

Tema 4: Formas Prenex, de Skolem y Teorema de Herbrand

Dpto. Ciencias de la Computación Inteligencia Artificial
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Formas Prenex

Equivalencia lógica

Formas Prenex

Operaciones prenex

Esqueleto
Proposicional

Formas de Skolem

Forma clausal

Teorema de
Herbrand

Extensión de Herbrand

Teorema de Herbrand

Contenido

Formas Prenex

Equivalencia lógica

Formas Prenex

Operaciones prenex

Esqueleto Proposicional

Formas de Skolem

Forma clausal

Teorema de Herbrand

Extensión de Herbrand

Teorema de Herbrand

Formas Prenex, de
Skolem y Teorema
de Herbrand

Formas Prenex

Equivalencia lógica

Formas Prenex

Operaciones prenex

Esqueleto
Proposicional

Formas de Skolem

Forma clausal

Teorema de
Herbrand

Extensión de Herbrand

Teorema de Herbrand

Formas Prenex en LPO

- ▶ En esta sección veremos cómo obtener formas normales para fórmulas de un LPO.
- ▶ Los métodos y equivalencias vistas en proposicional se aplican de forma análoga cuando se hace uso de las mismas conectivas.
- ▶ Por ello, daremos métodos para manipular los cuantificadores y obtener expresiones adecuadas a las que podremos posteriormente aplicar los mecanismos de normalización presentados para la lógica proposicional.

Formas Prenex

Equivalencia lógica

Formas Prenex

Operaciones prenex

Esqueleto

Proposicional

Formas de Skolem

Forma clausal

Teorema de Herbrand

Extensión de Herbrand

Teorema de Herbrand

Equivalencia entre fórmulas LPO

Definición. Si F y G son fórmulas de un lenguaje de primer orden, entonces F y G son **equivalentes**, $F \equiv G$, si y sólo si $F \leftrightarrow G$ es lógicamente válida.

- ▶ Para fórmulas cerradas, $F \equiv G$ si y sólo si F y G tienen los mismos modelos.
- ▶ Para fórmulas no cerradas la equivalencia queda como:

$$F(\vec{x}) \equiv G(\vec{x}) \text{ sii } \models \forall \vec{x}(F(\vec{x}) \leftrightarrow G(\vec{x}))$$

- ▶ Ejemplos:
 - ▶ Las equivalencias proposicionales son válidas en lógica de primer orden.
 - ▶ Otras equivalencias importantes expresan propiedades de los cuantificadores:

$$\forall x(F \wedge G) \equiv \forall xF \wedge \forall xG.$$

- ▶ Utilizaremos las equivalencias para **reescribir** las fórmulas.

Definición.

Una fórmula F de un lenguaje de primer orden está en **Forma Prenex** si es de la forma

$$Q_1x_1 Q_2x_2 \cdots Q_nx_n G(x_1, \dots, x_n)$$

donde $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ y $G(x_1, \dots, x_n)$ es abierta.

- ▶ Es decir, en una fórmula en forma prenex todos los cuantificadores se encuentran a la cabeza de la fórmula.
- ▶ Decimos que una fórmula H es una forma normal prenexa de F si F y H son equivalentes y H está en forma prenex.

Objetivo: Dada una fórmula, trasladar todos los cuantificadores a la parte inicial de la fórmula para obtener una forma prenex.

