

Tema 5: Sistemas Deductivos y Resolución

Dpto. Ciencias de la Computación Inteligencia Artificial
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Lógica Informática
(Tecnologías Informáticas)
Curso 2018–19

Sistemas deductivos

Pruebas formales
Encadenamiento con
cláusulas de Horn

Resolución Proposicional

La regla de resolución
Saturación y resolución
regular
Estrategias de resolución

Resolución en LPO

Resolución no restringida
Unificación
Ejemplos
Resolución
Razonamiento con igualdad

Contenido

Sistemas deductivos

Pruebas formales

Encadenamiento con cláusulas de Horn

Sistemas deductivos

Pruebas formales

Encadenamiento con
cláusulas de Horn

Resolución Proposicional

La regla de resolución

Saturación y resolución regular

Estrategias de resolución

Resolución Proposicional

La regla de resolución

Saturación y resolución
regular

Estrategias de resolución

Resolución en LPO

Resolución no restringida

Unificación

Ejemplos

Resolución

Razonamiento con igualdad

Resolución en LPO

Resolución no restringida

Unificación

Ejemplos

Resolución

Razonamiento con igualdad

- ▶ Los tableros semánticos proporcionan un algoritmo para la deducción basado en este hecho:

$$\Sigma \models A \iff \Sigma \cup \{\neg A\} \text{ insatisfactible}$$

- ▶ Un enfoque más natural del problema básico (**PB**) que presentamos en el Tema 1, se obtiene a través de la noción de **demostración**:
 1. Consideramos el conjunto de enunciados, \mathcal{BC} , como un conjunto de **axiomas** (o **hipótesis** que asumimos como ciertas inicialmente).
 2. El enunciado ϕ será consecuencia de \mathcal{BC} si podemos obtener una **demostración** de ϕ a partir de \mathcal{BC} (de manera similar a como en matemáticas se demuestra un teorema).

Sistemas deductivos

Un **sistema deductivo**, \mathbf{T} , (o teoría proposicional) consta de:

- ▶ Un conjunto, $Ax(\mathbf{T})$, de fórmulas proposicionales que llamamos los axiomas de \mathbf{T} .
- ▶ Reglas de inferencia de la forma:

$$\frac{A_1, \dots, A_n}{A}$$

siendo A_1, \dots, A_n, A fórmulas proposicionales. Las fórmulas A_1, \dots, A_n se denominan *premisas* y la fórmula A *conclusión*.

Sistemas deductivos

Pruebas formales

Encadenamiento con cláusulas de Horn

Resolución Proposicional

La regla de resolución

Saturación y resolución regular

Estrategias de resolución

Resolución en LPO

Resolución no restringida

Unificación

Ejemplos

Resolución

Razonamiento con igualdad

Definición.

Una **demostración** en \mathbf{T} es una sucesión de fórmulas proposicionales A_1, \dots, A_k cada una de las cuales es un axioma de \mathbf{T} , o bien, se obtiene a partir de fórmulas anteriores de la sucesión mediante la aplicación de una regla de inferencia.

Definición.

Una fórmula A es un **teorema** de \mathbf{T} , $\vdash_{\mathbf{T}} A$, si existe una demostración en \mathbf{T} , A_1, \dots, A_k tal que $A = A_k$. La sucesión A_1, \dots, A_k se denomina una **demostración de A** en \mathbf{T} .

Sistemas deductivos

Pruebas formales

Encadenamiento con
cláusulas de Horn

Resolución Proposicional

La regla de resolución

Saturación y resolución
regular

Estrategias de resolución

Resolución en LPO

Resolución no restringida

Unificación

Ejemplos

Resolución

Razonamiento con igualdad

Ejemplo: Sistema deductivo

- ▶ $Ax(\mathbf{T}) = \{p, q, p \wedge q \rightarrow (\neg s \vee p \rightarrow r)\}$
- ▶ Reglas de inferencia: (A y B fórmulas cualesquiera)

$$I_{\wedge} : \frac{A, B}{A \wedge B} \quad I_{\vee} : \frac{A}{A \vee B}$$

$$C_{\vee} : \frac{A \vee B}{B \vee A} \quad MP : \frac{A, A \rightarrow B}{B}$$

La siguiente sucesión es una demostración de r en \mathbf{T} ($\vdash_{\mathbf{T}} r$):

- | | |
|---|--------------------------------------|
| 1. p | [[Hip.]] |
| 2. q | [[Hip.]] |
| 3. $p \wedge q$ | [[I_{\wedge} aplicada a 1. y 2.]] |
| 4. $p \wedge q \rightarrow (\neg s \vee p \rightarrow r)$ | [[Hip.]] |
| 5. $\neg s \vee p \rightarrow r$ | [[MP aplicada a 3. y 4.]] |
| 6. $p \vee \neg s$ | [[I_{\vee} aplicada a 1.]] |
| 7. $\neg s \vee p$ | [[C_{\vee} aplicada a 6.]] |
| 8. r | [[MP aplicada a 7. y 5.]] |

Procedimientos de demostración

- ▶ Un sistema deductivo introduce una noción de prueba formal, pero no proporciona ningún procedimiento efectivo para generar demostraciones de las fórmulas que deseamos probar.
- ▶ Un **sistema de razonamiento** proporciona, además de un sistema deductivo, un **procedimiento de demostración**, que implementa una estrategia de búsqueda de demostraciones.
- ▶ En general, no podemos encontrar estrategias que sean efectivas para todos los sistemas deductivos, y habrá que buscar estrategias que funcionen solo para casos particulares.
- ▶ Ilustraremos un ejemplo de estrategia eficiente en el caso del encadenamiento con cláusulas de Horn.

Cláusulas de Horn

- ▶ Una **cláusula de Horn** es una disyunción de literales que contiene a lo sumo un literal positivo.
 - ▶ Ejemplos: $\neg p \vee \neg q \vee r$, $\neg p \vee \neg r$, p
- ▶ Una cláusula de Horn **positiva** es una cláusula que contiene exactamente un literal positivo.
 - ▶ Si contiene otros literales negativos se denomina **regla**.
Ejemplo: $\neg p \vee \neg q \vee r$.
 - ▶ Si sólo contiene el literal positivo se denomina **hecho**.
Ejemplo: q .

La regla $\neg p \vee \neg q \vee r$ se escribe como

$$\underbrace{p \wedge q}_{\text{cuerpo}} \rightarrow \underbrace{r}_{\text{cabeza}}$$

Sistemas
deductivos

Pruebas formales

Encadenamiento con
cláusulas de HornResolución
Proposicional

La regla de resolución

Saturación y resolución
regular

Estrategias de resolución

Resolución en LPO

Resolución no restringida

Unificación

Ejemplos

Resolución

Razonamiento con igualdad

Deducción con cláusulas de Horn

Consideraremos el siguiente sistema deductivo, $EA(\Sigma)$, para trabajar con cláusulas de Horn positivas.

