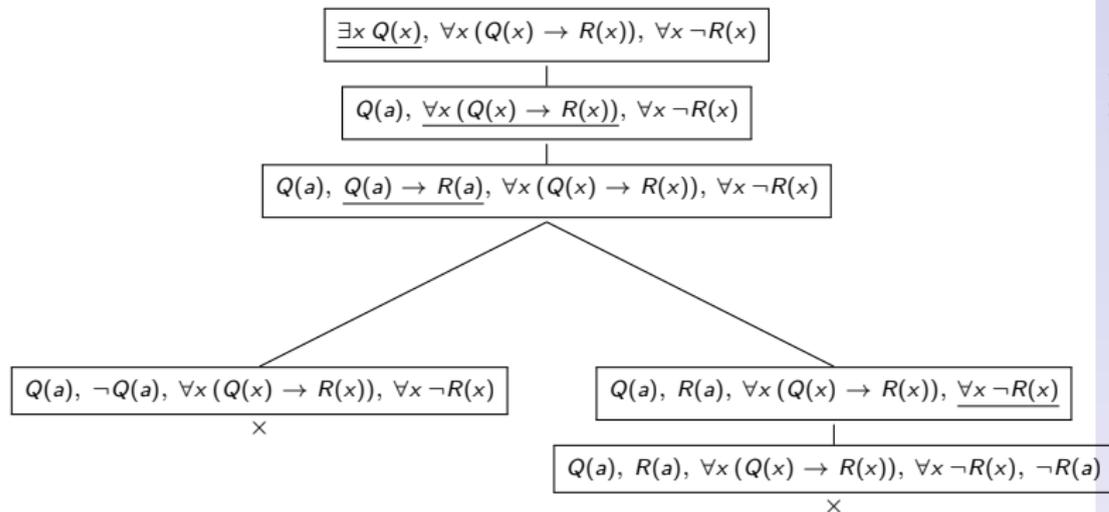
Consecuencia lógica

Razonamiento con igualdad

# Ejemplo

Tablero Semántico para el conjunto de fórmulas

$$U = \{\exists x Q(x), \forall x (Q(x) \rightarrow R(x)), \forall x \neg R(x)\}$$



En cada paso subrayamos la fórmula sobre la que se aplica una regla.

Introducción

Tableros Semánticos en LP

Fórmulas  $\alpha$  y  $\beta$

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Tableros Semánticos en LPO

Fórmulas  $\delta$  y  $\gamma$

Tableros completos

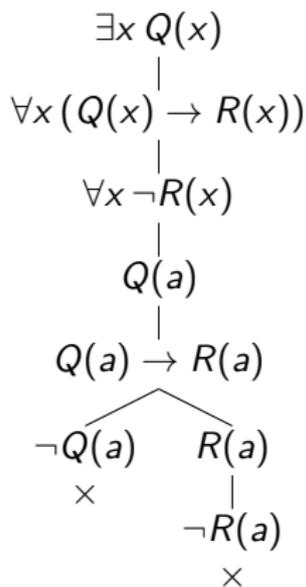
Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Razonamiento con igualdad

# Notación

En LPO representaremos los tableros etiquetando cada nodo con una fórmula. El tablero anterior se escribirá:



**Notación:** Si  $n$  es un nodo de  $T$ ,  $E_n$  es la etiqueta de  $n$  (una sola fórmula), y  $U_n$  es el conjunto de etiquetas de todos los antecesores de  $n$  en  $T$ , incluyendo al propio nodo  $n$ .

Introducción

Tableros  
Semánticos en LP

Fórmulas  $\alpha$  y  $\beta$

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Tableros  
Semánticos en  
LPO

Fórmulas  $\delta$  y  $\gamma$

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Razonamiento con igualdad

## Construcción de un tablero completo

Un **tablero** para  $F$  es un árbol  $T$ , con nodos etiquetados por fórmulas y cuya raíz está etiquetada por  $F$  que se construye mediante el siguiente procedimiento: Para cada hoja  $n$  de  $T$ , ni abierta ni cerrada, hacer:

1. Si existe un par de literales complementarios en  $U_n$ , marcar con  $\times$  (**hoja cerrada**).
2. Si no, pero hay una fórmula,  $A$ , en  $U_n$  **no usada**:
  - 2.1  $A$  de tipo  $\alpha$ : añadir  $n_1$  a  $n$ ,  $E_{n_1} = \alpha_1$ , y  $n_2$  a  $n_1$ ,  $E_{n_2} = \alpha_2$ , y marcar  $A$  como usada en  $n''$ .
  - 2.2  $A$  de tipo  $\beta$ : añadir  $n_1, n_2$  a  $n$ ,  $E_{n_1} = \beta_1$ ,  $E_{n_2} = \beta_2$ , y marcar  $A$  como usada en  $n_1$  y  $n_2$ .
  - 2.3  $A$  de tipo  $\delta$ : añadir  $m$  a  $n$ ,  $E_m = \delta_a$  ( $a$  una nueva constante), y marcar  $A$  como usada en  $m$ .
  - 2.4  $A$  de tipo  $\gamma$  y existe  $t$ , término cerrado del lenguaje del tablero, con  $\gamma_t \notin U_n$ : añadir  $m$  a  $n$ ,  $E_m = \gamma_t$  (**no se marca  $A$  como usada**).
3. Si no se verifica ninguno de los anteriores en  $U_n$ , marcar con  $\circ$  (**hoja abierta**).

Introducción

Tableros  
Semánticos en LPFórmulas  $\alpha$  y  $\beta$ 

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Tableros  
Semánticos en  
LPOFórmulas  $\delta$  y  $\gamma$ 

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Razonamiento con igualdad

# Propiedades de los tableros completos

- ▶ Un tablero para un conjunto de fórmulas  $\{A_1, \dots, A_n\}$  es un tablero para la fórmula  $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$ .
- ▶ Un **tablero completo** es un tablero construido siguiendo las reglas anteriores y que no puede extenderse más.
- ▶ Puede ocurrir que un tablero completo sea infinito (una rama puede crecer indefinidamente).
- ▶ Un tablero es **cerrado** si todas sus hojas son cerradas, y **abierto** en caso contrario.
- ▶ Los tableros completos con ramas infinitas son abiertos, porque una rama infinita no puede tener hojas cerradas.

## Teorema. (Corrección y Completitud)

Sea  $S$  un conjunto de fórmulas cerradas:

1. **Corrección:** Si  $S$  admite un tablero completo y cerrado, entonces  $S$  es inconsistente.
2. **Completitud:** Si  $S$  es inconsistente, entonces  $S$  admite un tablero completo y cerrado.

Introducción

Tableros  
Semánticos en LP

Fórmulas  $\alpha$  y  $\beta$

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Tableros  
Semánticos en  
LPO

Fórmulas  $\delta$  y  $\gamma$

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Razonamiento con igualdad

## Extrayendo modelos de un tablero completo

Si un conjunto de fórmulas cerradas  $S$  es consistente, entonces pueden darse dos situaciones:

1.  $S$  admite un tablero completo abierto finito, y por tanto tiene una rama finita abierta.
2. El tablero para  $S$  tiene una rama infinita abierta,  $R$ , donde:
  - 2.1 Para toda fórmula de tipo  $\alpha$  que etiqueta un nodo de  $R$  existen descendientes de dicho nodo en  $R$  etiquetados con las componentes de dicha fórmula.
  - 2.2 Para cada fórmula de tipo  $\beta$  o  $\delta$  que etiqueta un nodo de  $R$  existe un descendiente de dicho nodo en  $R$  etiquetado con una de las componentes de la fórmula.
  - 2.3 Para toda fórmula de tipo  $\gamma$  que etiqueta un nodo de  $R$  y cada término cerrado  $t$  del lenguaje de  $R$ , existe un nodo en  $R$  etiquetado con  $\gamma_t$ .

En cualquier caso, podemos definir un modelo utilizando la rama abierta correspondiente.