Operaciones prenex

Operación	Subfórmula	Cambiar por	Restricción
(P1)	$\exists xG$	$\exists yG\{x/y\}$	$y \notin VL(G)$
	$\forall xG$	$\forall yG\{x/y\}$	$y \notin VL(G)$
(P2)	$\neg\exists xF$ $\neg\forall xG$	$\forall x\neg F$ $\exists x\neg G$	
(P3)	$\exists xG \vee H$	$\exists x(G \vee H)$	$x \notin VL(H)$
	$G \vee \exists xH$	$\exists x(G \vee H)$	$x \notin VL(G)$
	$\forall xG \vee H$	$\forall x(G \vee H)$	$x \notin VL(H)$
	$G \vee \forall xH$	$\forall x(G \vee H)$	$x \notin VL(G)$
(P4)	$\exists xG \rightarrow H$	$\forall x(G \rightarrow H)$	$x \notin VL(H)$
	$\forall xG \rightarrow H$	$\exists x(G \rightarrow H)$	$x \notin VL(H)$
(P5)	$G \rightarrow \exists xH$	$\exists x(G \rightarrow H)$	$x \notin VL(G)$
	$G \rightarrow \forall xH$	$\forall x(G \rightarrow H)$	$x \notin VL(G)$
(P6)	$\exists xG \wedge H$	$\exists x(G \wedge H)$	$x \notin VL(H)$
	$G \wedge \exists xH$	$\exists x(G \wedge H)$	$x \notin VL(G)$
	$\forall xG \wedge H$	$\forall x(G \wedge H)$	$x \notin VL(H)$
	$G \wedge \forall xH$	$\forall x(G \wedge H)$	$x \notin VL(G)$

siendo $VL(F)$ el conjunto de las variables libres de F .

Transformación a forma prenex

Lema: Si F' se obtiene de F por aplicación de una operación prenex, entonces $F \equiv F'$.

Teorema.

Para cada fórmula F existe otra fórmula G en forma prenex que es equivalente a F .

Demostración: Basta seguir los siguientes pasos:

1. Si aparece la conectiva \leftrightarrow la expresamos de forma equivalente usando \rightarrow y \wedge .
2. Renombramos las variables de cada subfórmula elemental (es decir, de la forma $\exists v H$, o bien, $\forall v H$), para que no interfieran las cuantificaciones. Para ello utilizamos la operación (P1).
3. Trasladamos negaciones usando (P2).
4. Aplicamos las reglas (P3)–(P6).

Ejemplos

► Sea $F(z, y) \equiv \forall x \exists y (x + z = y) \rightarrow \exists z \forall x (x \cdot y = 0 + z)$

1. $\forall x_1 \exists y_1 (x_1 + z = y_1) \rightarrow \exists z_2 \forall x_2 (x_2 \cdot y = 0 + z_2)$
2. $\exists x_1 (\exists y_1 (x_1 + z = y_1) \rightarrow \exists z_2 \forall x_2 (x_2 \cdot y = 0 + z_2))$
3. $\exists x_1 \forall y_1 ((x_1 + z = y_1) \rightarrow \exists z_2 \forall x_2 (x_2 \cdot y = 0 + z_2))$
4. $\exists x_1 \forall y_1 \exists z_2 ((x_1 + z = y_1) \rightarrow \forall x_2 (x_2 \cdot y = 0 + z_2))$
5. $\boxed{\exists x_1 \forall y_1 \exists z_2 \forall x_2 ((x_1 + z = y_1) \rightarrow (x_2 \cdot y = 0 + z_2))}$

► Sea $G(x) \equiv \exists x P(x, a) \rightarrow (\forall z P(x, z) \rightarrow \forall x P(x, a))$

1. $\forall x_1 (P(x_1, a) \rightarrow (\forall z_2 P(x, z_2) \rightarrow \forall x_3 P(x_3, a)))$
2. $\forall x_1 (P(x_1, a) \rightarrow \exists z_2 (P(x, z_2) \rightarrow \forall x_3 P(x_3, a)))$
3. $\forall x_1 (P(x_1, a) \rightarrow \exists z_2 \forall x_3 (P(x, z_2) \rightarrow P(x_3, a)))$
4. $\boxed{\forall x_1 \exists z_2 \forall x_3 (P(x_1, a) \rightarrow P(x, z_2) \rightarrow P(x_3, a))}$

Esqueleto Proposicional

A continuación vamos a ver cómo podemos reducir el caso de LPO (Primer Orden) al caso más sencillo y completo de LP (Proposicional):

- ▶ Comenzaremos manipulando las fórmulas de LPO para poder obtener fórmulas prácticamente equivalentes (basándonos en la Forma Prenex de las mismas) pero sintácticamente mucho más simples: la llamada **Forma de Skolem**.
- ▶ Posteriormente, daremos un resultado que permite reducir la consistencia de las fórmulas LPO a un conjunto de fórmulas LP.
- ▶ Pero no todo es perfecto, simplificar las fórmulas y que parezcan proposicionales, puede incrementar el número de fórmulas a considerar...
- ▶ .. hasta el punto que, en algunos casos, podemos necesitar una cantidad infinita de fórmulas proposicionales... Pero no todo está perdido...