- ▶ **Axiomas:** Un conjunto finito, Σ , de cláusulas de Horn positivas.
- ▶ **Reglas de inferencia:** Si A y B son conjunciones de literales, entonces:

$$I_{\wedge} : \frac{A, B}{A \wedge B} \quad MP : \frac{A, A \rightarrow B}{B}$$

Teorema. Se tiene que, para todo **hecho**, H

$$\Sigma \models H \iff \vdash_{EA(\Sigma)} H$$

- ▶ Además, podemos diseñar un algoritmo de decisión eficiente para demostrar hechos en $EA(\Sigma)$, que se denomina **encadenamiento hacia adelante**.

Ejemplo: deducción en $EA(\Sigma)$

$$\Sigma = \{P \rightarrow Q, L \wedge M \rightarrow P, B \wedge L \rightarrow M, A \wedge P \rightarrow L, \\ A \wedge B \rightarrow L, A, B\}$$

Veamos que $\vdash_{EA(\Sigma)} Q$,

1. A [[Hip.]]
2. B [[Hip.]]
3. $A \wedge B$ [[I_{\wedge} aplicada a 1. y 2..]]
4. $A \wedge B \rightarrow L$ [[Hip.]]
5. L [[MP aplicada a 3. y 4.]]
6. $B \wedge L$ [[I_{\wedge} : 2. y 5.]]
7. $B \wedge L \rightarrow M$ [[Hip.]]
8. M [[MP: 6. y 7.]]
9. $L \wedge M$ [[I_{\wedge} : 5. y 8.]]
10. $L \wedge M \rightarrow P$ [[Hip.]]
11. P [[MP: 9. y 10.]]
12. $P \rightarrow Q$ [[Hip.]]
13. Q [[MP: 11. y 12.]]

Procedimiento de encadenamiento hacia adelante

- ▶ Entrada:
 - ▶ Un hecho H .
 - ▶ Una enumeración R_1, \dots, R_n de los elementos de Σ .
- ▶ Salida:
 - ▶ SI, si $\vdash_{EA(\Sigma)} H$.
 - ▶ NO, en caso contrario.
- ▶ Inicialmente, C es el conjunto de todos los hechos que pertenecen a Σ , $j = 1$, $i = 0$.
 1. Si $H \in C$, paramos y devolvemos SI.
 2. Si $j \leq n$ y todos los literales del cuerpo de R_j están en C , entonces
 - 2.1 Si la cabeza de j no está en C se la añadimos a C , hacemos $j = j + 1$, $i = 1$ y volvemos a 1.
 - 2.2 Si la cabeza de j está en C hacemos $j = j + 1$ y volvemos a 2.
 3. Si $j \leq n$ y algún literal del cuerpo de R_j no está en C , entonces hacemos $j = j + 1$ y volvemos a 2.
 4. Si $j > n$ y $i = 1$, hacemos $j = 1$ y $i = 0$ y volvemos a 2.
 5. Si $j > n$ y $i = 0$, paramos y devolvemos NO.

Ejemplo: encadenamiento hacia adelante

Veamos que $\vdash_{EA(\Sigma)} Q$,

Hechos obtenidos	Reglas usadas
A, B	
A, B, L	$A \wedge B \rightarrow L$
A, B, L, M	$A \wedge B \rightarrow L, B \wedge L \rightarrow M$
A, B, L, M, P	$A \wedge B \rightarrow L, B \wedge L \rightarrow M, L \wedge M \rightarrow P$
A, B, L, M, P, Q	Σ

$$\Sigma = \{ P \rightarrow Q, L \wedge M \rightarrow P, B \wedge L \rightarrow M, A \wedge P \rightarrow L, A \wedge B \rightarrow L, A, B \}$$

Sistemas deductivos

Pruebas formales

Encadenamiento con
cláusulas de Horn

Resolución Proposicional

La regla de resolución

Saturación y resolución
regular

Estrategias de resolución

Resolución en LPO

Resolución no restringida

Unificación

Ejemplos

Resolución

Razonamiento con igualdad

La regla de resolución

Generaliza algunas de las reglas de inferencia clásicas:

$$\text{Modus Ponens : } \frac{p, \quad p \rightarrow q}{q} \qquad \frac{\{p\}, \quad \{\neg p, q\}}{\{q\}}$$

$$\text{Modus Tollens : } \frac{p \rightarrow q, \quad \neg q}{\neg p} \qquad \frac{\{\neg p, q\}, \quad \{\neg q\}}{\{\neg p\}}$$

$$\text{Encadenamiento : } \frac{p \rightarrow q, \quad q \rightarrow r}{p \rightarrow r} \qquad \frac{\{\neg p, q\}, \quad \{\neg q, r\}}{\{\neg p, r\}}$$

Regla de resolución:

$$\frac{\{L_1, \dots, L, \dots, L_m\}, \quad \{M_1, \dots, L^c, \dots, M_k\}}{\{L_1, \dots, L_m, M_1, \dots, M_k\}}$$

Sistemas
deductivos

Pruebas formales
Encadenamiento con
cláusulas de Horn

Resolución
Proposicional

La regla de resolución
Saturación y resolución
regular
Estrategias de resolución

Resolución en LPO

Resolución no restringida
Unificación
Ejemplos
Resolución
Razonamiento con igualdad

Resolución entre cláusulas

Definición.

Si $L \in C_1$ y $L' \in C_2$ son literales complementarios, entonces la **resolvente** de C_1 y C_2 respecto a L es

$$res_L(C_1, C_2) = (C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{L'\})$$

El conjunto de las resolventes de C_1 y C_2 es:

$$Res(C_1, C_2) = \{res_L(C_1, C_2) : L \in C_1 \text{ y } L^c \in C_2\}.$$

► Ejemplos:

Sea $C_1 = \{p, q, \neg r\}$ y $C_2 = \{\neg p, r, s\}$. Entonces

$$res_p(C_1, C_2) = \{q, \neg r, r, s\}$$

$$res_{\neg r}(C_1, C_2) = \{p, \neg p, q, s\}$$

Demostraciones por resolución

Dado un conjunto de cláusulas, S , podemos considerar el sistema deductivo que tiene a $Ax(\mathbf{T}) = S$ y usa resolución como única regla de inferencia.

Las definiciones anteriores se adaptan directamente:

- ▶ Una **demostración por resolución** a partir de S es una sucesión de cláusulas C_1, \dots, C_n tal que para cada $i = 1, \dots, n$ se verifica:
 - ▶ $C_i \in S$, o bien
 - ▶ Existen $j, k < i$ tales que $C_i \in Res(C_j, C_k)$.

Si $C_n = \square$ diremos que C_1, \dots, C_n es una **refutación** de S .

- ▶ Una cláusula C es **demostrable por resolución** a partir de S si existe una demostración a partir de S , C_1, \dots, C_n , tal que $C_n = C$.

Notación: $S \vdash_r C$.

- ▶ Decimos que S es **refutable** si $S \vdash_r \square$.

Ejemplos

Sea $S = \{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg q, \neg p, s\}\}$.