Introducción

Tableros  
Semánticos en LP

Fórmulas  $\alpha$  y  $\beta$

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Tableros  
Semánticos en  
LPO

Fórmulas  $\delta$  y  $\gamma$

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Razonamiento con igualdad

## Extrayendo modelos de un tablero completo (II)

- ▶ Un tablero finito completo para el conjunto

$$S = \{\forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow P(y, x)), \forall x \neg P(x, x), \exists x \exists y P(x, y)\}$$

proporciona el siguiente modelo:

- ▶ Universo  $M = \{0, 1\}$
  - ▶  $P^M = \{(0, 1), (1, 0)\}$
- ▶ El conjunto

$$\{\exists x Q(x), \forall x P(x, f(x)), \forall x \neg P(x, x)\}$$

es consistente pero no admite ningún tablero completo **finito**. Sin embargo, es posible construir un tablero infinito en el que una rama infinita proporciona el siguiente modelo:

- ▶ Universo:  $M = \{0, 1, 2, \dots\}$
- ▶  $Q^M = \{0\}$
- ▶ Para cada  $j \in M$ ,  $f^M(j) = j + 1$
- ▶  $P^M = \{(j, j + 1) : j \in M\}$ .

## Consecuencia lógica

Para determinar si se tiene

$$\{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \forall y (Q(y) \vee R(y) \rightarrow S(a))\} \models \forall x (P(x) \rightarrow S(a))$$

- ▶ Como  $\forall x (P(x) \rightarrow S(a))$  es **cerrada** podemos trabajar con el conjunto

$$\Sigma = \{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \forall y (Q(y) \vee R(y) \rightarrow S(a)), \\ \neg \forall x (P(x) \rightarrow S(a))\}$$

- ▶ Si  $\Sigma$  es inconsistente la fórmula  $\forall x (P(x) \rightarrow S(a))$  será consecuencia lógica del resto de fórmulas.
- ▶ Podemos verificarlo con un tablero:

Introducción

Tableros  
Semánticos en LP

Fórmulas  $\alpha$  y  $\beta$

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Tableros  
Semánticos en  
LPO

Fórmulas  $\delta$  y  $\gamma$

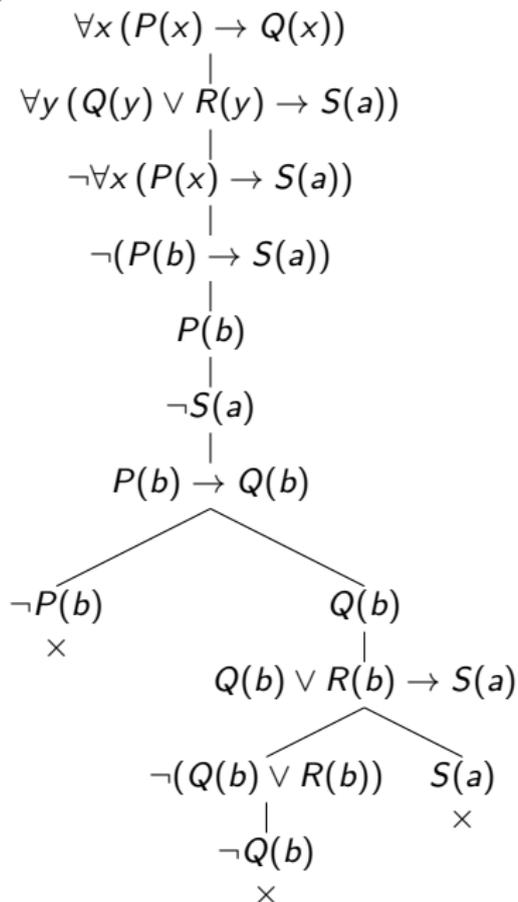
Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Razonamiento con igualdad

# Consecuencia lógica



# Razonamiento con igualdad

- ▶ Si  $L$  es un LPO con igualdad, el razonamiento con fórmulas de  $L$  debe tener en cuenta que el predicado de igualdad necesita un tratamiento específico.
- ▶ Una posibilidad es incluir **axiomas** que describen las propiedades fundamentales del predicado de igualdad:
  - ▶ (Identidad)  $\forall x (x = x)$ .
  - ▶ (Sustitución) Si  $t_1, \dots, t_n$  son términos de  $L$  y  $F(x_1, \dots, x_n)$  es una fórmula **atómica** entonces
 
$$\forall x_1 \dots \forall x_n (x_1 = t_1 \wedge \dots \wedge x_n = t_n \rightarrow (F(x_1, \dots, x_n) \rightarrow F(t_1, \dots, t_n)))$$
- ▶ Otras propiedades de la igualdad pueden obtenerse a partir de las anteriores, por ejemplo:
  - ▶ (Simetría)  $\forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$ .
  - ▶ (Transitividad)  $\forall x \forall y (x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$ .