Formas de Skolem

- ▶ **Objetivo:** Restringir la complejidad sintáctica de las fórmulas LPO, sin perder expresividad.
- ▶ Trabajaremos con fórmulas **cerradas**.
 - ▶ Primer paso: **trasladar los cuantificadores** a la cabeza obteniendo un forma normal prenexa.
 - ▶ Segundo paso: **eliminar los cuantificadores existenciales** hasta obtener una fórmula en forma prenex que sólo contiene cuantificadores universales (**fórmula universal**).
- ▶ La fórmula universal obtenida al final de estas transformaciones es una **forma de Skolem** de la fórmula inicial.
- ▶ **El proceso de eliminación aumenta el lenguaje** con nuevos símbolos de función y nuevas constantes.
- ▶ En general, **NO hay equivalencia** entre la fórmula obtenida y la fórmula inicial, aunque se conserva la consistencia de la fórmula original.

Funciones y constantes de Skolem

Para eliminar los cuantificadores existenciales de una fórmula en forma prenexa aplicamos las siguientes reglas:

- ▶ Por cada bloque del tipo $\exists xF(x)$ añadir una nueva constante c y reescribir como $F(c)$.
(se dice que $F(c)$ se obtiene a partir de la original introduciendo una **constante de Skolem**).
- ▶ Por cada bloque

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y F(x_1, \dots, x_n, y)$$

introducir un nuevo símbolo de función g (de aridad n), y reescribir como

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n F(x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n))$$

(se dice que la segunda fórmula se obtiene de la original introduciendo una **función de Skolem**).

Funciones y constantes de Skolem: Propiedades

Formas Prenex, de Skolem y Teorema de Herbrand

Teorema. La introducción de funciones y constantes de Skolem conserva la consistencia.

Es decir, dada una fórmula F , si F' se obtiene a partir de F introduciendo una función o una constante de Skolem, entonces,

$$F \text{ tiene un modelo} \iff F' \text{ tiene un modelo.}$$

Teorema. La introducción de funciones y constantes de Skolem, no aumenta el conocimiento deducible en el lenguaje original.

Es decir, si F es una fórmula cerrada de un lenguaje de primer orden L y F' se obtiene a partir de F introduciendo una función o una constante de Skolem, entonces para toda fórmula H del lenguaje L se tiene:

$$F' \models H \iff F \models H$$

Formas Prenex

Equivalencia lógica

Formas Prenex

Operaciones prenex

Esqueleto

Proposicional

Formas de Skolem

Forma clausal

Teorema de

Herbrand

Extensión de Herbrand

Teorema de Herbrand

Formas de Skolem

Definición. Sea L un LPO y F una fórmula cerrada de L . Una **forma de Skolem** de F es una fórmula universal G que se obtiene a partir de una forma prenexa de F mediante introducciones sucesivas de funciones o constantes de Skolem.

Teorema. Dado un conjunto $\Sigma = \{F_1, \dots, F_n\}$ de fórmulas cerradas de L , sea Σ' el conjunto formado por las fórmulas de Skolem de los elementos de Σ . Entonces,

- ▶ Σ tiene un modelo si y sólo si Σ' tiene un modelo.
- ▶ Para toda fórmula H del lenguaje L ,

$$\Sigma \models H \quad \Leftrightarrow \quad \Sigma' \models H$$

Ejemplo (I)

$$\forall x \exists y \exists z (P(y, x) \wedge P(z, y))$$

1. Dependencia de y con respecto a x : introducimos una función de skolem f_1 :

$$\forall x \exists z (P(f_1(x), x) \wedge P(z, f_1(x)))$$

2. Dependencia de z con respecto a x : introducimos una función de skolem f_2 :

$$\forall x (P(f_1(x), x) \wedge P(f_2(x), f_1(x)))$$

3. La fórmula universal

$$\forall x (P(f_1(x), x) \wedge P(f_2(x), f_1(x)))$$

es una **Forma de Skolem** de la fórmula inicial.