Veamos que $S \vdash_r \{s\}$:

- | | | |
|----|-------------------------|---------------------|
| 1. | $\{p, q\}$ | Hipótesis |
| 2. | $\{\neg p, q\}$ | Hipótesis |
| 3. | $\{q\}$ | Resolvente de 1 y 2 |
| 4. | $\{\neg q, p\}$ | Hipótesis |
| 5. | $\{p\}$ | Resolvente de 3 y 4 |
| 6. | $\{\neg q, \neg p, s\}$ | Hipótesis |
| 7. | $\{\neg q, s\}$ | Resolvente de 5 y 6 |
| 8. | $\{s\}$ | Resolvente de 7 y 3 |

Sistemas deductivos

Pruebas formales

Encadenamiento con
cláusulas de Horn

Resolución Proposicional

La regla de resolución

Saturación y resolución
regular

Estrategias de resolución

Resolución en LPO

Resolución no restringida

Unificación

Ejemplos

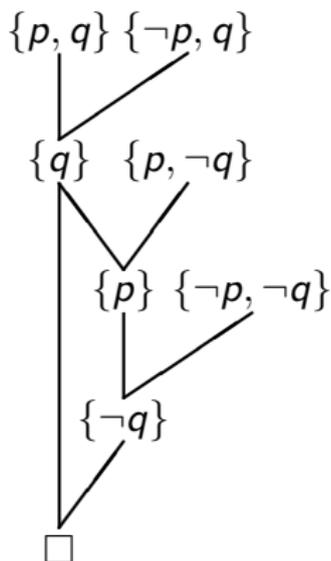
Resolución

Razonamiento con igualdad

Ejemplos (II)

Es habitual presentar las demostraciones por resolución utilizando un árbol.

$S_1 = \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$ es refutable:



Luego $S \vdash_r \square$.

Sistemas deductivos

Pruebas formales

Encadenamiento con
cláusulas de Horn

Resolución Proposicional

La regla de resolución

Saturación y resolución
regular

Estrategias de resolución

Resolución en LPO

Resolución no restringida

Unificación

Ejemplos

Resolución

Razonamiento con igualdad

Adecuación y Completitud

Lema. Sean C_1 , C_2 y C cláusulas. Si C es una resolvente de C_1 y C_2 , entonces $\{C_1, C_2\} \models C$.

Teorema de adecuación. Sean S un conjunto de cláusulas y C una cláusula. Entonces

$$S \vdash_r C \implies S \models C$$

► Incompletitud de resolución:

$$\{\{q\}\} \models \{q, r\} \quad \text{pero} \quad \{\{q\}\} \not\vdash_r \{q, r\}$$

Teorema de completitud de la refutación:

$$S \text{ es insatisfactible} \iff S \vdash_r \square$$

Sistemas
deductivosPruebas formales
Encadenamiento con
cláusulas de HornResolución
ProposicionalLa regla de resolución
Saturación y resolución
regular
Estrategias de resolución

Resolución en LPO

Resolución no restringida
Unificación
Ejemplos
Resolución
Razonamiento con igualdad

Algoritmo de Resolución por Saturación

► Algoritmo de resolución por saturación.

Entrada: S , un conjunto finito de cláusulas.

Salida: **SI**, si S es insatisfactible
NO, en caso contrario.

Procedimiento:

1. $S' \leftarrow S$
2. $S'' \leftarrow S' \cup \bigcup_{C_1, C_2 \in S'} \text{Res}(C_1, C_2)$
3. Mientras $\square \notin S''$ y $S' \neq S''$ hacer:
 - $S' \leftarrow S''$
 - $S'' \leftarrow S' \cup \bigcup_{C_1, C_2 \in S'} \text{Res}(C_1, C_2)$
4. Si $\square \in S''$ devolver **SI** (i.e., insatisfactible)
5. Si $\square \notin S''$ devolver **NO** (i.e., satisfactible)

Resolución por saturación

- ▶ El algoritmo de resolución por saturación genera una sucesión de conjuntos de cláusulas:

$$S_0 = S, \quad S_{i+1} = S_i \cup \bigcup_{C_1, C_2 \in S_i} \text{Res}(C_1, C_2)$$

de tal modo que para toda cláusula, C , se tiene

$$S \vdash_r C \iff \text{Existe } j \text{ tal que } C \in S_j$$

- ▶ En consecuencia, por el teorema de completitud, el algoritmo de resolución por saturación es correcto (aunque muy ineficiente).

Sistemas deductivos

Pruebas formales

Encadenamiento con
cláusulas de Horn

Resolución Proposicional

La regla de resolución

Saturación y resolución
regular

Estrategias de resolución

Resolución en LPO

Resolución no restringida

Unificación

Ejemplos

Resolución

Razonamiento con igualdad

Ejemplos (I)

- Sea $S = \{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg q\}\}$, aplicando el algoritmo:

$$S_1 = S \cup \{\{q\}, \{p\}, \{\neg p\}, \{\neg p, p\}, \{q, \neg q\}\}$$

$$S_2 = S_1 \cup \{\square, \dots\}$$

Por tanto, S es insatisfactible.

- Sea $S = \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{q, r, s\}, \{\neg s, \neg r\}\}$, aplicando el algoritmo:

$$S_1 = S \cup \{\{p\}, \{p, r, s\}, \{q, s, \neg s\}, \{q, r, \neg r\}\}$$

$$S_2 = S_1 \cup \{\{p, s, \neg s\}, \{p, r, \neg r\}, \{q, \neg r, \neg s\}, \{p, q, r, s\}\}$$

$$S_3 = S_2 \cup \{\{p, \neg r, \neg s\}, \{p, q, \neg s, s\}, \{p, q, \neg r, r\}, \{p, q, \neg r, \neg s\}\}$$

Y $S_4 = S_3$. Por tanto, S es satisfactible.

Sistemas
deductivos

Pruebas formales

Encadenamiento con
cláusulas de HornResolución
Proposicional

La regla de resolución

Saturación y resolución
regular

Estrategias de resolución

Resolución en LPO

Resolución no restringida

Unificación

Ejemplos

Resolución

Razonamiento con igualdad

Ejemplos (II)

- ▶ La aparición de tautologías suele provocar el cálculo de muchas resolventes repetidas y la aparición de nuevas tautologías.
- ▶ Sin embargo, las tautologías son cláusulas esencialmente *redundantes*, ya que tenemos el siguiente resultado:
 - ▶ Si $C \in TAUT$ y S un conjunto de fórmulas entonces

$$S \text{ es satisfactible} \iff S - \{C\} \text{ es satisfactible}$$

- ▶ Por tanto, en cada etapa del algoritmo de saturación podemos eliminar las tautologías obtenidas.
- ▶ Ejemplo: $S = \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{q, r, s\}, \{\neg s, \neg r\}\}$, y aplicando el algoritmo con eliminación de tautologías

$$S_1 = S \cup \{\{p\}, \{p, r, s\}\}, \quad S_2 = S_1$$

Por tanto, S es satisfactible.

Reducir la redundancia

Definición. Dado un conjunto de cláusulas S decimos que una cláusula C es redundante si S y $S - \{C\}$ son equiconsistentes.

- ▶ Por ejemplo: Las tautologías son siempre redundantes.
- ▶ La eliminación de cláusulas redundantes reduce el número total de cláusulas sin alterar la satisfactibilidad del conjunto.
- ▶ Una forma no trivial de eliminar cláusulas redundantes se basa en la relación de **subsunción**.