Introducción

Tableros  
Semánticos en LP

Fórmulas  $\alpha$  y  $\beta$

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Tableros  
Semánticos en  
LPO

Fórmulas  $\delta$  y  $\gamma$

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Razonamiento con igualdad

# Tableros e igualdad

En el método de tableros para tener en cuenta estas propiedades basta incorporar dos nuevas reglas, conocidas como **reglas de igualdad**:

- ▶ **Regla  $I_1$** . Para cada término **cerrado**  $t$ , se puede extender cualquier rama del tablero  $T$  añadiendo a su hoja un nuevo descendiente marcado con la fórmula

$$t = t$$

- ▶ **Regla  $I_2$** . Si  $t$  y  $s$  son términos **cerrados** y en una rama de  $T$  aparecen un **literal**  $P(t_1, \dots, t, \dots, t_n)$  y la fórmula  $t = s$  (o la fórmula  $s = t$ ), entonces podemos extender dicha rama añadiendo a su hoja un nuevo descendiente marcado con la fórmula

$$P(t_1, \dots, s, \dots, t_n)$$

Introducción

Tableros  
Semánticos en LPFórmulas  $\alpha$  y  $\beta$ 

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Tableros  
Semánticos en  
LPOFórmulas  $\delta$  y  $\gamma$ 

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Razonamiento con igualdad

# Ejemplos (I)

$\forall x \forall y (x = y \rightarrow f(x) = f(y))$  es lógicamente válida:

$$\begin{array}{c}
 \neg \forall x \forall y (x = y \rightarrow f(x) = f(y)) \\
 | \\
 \neg \forall y (a = y \rightarrow f(a) = f(y)) \\
 | \\
 \neg (a = b \rightarrow f(a) = f(b)) \\
 | \\
 a = b \\
 | \\
 \neg f(a) = f(b) \\
 | \\
 \neg f(b) = f(b) \\
 | \\
 f(b) = f(b) \\
 \times
 \end{array}$$

Introducción

Tableros  
Semánticos en LP

Fórmulas  $\alpha$  y  $\beta$

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Tableros  
Semánticos en  
LPO

Fórmulas  $\delta$  y  $\gamma$

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Razonamiento con igualdad

## Ejemplos (II)

$\forall x \forall y \forall z (x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$  es lógicamente válida:

$$\neg \forall x \forall y \forall z (x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$$

$$\neg \forall y \forall z (a = y \wedge y = z \rightarrow a = z)$$

$$\neg \forall z (a = b \wedge b = z \rightarrow a = z)$$

$$\neg (a = b \wedge b = c \rightarrow a = c)$$

$$a = b \wedge b = c$$

$$\neg a = c$$

$$a = b$$

$$b = c$$

$$a = c$$

×

Introducción

Tableros  
Semánticos en LP

Fórmulas  $\alpha$  y  $\beta$

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Tableros  
Semánticos en  
LPO

Fórmulas  $\delta$  y  $\gamma$

Tableros completos

Búsqueda de modelos

Consecuencia lógica

Razonamiento con igualdad

## Ejemplos (III)

$$\{\exists x (f(x, x) = a), \forall x (f(x, a) = b)\} \models \exists x (f(x, f(x, x)) = b)$$

$$\begin{array}{c}
 \exists x (f(x, x) = a) \\
 | \\
 \forall x (f(x, a) = b) \\
 | \\
 \neg \exists x (f(x, f(x, x)) = b) \\
 | \\
 f(c, c) = a \\
 | \\
 \neg f(c, f(c, c)) = b \\
 | \\
 \neg f(c, a) = b \\
 | \\
 f(c, a) = b \\
 \times
 \end{array}$$

Introducción

Tableros  
Semánticos en LP

Fórmulas  $\alpha$  y  $\beta$   
 Tableros completos  
 Búsqueda de modelos  
 Consecuencia lógica

Tableros  
Semánticos en  
LPO

Fórmulas  $\delta$  y  $\gamma$   
 Tableros completos  
 Búsqueda de modelos  
 Consecuencia lógica  
**Razonamiento con igualdad**