Ejemplo (II)

$$\exists x_1 \forall y_1 \exists z_2 \forall x_2 \exists y_2 ((x_1 + b = y_1) \rightarrow (x_2 \cdot y_2 = 0 + z_2))$$

1. $\forall y_1 \exists z_2 \forall x_2 \exists y_2 ((c_1 + b = y_1) \rightarrow (x_2 \cdot y_2 = 0 + z_2))$
[c nueva constante]

2. $\forall y_1 \forall x_2 \exists y_2 ((c_1 + b = y_1) \rightarrow (x_2 \cdot y_2 = 0 + f(y_1)))$
[f nuevo símbolo de función de aridad 1]

3. $\forall y_1 \forall x_2 ((c_1 + b = y_1) \rightarrow (x_2 \cdot g(y_1, x_2) = 0 + f(y_1)))$
[g nuevo símbolo de función de aridad 2]

4. **Forma de Skolem:**

$$\forall y_1 \forall x_2 ((c_1 + b = y_1) \rightarrow (x_2 \cdot g(y_1, x_2) = 0 + f(y_1)))$$

En el lenguaje $LO = \{<, =\}$

► $F \equiv \exists x \forall y (x < y \vee x = y)$

Forma de Skolem: $\forall y (c < y \vee c = y)$

► $F \equiv \forall x \forall z (x < z \rightarrow \exists y (x < y \wedge y < z))$

Forma de Skolem:

$$\forall x \forall z (x < z \rightarrow x < f(x, z) \wedge f(x, z) < z)$$

Cláusulas en LPO

- ▶ Una fórmula F es un **literal** si es una fórmula atómica o la negación de una fórmula atómica.
- ▶ Una **cláusula** es una disyunción de literales. Por tanto, es una fórmula abierta.
- ▶ Como en el caso de la lógica proposicional, identificaremos una cláusula con el conjunto de los literales que aparecen en ella.
- ▶ Denotaremos por \square a la cláusula vacía.
- ▶ Dada una fórmula F de L una forma clausal de F es un conjunto de cláusulas S (no necesariamente del lenguaje L) tal que

F tiene un modelo $\iff S$ tiene un modelo

Forma clausal

Para obtener una forma clausal de una fórmula $F(x_1, \dots, x_n)$ seguimos los siguientes pasos:

1. Obtener el cierre universal de $F(x_1, \dots, x_n)$. Es decir, la fórmula G dada por $\forall x_1 \dots \forall x_n F(x_1, \dots, x_n)$.
2. Obtener una forma de Skolem de G . Dicha forma de Skolem es una fórmula universal G_S .
3. Eliminar los cuantificadores universales de G_S . Así obtenemos una fórmula abierta H .
4. Obtener una forma normal conjuntiva de H (siguiendo el mismo procedimiento que en el caso proposicional). Dicha forma será

$$\bigwedge_{j=1}^n C_j$$

siendo cada C_j una cláusula (o disyunción de literales).

5. La forma clausal de F es el conjunto de cláusulas $S = \{C_1, \dots, C_n\}$.

Ejemplos

- ▶ $H(x, y) \rightarrow (u \neq z \rightarrow P(z, u))$

Forma normal conjuntiva

$$\neg H(x, y) \vee u = z \vee P(z, u)$$

Forma clausal

$$\{\{\neg H(x, y), u = z, P(z, u)\}\}$$

- ▶ $x < z \rightarrow (x < y \wedge y < z)$

Forma normal conjuntiva

$$((\neg(x < z) \vee x < y) \wedge (\neg(x < z) \vee y < z))$$

Forma clausal

$$\{\{\neg(x < z), x < y\}, \{\neg(x < z), y < z\}\}$$

Forma clausal de un conjunto de fórmulas

- ▶ Una forma clausal de un conjunto Γ es un conjunto de cláusulas S tal que

$$\Gamma \text{ tiene un modelo} \Leftrightarrow S \text{ tiene un modelo}$$

- ▶ Si $\Gamma = \{F_1, \dots, F_n\}$ es un conjunto de fórmulas podemos obtener una forma clausal de Γ calculando, por el método anterior, una forma clausal S_j para cada elemento F_j de Γ . La forma clausal de Γ es entonces el conjunto de cláusulas:

$$S = S_1 \cup \dots \cup S_n$$

Ejemplos

- ▶ $\forall x[\forall y H(x, y) \rightarrow \exists z\forall u(u \neq z \rightarrow P(z, u))]$
 1. $\forall x\exists y [H(x, y) \rightarrow \exists z\forall u(u \neq z \rightarrow P(z, u))]$
 2. $\forall x\exists y\exists z\forall u[H(x, y) \rightarrow (u \neq z \rightarrow P(z, u))]$
 3. $\forall x\exists z\forall u [H(x, f_1(x)) \rightarrow (u \neq z \rightarrow P(z, u))]$
 4. $\forall x\forall u[H(x, f_1(x)) \rightarrow (u \neq f_2(x) \rightarrow P(f_2(x), u))]$

Forma clausal:

$$\{\{\neg H(x, f_1(x)), u = f_2(x), P(f_2(x), u)\}\}$$

- ▶ $\forall x\forall z(x < z \rightarrow \exists y(x < y \wedge y < z))$

Forma clausal

$$\{\{\neg(x < z), x < f(x, z)\}, \{\neg(x < z), f(x, z) < z\}\}$$

Extensión de Herbrand

Sea Γ un conjunto de fórmulas de un lenguaje L .

- ▶ El cálculo de formas de Skolem reduce la consistencia de Γ a la consistencia de un conjunto Σ de fórmulas abiertas (de hecho, cláusulas) en un nuevo lenguaje L' (que extiende a L con nuevos símbolos).
- ▶ Es posible dar un paso más y reducir la consistencia de Γ a la consistencia de un conjunto de fórmulas abiertas y cerradas.
 - ▶ Una fórmula abierta y cerrada puede identificarse con su esqueleto proposicional y, por tanto, considerarse una fórmula proposicional.

Definición. Sea Σ un conjunto de fórmulas abiertas. La **extensión de Herbrand** de Σ , es el conjunto, $EH(\Sigma)$, formado por todas las fórmulas cerradas que pueden obtenerse sustituyendo, de todas las formas posibles, las variables de las fórmulas de Σ por términos cerrados.

Teorema de Herbrand

Teorema. Sea Σ un conjunto de fórmulas abiertas.

Son equivalentes:

1. Σ tiene un modelo.
2. $EH(\Sigma)$ tiene un modelo.
3. $EH(\Sigma)$ es satisfactible proposicionalmente.

Es decir, si identificamos cada fórmula de $EH(\Sigma)$ con su esqueleto proposicional, entonces el conjunto de fórmulas proposicionales así obtenido es satisfactible.

Observaciones.

- ▶ Este resultado reduce la consistencia de Σ a la de un conjunto de fórmulas proposicionales: $EH(\Sigma)$.
- ▶ $EH(\Sigma)$ puede ser un conjunto **infinito**. Sin embargo:

Teorema. (Compacidad) Si $EH(\Sigma)$ es inconsistente, entonces existe un subconjunto finito Σ_0 de $EH(\Sigma)$ que es inconsistente.

Ejemplo

$\Sigma = \{p(x) \rightarrow p(f(f(x))), \neg p(f(f(f(x))))\}, p(f(a))\}$ es inconsistente.

- Su extensión de Herbrand $EH(\Sigma)$ contiene, entre otras, las fórmulas

1. $p(f(a))$
 2. $p(a) \rightarrow p(f(f(a)))$ $[\{x/a\}]$
 3. $\neg p(f(f(f(a))))$ $[\{x/a\}]$
 4. $p(f(a)) \rightarrow p(f(f(f(a))))$ $[\{x/f(a)\}]$
 5. $\neg p(f(f(f(f(a)))))$ $[\{x/f(a)\}]$
 6. $p(f(f(a))) \rightarrow p(f(f(f(f(a)))))$ $[\{x/f(f(a))\}]$
 7. $\neg p(f(f(f(f(f(a))))))$ $[\{x/f(f(a))\}]$
- ⋮

- El subconjunto de $EH(\Sigma)$ formado por las fórmulas 1, 3 y 4 es inconsistente.