Definición. Decimos que una cláusula C **subsume** a C' si $C \subseteq C'$ (como conjuntos de literales).

- ▶ **Observación:** Si $C, C' \in S$ y C subsume a C' entonces C' es redundante.

Sistemas
deductivos

Pruebas formales

Encadenamiento con
cláusulas de HornResolución
Proposicional

La regla de resolución

Saturación y resolución
regular

Estrategias de resolución

Resolución en LPO

Resolución no restringida

Unificación

Ejemplos

Resolución

Razonamiento con igualdad

Resolución regular

- ▶ Otra forma de mejorar la eficiencia del algoritmo de resolución es limitar el cálculo de resolventes respecto de un mismo literal.

Definición.

Un deducción por resolución C_1, \dots, C_n es **regular** si ninguna de sus resolventes C_j contiene un literal respecto del cual se resolvió para calcular alguna de las resolventes C_i previas ($i < j$).

- ▶ Esta restricción (o estrategia) se utiliza en el siguiente algoritmo para decidir la satisfactibilidad de un conjunto de cláusulas proposicionales.

Sistemas deductivos

Pruebas formales

Encadenamiento con
cláusulas de Horn

Resolución Proposicional

La regla de resolución

Saturación y resolución
regular

Estrategias de resolución

Resolución en LPO

Resolución no restringida

Unificación

Ejemplos

Resolución

Razonamiento con igualdad

Procedimiento de resolución regular

1. Dado un conjunto de cláusulas S , fijemos una ordenación p_1, \dots, p_k de las variables proposicionales que aparecen en S .
2. Hagamos $S_0 = S$.
3. Para $j = 1, \dots, k$, calculamos
 - 3.1 El conjunto de cláusulas S'_j que se obtiene de S_{j-1} añadiéndole a S_{j-1} todas las resolventes que pueden calcularse respecto de p_j usando cláusulas de S_{j-1} .
 - 3.2 A continuación, S_j se obtiene de S'_j eliminado todas las cláusulas que contengan p_j o $\neg p_j$.
4. Si $\square \in S_k$, entonces S es insatisfactible. En caso contrario, S es satisfactible.

Se puede probar que el resultado del algoritmo no depende del orden seleccionado en las variables proposicionales.

Sistemas deductivos

Pruebas formales

Encadenamiento con
cláusulas de Horn

Resolución Proposicional

La regla de resolución

Saturación y resolución
regular

Estrategias de resolución

Resolución en LPO

Resolución no restringida

Unificación

Ejemplos

Resolución

Razonamiento con igualdad

Ejemplos

- Sea $S = \{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg q\}\}$.
Fijamos el orden p, q para aplicar resolución regular:

$$p: S'_1 = S_0 \cup \{\{q\}, \{q, \neg q\}\}, \text{ luego}$$

$$S_1 = \{\{q\}, \{\neg q\}, \{q, \neg q\}\}$$

$$q: S'_2 = S_1 \cup \{\square, \{q, \neg q\}\}, \text{ luego } S_2 = \{\square\}.$$

Por tanto, S es insatisfactible.

- Sea $S = \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{q, r, s\}, \{\neg s, \neg r\}\}$.
Aplicando el algoritmo para la ordenación p, q, r, s obtenemos

$$p: S_1 = \{\{q, r, s\}, \{\neg s, \neg r\}\}.$$

$$q: S_2 = \{\{\neg s, \neg r\}\}.$$

$$r: S_3 = \emptyset.$$

$$s: S_4 = S_3.$$

Por tanto, S es satisfactible.

Sistemas
deductivos

Pruebas formales

Encadenamiento con
cláusulas de HornResolución
Proposicional

La regla de resolución

Saturación y resolución
regular

Estrategias de resolución

Resolución en LPO

Resolución no restringida

Unificación

Ejemplos

Resolución

Razonamiento con igualdad

Completitud y eficiencia

- ▶ Hemos estudiado la deducción como un método mecánico para decidir la validez, consistencia, consecuencia lógica, etc.
- ▶ La completitud es una propiedad fundamental de los procedimientos de deducción estudiados.
- ▶ En el caso de resolución la existencia de una demostración es decidible, y el conjunto de teoremas es finito (si el conjunto de cláusulas inicial es finito):
Resolución por Saturación.
- ▶ Sin embargo, los métodos de decisión conocidos no son eficientes, en general.
- ▶ Una solución: Restringir el tipo de cláusulas consideradas.
 - ▶ Una **cláusula de Horn** es una cláusulas con a lo sumo un literal positivo.
 - ▶ El problema de decidir si un conjunto de cláusulas de Horn (proposicionales) es satisfactible es decidible de manera eficiente.

Sistemas deductivos

Pruebas formales

Encadenamiento con
cláusulas de Horn

Resolución Proposicional

La regla de resolución

Saturación y resolución
regular

Estrategias de resolución

Resolución en LPO

Resolución no restringida

Unificación

Ejemplos

Resolución

Razonamiento con igualdad

Estrategias

Para reducir la explosión combinatoria de aplicación de la regla de resolución se pueden considerar algunas estrategias.

- ▶ **Resolución positiva** (resp. negativa): Sólo se calculan resolventes si una de las dos cláusulas contiene únicamente literales positivos (resp. negativos). Es (refutacionalmente) completa.
- ▶ **Resolución lineal**: Una deducción por resolución a partir de un conjunto S, C_1, \dots, C_n , es lineal si para cada $i < n$ la cláusula C_{i+1} es una resolvente de C_i y otra cláusula previamente obtenida por resolución o perteneciente a S .
 - ▶ La resolución lineal es (refutacionalmente) completa:
 - ▶ **Teorema**. Si S es un conjunto insatisfactible y $S - \{C\}$ es satisfactible, entonces existe una refutación de S por resolución lineal cuya cláusula inicial es C .

Sistemas deductivos

Pruebas formales

Encadenamiento con
cláusulas de Horn

Resolución Proposicional

La regla de resolución

Saturación y resolución
regular

Estrategias de resolución

Resolución en LPO

Resolución no restringida

Unificación

Ejemplos

Resolución

Razonamiento con igualdad

Estrategias (II)

- ▶ **Resolución unidad:** Sólo se permiten resolventes si una de las cláusulas es unitaria.
- ▶ **Resolución por entradas:** Sólo se permiten resolventes si una de las cláusulas pertenece a S .
 - ▶ En general, resolución unidad y por entradas **NO** son refutacionalmente completas, pero sí lo son restringidas a conjuntos de cláusulas de Horn.
 - ▶ **Teorema.** Sea S es un conjunto insatisfactible formado por cláusulas de Horn. Entonces S es refutable mediante resolución unidad y mediante resolución por entradas.

Resolución en LPO

- ▶ Por el Teorema de Herbrand, un conjunto de cláusulas, Σ , es inconsistente si y sólo si su extensión de Herbrand, $EH(\Sigma)$, es inconsistente (proposicionalmente).
- ▶ Esto proporciona una forma rudimentaria del método de resolución para probar que un conjunto, Σ , de cláusulas de un lenguaje de primer orden es inconsistente:
 1. Generar $EH(\Sigma)$ y,
 2. Probar que $EH(\Sigma) \vdash_r \square$.
- ▶ El método de resolución en lógica de primer orden incorpora varias mejoras en este procedimiento básico:
 1. Es posible generar $EH(\Sigma)$ poco a poco, calculando sólo las sustituciones necesarias para obtener cada una de las cláusulas con las que se calculan los resolventes.
 2. No es necesario restringir el cálculo de resolventes proposicionales a cláusulas sin variables, y
 3. Para calcular una resolvente proposicional entre dos cláusulas, podemos conseguir que ambas cláusulas se obtengan aplicando la misma sustitución a dos cláusulas de Σ (y dicha sustitución se obtiene algorítmicamente).

Sistemas deductivos

Pruebas formales

Encadenamiento con
cláusulas de Horn

Resolución Proposicional

La regla de resolución

Saturación y resolución
regular

Estrategias de resolución

Resolución en LPO

Resolución no restringida

Unificación

Ejemplos

Resolución

Razonamiento con igualdad

Ejemplo

- ▶ Sea $\Sigma = \{C_1, C_2, C_3\}$ el conjunto de las cláusulas

$$C_1 : \neg P(a, y) \vee \neg P(y, z) \vee \neg P(z, y),$$

$$C_2 : P(x, f(x)) \vee P(a, x),$$

$$C_3 : P(f(x), x) \vee P(a, x)$$

siendo a una constante.

- ▶ Para probar que Σ es inconsistente basta probar que su extensión de Herbrand $EH(\Sigma)$ es inconsistente (proposicionalmente).
- ▶ Consideremos las siguientes sustituciones:

$$\theta_1 = \{y/a, z/a\}$$

$$\theta_2 = \{y/a, z/f(a)\}$$

$$\theta_3 = \{y/f(a), z/a\}$$

$$\theta_4 = \{x/a\}$$

- ▶ Entonces $C_1\theta_1, C_1\theta_2, C_1\theta_3, C_2\theta_4, C_3\theta_4 \in EH(\Sigma)$.

Sistemas deductivos

Pruebas formales

Encadenamiento con
cláusulas de Horn

Resolución Proposicional

La regla de resolución

Saturación y resolución
regular

Estrategias de resolución

Resolución en LPO

Resolución no restringida

Unificación

Ejemplos

Resolución

Razonamiento con igualdad

Ejemplo (II)

► Las cláusulas

$$E_1 = C_1\theta_1 : \neg P(a, a)$$

$$E_2 = C_1\theta_2 : \neg P(a, a) \vee \neg P(a, f(a)) \vee \neg P(f(a), a)$$

$$E_3 = C_1\theta_3 : \neg P(a, f(a)) \vee \neg P(f(a), a)$$

$$E_4 = C_2\theta_4 : P(a, f(a)) \vee P(a, a),$$

$$E_5 = C_3\theta_4 : P(f(a), a) \vee P(a, a)$$

son fórmulas abiertas sin variables.

- Veamos que $EH(\Sigma)$ es inconsistente. Para ello probamos que $S = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\} \subseteq EH(\Sigma)$ es inconsistente utilizando resolución **proposicional**:

$$\begin{array}{ccccccc}
 E_1 & & E_3 & & E_5 & & E_1 \\
 \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
 E_4 & \rightarrow & P(a, f(a)) & \rightarrow & \neg P(f(a), a) & \rightarrow & P(a, a) & \rightarrow & \square
 \end{array}$$

Sistemas
deductivos

Pruebas formales

Encadenamiento con
cláusulas de HornResolución
Proposicional

La regla de resolución

Saturación y resolución
regular

Estrategias de resolución

Resolución en LPO

Resolución no restringida

Unificación

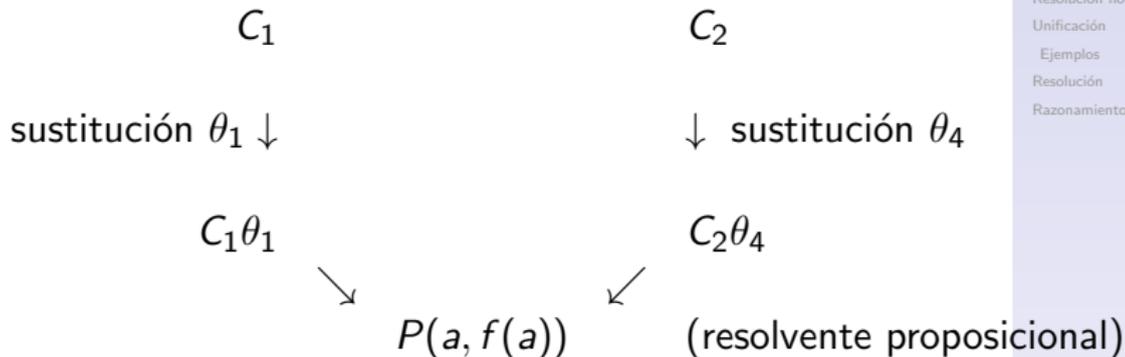
Ejemplos

Resolución

Razonamiento con igualdad

Ejemplo (III)

- ▶ Cada resolvente proposicional entre cláusulas de $EH(\Sigma)$ puede obtenerse directamente a partir de las cláusulas de Σ si se toma nota de las sustituciones utilizadas para generar las cláusulas de $EH(\Sigma)$.
- ▶ **Ejemplo:** La resolvente $P(a, f(a))$ obtenida a partir de E_1 y E_4 , puede considerarse obtenida a partir de C_1 y C_2 utilizando las sustituciones θ_1 y θ_4 .
- ▶ Gráficamente,



- ▶ Si las sustituciones utilizadas pueden dejar variables libres obtenemos una **resolvente no restringida**.

Sistemas
deductivosPruebas formales
Encadenamiento con
cláusulas de HornResolución
ProposicionalLa regla de resolución
Saturación y resolución
regular
Estrategias de resolución

Resolución en LPO

Resolución no restringida
Unificación
Ejemplos
Resolución
Razonamiento con igualdad

Resolventes no restringidas

- ▶ Decimos que C es una **resolvente no restringida** de las cláusulas C_1 y C_2 si

$$C_1 = \{A_1, \dots, A_n, L_1, \dots, L_k\}$$

$$C_2 = \{B_1, \dots, B_m, M_1, \dots, M_r\}$$

y existen dos sustituciones θ_1 y θ_2 y un literal L tales que:

- ▶ $\{L_1, \dots, L_k\}\theta_1 = \{L\}$.
 - ▶ $\{M_1, \dots, M_r\}\theta_2 = \{L^c\}$ (literal complementario de L), y
 - ▶ $C = \{A_1\theta_1, \dots, A_n\theta_1, B_1\theta_2, \dots, B_m\theta_2\}$.
- ▶ Es decir,

$$C = (C_1\theta_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2\theta_2 \setminus \{L^c\})$$

- ▶ En otras palabras C es una resolvente no restringida de C_1 y C_2 si existen dos subcláusulas $D_1 \subseteq C_1$ y $D_2 \subseteq C_2$ y dos sustituciones θ_1 y θ_2 y un literal L tales que
 - ▶ $D_1\theta_1 = \{L\}$ y $D_2\theta_2 = \{L^c\}$
 - ▶ C es una resolvente **proposicional** de $C_1\theta_1$ y $C_2\theta_2$ con respecto al literal L .

Sistemas deductivos

Pruebas formales

Encadenamiento con
cláusulas de Horn

Resolución Proposicional

La regla de resolución

Saturación y resolución
regular

Estrategias de resolución

Resolución en LPO

Resolución no restringida

Unificación

Ejemplos

Resolución

Razonamiento con igualdad

Ejemplos

- ▶ Si las cláusulas son cerradas, una resolvente no restringida es una resolvente proposicional.
- ▶ Las resolventes no restringidas no son únicas, incluso respecto al mismo par de literales:

$$\frac{\{P(x, a), H(a, x)\}, \quad \{\neg P(y, x), \neg M(y, x)\}}{\downarrow \theta_1 = \{x/z\} \quad \downarrow \theta_2 = \{x/a, y/z\}} \\ \{H(a, z), \neg M(z, a)\}$$

$$\frac{\{P(x, a), H(a, x)\}, \quad \{\neg P(y, x), \neg M(y, x)\}}{\downarrow \theta_1 = \{x/b\} \quad \downarrow \theta_2 = \{x/a, y/b\}} \\ \{H(a, b), \neg M(b, a)\}$$

Sistemas
deductivos

Pruebas formales

Encadenamiento con
cláusulas de HornResolución
Proposicional

La regla de resolución

Saturación y resolución
regular

Estrategias de resolución

Resolución en LPO

Resolución no restringida

Unificación

Ejemplos

Resolución

Razonamiento con igualdad

Demostraciones por resolución

Dado un conjunto de cláusulas, Σ , podemos considerar el sistema deductivo que tiene a Σ como conjunto de axiomas y resolución no restringida como única regla de inferencia.

- ▶ Una **demostración por resolución no restringida** a partir de Σ es una sucesión de cláusulas C_1, \dots, C_n tal que para cada $i = 1, \dots, n$ se verifica:
 - ▶ $C_i \in \Sigma$, o bien
 - ▶ Existen $j, k < i$ tales que C_i es una resolvente no restringida de C_j y C_k .

Si $C_n = \square$ diremos que C_1, \dots, C_n es una **refutación** de Σ .

- ▶ Una cláusula C es **demostrable por resolución no restringida** a partir de Σ si existe una demostración a partir de Σ , C_1, \dots, C_n , tal que $C_n = C$.

Notación: $\Sigma \vdash_{ur} C$.

- ▶ Decimos que Σ es **refutable** si $\Sigma \vdash_{ur} \square$.

Sistemas deductivos

Pruebas formales

Encadenamiento con cláusulas de Horn

Resolución Proposicional

La regla de resolución

Saturación y resolución regular

Estrategias de resolución

Resolución en LPO

Resolución no restringida

Unificación

Ejemplos

Resolución

Razonamiento con igualdad

Ejemplo

$$\Sigma = \{ \neg P(a, y) \vee \neg P(y, z) \vee \neg P(z, y), \\ P(x, f(x)) \vee P(a, x), \\ P(f(x), x) \vee P(a, x) \}$$

Veamos que $\Sigma \vdash_{ur} \square$:

- $\neg P(a, y) \vee \neg P(y, z) \vee \neg P(z, y)$ **[[Hip.]]**
- $P(x, f(x)) \vee P(a, x)$ **[[Hip.]]**
- $P(a, f(a))$ **[[Res(1, 2), $\theta_1 = \{y/a, z/a\}$, $\theta_2 = \{x/a\}$]]**
- $\neg P(f(a), a)$ **[[Res(1, 3), $\theta_1 = \{y/f(a), z/a\}$, $\theta_2 = \emptyset$]]**
- $P(f(x), x) \vee P(a, x)$ **[[Hip.]]**
- $P(a, a)$ **[[Res(5,4), $\theta_1 = \{x/a\}$, $\theta_2 = \emptyset$]]**
- \square **[[Res(1, 6), $\theta_1 = \{y/a, z/a\}$, $\theta_2 = \emptyset$]]**

Sistemas
deductivos

Pruebas formales

Encadenamiento con
cláusulas de HornResolución
Proposicional

La regla de resolución

Saturación y resolución
regular

Estrategias de resolución

Resolución en LPO

Resolución no restringida

Unificación

Ejemplos

Resolución

Razonamiento con igualdad

Otro ejemplo

$$\Sigma = \{R(x, y) \vee R(y, z), \neg R(x, f(x))\}$$

Veamos que $\Sigma \vdash_{ur} \square$.

1. $R(x, y) \vee R(y, z)$ **[[Hip.]]**
2. $\neg R(x, f(x))$ **[[Hip.]]**
3. $R(f(x), z)$ **[[Res(1, 2), $\theta_1 = \{y/f(x)\}$, $\theta_2 = \emptyset$]]**
4. \square **[[Res(2, 3), $\theta_1 = \{x/f(u)\}$, $\theta_2 = \{x/u, z/f(f(u))\}$]]**

Sistemas
deductivos

Pruebas formales

Encadenamiento con
cláusulas de HornResolución
Proposicional

La regla de resolución

Saturación y resolución
regular

Estrategias de resolución

Resolución en LPO

Resolución no restringida

Unificación

Ejemplos

Resolución

Razonamiento con igualdad

- ▶ Sea C una cláusula de primer orden y D una subcláusula de C tal que existe una sustitución θ para la que $D\theta$ se reduce a un único literal L . Entonces decimos que
 - ▶ La sustitución θ **unifica** el conjunto de expresiones D .
 - ▶ D es **unificable** y θ es un **unificador** de D .
- ▶ Un problema central del cálculo de resolventes no restringidas entre dos cláusulas C_1 y C_2 es encontrar las subcláusulas $D_1 \subseteq C_1$ y $D_2 \subseteq C_2$ unificables y los unificadores θ_1 y θ_2 que hacen que $D_1\theta_1$ y $D_2\theta_2$ se reduzcan a literales complementarios.
- ▶ El problema puede reducirse a la búsqueda de una sola sustitución. Para ello:
 1. Podemos suponer que C_1 y C_2 no tienen variables comunes (**condición de variables separadas**).
 2. Buscamos $D_1 \subseteq C_1$ y $D_2 \subseteq C_2$ tales que $D_1 \cup D_2^c$ (o bien $D_1^c \cup D_2$) satisface que:
 - ▶ Es unificable, y
 - ▶ sus literales son positivos y tienen el mismo predicado. (D_i^c está formada por los literales complementarios de los literales de D_i)

- ▶ Si D es un conjunto de literales, una sustitución θ es un unificador de D si $D\theta$ es unitaria.
- ▶ Un unificador θ de D es un **unificador de máxima generalidad** (u.m.g.) si
 - ▶ Para todo unificador σ de D , existe una sustitución α tal que $\sigma = \theta\alpha$.
(siendo $\theta\alpha$ la composición de θ y α , es decir, la sustitución obtenida al aplicar primero la sustitución θ y luego α).
- ▶ Ejemplo de u.m.g. de literales: $\theta_1 = \{y/x, u/a, z/a\}$ es un u.m.g. de

$$P(x, z), P(y, a), P(x, u)$$

y $\theta_2 = \{x/a, y/a, u/a, z/a\}$ es unificador, pero no es un u.m.g.:

$$\theta_2 = \{y/x, u/a, z/a\}\{x/a\}$$

Algoritmo para obtener un u.m.g.

- ▶ Para unificar pt_1, \dots, t_n y pt'_1, \dots, t'_n , debemos obtener una sustitución θ que sea solución de las ecuaciones:

$$t_1\theta = t'_1\theta, \dots, t_n\theta = t'_n\theta.$$

- ▶ Para ello aplicamos al conjunto $\{t_1 = t'_1, \dots, t_n = t'_n\}$ las siguientes reglas, mientras sea posible:

$$R_1: \{x = x\} \cup E \implies E$$

$$R_2: \{x = t\} \cup E \implies \{x = t\} \cup E\{x/t\}$$

cuando x ocurre en E y no en t

$$R_3: \{t = x\} \cup E \implies \{x = t\} \cup E \quad \text{si } t \text{ no es variable.}$$

$$R_4: \{f(t_1, \dots, t_n) = f(t'_1, \dots, t'_n)\} \cup E \implies \\ \{t_1 = t'_1, \dots, t_n = t'_n\} \cup E$$

$$R_5: \{f(t_1, \dots, t_n) = g(t'_1, \dots, t'_n)\} \cup E \implies \text{FALLO} \quad (\text{si } f \neq g).$$

$$R_6: \{x = t\} \cup E \implies \text{FALLO} \quad \text{si } x \text{ ocurre en } t.$$

- ▶ Si en algún paso obtenemos un conjunto de ecuaciones $\{x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_r = s_r\}$ al que no es posible aplicar ninguna regla, devolvemos UNIFICABLE, y $\theta = \{x_1/s_1, x_2/s_2, \dots, x_r/s_r\}$ es un u.m.g.

Sistemas deductivos

Pruebas formales

Encadenamiento con
cláusulas de Horn

Resolución Proposicional

La regla de resolución

Saturación y resolución
regular

Estrategias de resolución

Resolución en LPO

Resolución no restringida

Unificación

Ejemplos

Resolución

Razonamiento con igualdad

Ejemplos

► Unificar

Divide($x + (a \cdot y), x \cdot S(y)$), Divide($S(y) + (y \cdot a), z \cdot z$)

1. $\{x + (a \cdot y) = (S(y) + (y \cdot a)), x \cdot S(y) = z \cdot z\}$ $[R_4]$
2. $\{x = S(y), a \cdot y = y \cdot a, x = z, S(y) = z\}$ $[R_4]$
3. $\{x = S(y), a = y, y = a, x = z, S(y) = z\}$ $[R_4]$
4. $\{x = S(y), y = a, x = z, z = S(y)\}$ $[R_3]$
5. $\{x = S(y), y = a, S(y) = z, z = S(y)\}$ $[R_2]$
6. $\{x = S(a), y = a, S(a) = z, z = S(a)\}$ $[R_2]$
7. $\{x = S(a), y = a, z = S(a)\}$ $[R_3]$

► No es posible unificar

Divide($x + (a \cdot y), x \cdot S(y)$), Divide($S(x) + (y \cdot a), z \cdot z$)
pues

1. $\{x + (a \cdot y) = (S(x) + (y \cdot a)), x \cdot S(y) = z \cdot z\}$
2. $\{x = S(x), a \cdot y = y \cdot a, x = z, S(y) = z\}$
3. FALLO, x ocurre en $S(x)$.

Sistemas
deductivos

Pruebas formales

Encadenamiento con
cláusulas de HornResolución
Proposicional

La regla de resolución

Saturación y resolución
regular

Estrategias de resolución

Resolución en LPO

Resolución no restringida

Unificación

Ejemplos

Resolución

Razonamiento con igualdad

- ▶ Un cambio de variables (o renombramiento) es una sustitución α tal que para toda variable v , $\alpha(v)$ es una variable.
- ▶ Decimos que C es una **resolvente** de las cláusulas C_1 y C_2 si existen dos cambios de variables α_1 y α_2 tales que

$$C_1\alpha_1 = \{A_1, \dots, A_n, L_1, \dots, L_k\}$$
$$C_2\alpha_2 = \{B_1, \dots, B_m, M_1, \dots, M_r\}$$

no tienen variables comunes y

- ▶ Si $D_1 = \{L_1, \dots, L_k\}$ y $D_2 = \{M_1, \dots, M_r\}$, entonces $D_1 \cup D_2^c$ es unificable con u.m.g. σ .
 - ▶ $C = \{A_1\sigma, \dots, A_n\sigma, B_1\sigma, \dots, B_m\sigma\}$
- ▶ Es decir,

$$C = (C_1\alpha_1\sigma \setminus D_1\sigma) \cup (C_2\alpha_2\sigma \setminus D_2\sigma)$$

Ejemplos

- ▶ Si las cláusulas son cerradas, una resolvente es una resolvente proposicional.
- ▶ Si las cláusulas no tienen variables comunes no es necesario renombrar:

$$\frac{\{P(z, a), H(a, z)\}, \quad \{\neg P(y, x), \neg M(y, x)\}}{\downarrow \sigma = \{z/y, x/a\} \quad \text{u.m.g.}} \quad \{H(a, y), \neg M(y, a)\}$$

Demostraciones por resolución

Dado un conjunto de cláusulas, Σ , podemos considerar el sistema deductivo que tiene a Σ como conjunto de axiomas y resolución como única regla de inferencia.

- ▶ Una **demostración por resolución** a partir de Σ es una sucesión de cláusulas C_1, \dots, C_n tal que para cada $i = 1, \dots, n$ se verifica:
 - ▶ $C_i \in \Sigma$, o bien
 - ▶ Existen $j, k < i$ tales que C_i es un resolvente de C_j y C_k .

Si $C_n = \square$ diremos que C_1, \dots, C_n es una **refutación** de Σ .

- ▶ Una cláusula C es **demostrable por resolución** a partir de Σ si existe una demostración a partir de Σ , C_1, \dots, C_n , tal que $C_n = C$.

Notación: $\Sigma \vdash_r C$.

- ▶ Decimos que Σ es **refutable** si $\Sigma \vdash_r \square$.

Sistemas deductivos

Pruebas formales

Encadenamiento con
cláusulas de Horn

Resolución Proposicional

La regla de resolución

Saturación y resolución
regular

Estrategias de resolución

Resolución en LPO

Resolución no restringida

Unificación

Ejemplos

Resolución

Razonamiento con igualdad

Ejemplo

$$\Sigma = \{ \neg P(a, y) \vee \neg P(y, z) \vee \neg P(z, y), \\ P(x, f(x)) \vee P(a, x), \\ P(f(x), x) \vee P(a, x) \}$$

Veamos que $\Sigma \vdash_r \square$:

1. $\neg P(a, y) \vee \neg P(y, z) \vee \neg P(z, y)$ [[Hip.]]
2. $P(x, f(x)) \vee P(a, x)$ [[Hip.]]
3. $P(a, f(a))$ [[Res(1, 2), $\theta = \{y/a, z/a, x/a\}$]]
4. $\neg P(f(a), a)$ [[Res(1, 3), $\theta = \{y/f(a), z/a\}$]]
5. $P(f(x), x) \vee P(a, x)$ [[Hip.]]
6. $P(a, a)$ [[Res(5,4), $\theta = \{x/a\}$]]
7. \square [[Res(1, 6), $\theta = \{y/a, z/a\}$]]

Sistemas
deductivos

Pruebas formales

Encadenamiento con
cláusulas de HornResolución
Proposicional

La regla de resolución

Saturación y resolución
regular

Estrategias de resolución

Resolución en LPO

Resolución no restringida

Unificación

Ejemplos

Resolución

Razonamiento con igualdad

Otro ejemplo

$$\Sigma = \{R(x, y) \vee R(y, z), \neg R(x, f(x))\}$$

Veamos que $\Sigma \vdash_r \square$.

1. $R(x, y) \vee R(y, z)$ [[Hip.]]
2. $\neg R(u, f(u))$ [[Hip. (renombramos)]]
3. $R(f(u), z)$ [[Res(1, 2), $\theta = \{x/u, y/f(u)\}$]]
4. \square [[ren. u/v en 2, Res(2, 3), $\theta = \{v/f(u), z/f(f(v))\}$]]

Sistemas deductivos

Pruebas formales

Encadenamiento con
cláusulas de Horn

Resolución Proposicional

La regla de resolución

Saturación y resolución
regular

Estrategias de resolución

Resolución en LPO

Resolución no restringida

Unificación

Ejemplos

Resolución

Razonamiento con igualdad

Adecuación y Completitud

- ▶ **Teorema de adecuación.** Sean Σ un conjunto de cláusulas y C una cláusula. Entonces

$$\Sigma \vdash_{ur} C \implies \Sigma \models C$$

- ▶ Resolución es un caso particular de resolución no restringida, luego si $\Sigma \vdash_r C$ entonces $\Sigma \models C$.
- ▶ Tanto resolución como resolución no restringida son incompletas. Pero la completitud de la resolución no restringida **para la refutación** se sigue del teorema de Herbrand y del correspondiente resultado de completitud para la resolución proposicional. Además se tiene,
- ▶ **Lema.** Si una cláusula C es una resolvente no restringida de C_1 y C_2 , respecto de las subcláusulas D_1 y D_2 , entonces C también es una resolvente de C_1 y C_2 con respecto a D_1 y D_2 .
- ▶ **Teorema de completitud de la refutación:**

$$\Sigma \text{ es inconsistente} \iff \Sigma \vdash_r \square$$

Sistemas deductivos

Pruebas formales

Encadenamiento con
cláusulas de Horn

Resolución Proposicional

La regla de resolución

Saturación y resolución
regular

Estrategias de resolución

Resolución en LPO

Resolución no restringida

Unificación

Ejemplos

Resolución

Razonamiento con igualdad

Ejemplo de refutación

- Ejemplo: En el lenguaje $LC = \{\in\}$, definimos la relación de inclusión como sigue:

$$H := \forall x \forall y (x \subseteq y \leftrightarrow \forall w (w \in x \leftrightarrow w \in y))$$

Veamos como se prueba que la relación \subseteq es transitiva;

$$C := \forall x \forall y \forall z (x \subseteq y \wedge y \subseteq z \rightarrow x \subseteq z)$$

- Paso 1: Paso a forma clausal de H y $\neg C$:

$$H_1 : \{\neg(x \subseteq y), \neg(w \in x), w \in y\} \quad [' \rightarrow ' \text{ de } H]$$

$$H_2 : \{x \subseteq y, f(x, y) \in x\} \quad [' \rightarrow ' \text{ de } H]$$

$$H_3 : \{x \subseteq y, \neg(f(x, y) \in y)\} \quad [' \rightarrow ' \text{ de } H]$$

$$C_1 : a \subseteq b \quad [a, b, c \text{ nuevas constantes}, \neg C]$$

$$C_2 : b \subseteq c \quad [\neg C]$$

$$C_3 : \neg(a \subseteq c) \quad [\neg C]$$

Ejemplo de refutación (II)

- Una refutación es (sin llaves):

$$R_1: \neg(w \in a), w \in b$$

$$R_2: \neg(w \in b), w \in c$$

$$R_3: a \subseteq y, f(a, y) \in b$$

$$R_4: x \subseteq c, \neg(f(x, c) \in b)$$

$$R_5: a \subseteq c$$

$$R_6: \square$$

$$[H_1, 1 \text{ con } C_1, 1]$$

$$[\{x/a, y/b\}]$$

$$[H_1, 1 \text{ con } C_2, 1]$$

$$[\{x/b, y/c\}]$$

$$[H_2, 2 \text{ con } R_1, 1]$$

$$[\{x/a, w/f(a, y)\}]$$

$$[H_3, 2 \text{ con } R_2, 2]$$

$$[\{y/c, w/f(x, c)\}]$$

$$[R_3, 2 \text{ con } R_4, 2]$$

$$[\{x/a, y/c\}]$$

$$[R_5, 1 \text{ con } C_3, 1]$$

Sistemas
deductivos

Pruebas formales

Encadenamiento con
cláusulas de HornResolución
Proposicional

La regla de resolución

Saturación y resolución
regular

Estrategias de resolución

Resolución en LPO

Resolución no restringida

Unificación

Ejemplos

Resolución

Razonamiento con igualdad

Razonamiento con igualdad

- ▶ Podemos utilizar el método de resolución para razonar con un LPO **con igualdad**. Para ello basta añadir axiomas que expresen las propiedades esenciales del predicado de igualdad.
- ▶ Fijado un LPO con igualdad, L , denotaremos por $EQ(L)$ al conjunto formado por las siguientes cláusulas:
 - ▶ $x = x$.
 - ▶ $x \neq y \vee y = x$.
 - ▶ $x \neq y \vee y \neq z \vee x = z$.
 - ▶ Para cada símbolo de predicado P de L (de aridad n)

$$x_j \neq x_0 \vee \neg P(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) \vee P(x_1, \dots, x_0, \dots, x_n)$$
 - ▶ Para cada símbolo de función f de L (de aridad n)

$$x_j \neq x_0 \vee f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_0, \dots, x_n)$$
- ▶ Si S es un conjunto de cláusulas entonces

$$S \text{ es insatisfactible} \iff S \cup EQ(L) \text{ es refutable}$$

Sistemas deductivos

Pruebas formales

Encadenamiento con cláusulas de Horn

Resolución Proposicional

La regla de resolución

Saturación y resolución regular

Estrategias de resolución

Resolución en LPO

Resolución no restringida

Unificación

Ejemplos

Resolución

Razonamiento con igualdad

Paramodulación

- ▶ Otra posibilidad es integrar el razonamiento con igualdad en el cálculo de resolventes añadiendo una nueva regla específica para el tratamiento de las ecuaciones.
- ▶ La regla de **paramodulación** permite obtener una nueva cláusula C (una paramodulante) a partir de dos cláusulas C_1 y C_2 de un modo parecido a cálculo de resolventes.