Ejercicio 87. Determina, por resolución, la validez de las fórmulas:

1. $\exists x\,[P(x) \to P(a)] \wedge [P(x) \to P(b)]$
2. $\forall z\,[Q(z) \to P(z)] \to \exists x\,[Q(x) \to P(a)] \wedge [Q(x) \to P(b)]$
3. $\exists x\,\exists y\,[P(f(x)) \wedge Q(f(b))] \to [P(f(a)) \wedge P(y) \wedge Q(y)]$
4. $\exists x\,\forall y\,P(x,y) \to \forall y\,\exists x\,P(x,y)$
5. $\forall x\,[P(x) \wedge [Q(a) \vee Q(b)]] \to \exists x\,[P(x) \wedge Q(x)]$

F válida $\Leftrightarrow \neg F$ insatisfactible

(2) $\neg\left(\forall z\,(Q(z)\to P(z)) \to \exists x\,((Q(x)\to P(a)) \wedge (Q(x)\to P(b)))\right)$

Prenex : $\forall z\,\forall x\,\neg\left[(Q(z)\to P(z)) \to ((Q(x)\to P(a)) \wedge (Q(x)\to P(b)))\right]$

Skolem : ya está (no hay existenciales)

Clausal : $\neg\left[(Q(z)\to P(z)) \to ((Q(x)\to P(a)) \wedge (Q(x)\to P(b)))\right] \equiv$

$\equiv (Q(z)\to P(z)) \wedge \neg((Q(x)\to P(a)) \wedge (Q(x)\to P(b))) \equiv$

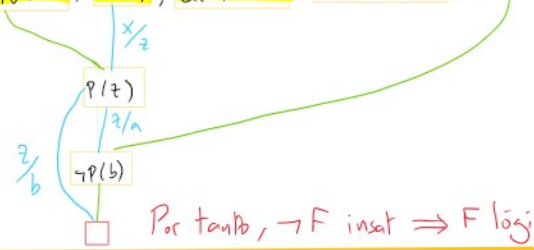
$\equiv (\neg Q(z) \vee P(z)) \wedge \left[\neg(Q(x)\to P(a)) \vee \neg(Q(x)\to P(b))\right] \equiv$

$\equiv \underbrace{(\neg Q(z) \vee P(z))}_{C_1} \wedge \underbrace{\left[(Q(x)\wedge\neg P(a)) \vee (Q(x)\wedge\neg P(b))\right]}$

$\underbrace{Q(x)}_{C_2} \wedge \underbrace{(Q(x)\vee\neg P(b))}_{C_3} \wedge \underbrace{(\neg P(a)\vee Q(x))}_{C_4} \wedge \underbrace{(\neg P(a)\vee\neg P(b))}_{C_5}$

Resolución

$\{\neg Q(z)\vee P(z),\ Q(x),\ Q(x)\wedge\neg P(b),\ \neg P(a)\vee Q(x),\ \neg P(a)\vee\neg P(b)\}$



Por tanto, $\neg F$ insat $\Rightarrow$ F lógicamente válida

(5) $\neg\left(\forall x\,(P(x) \wedge (Q(a)\vee Q(b))) \to \exists x\,(P(x)\wedge Q(x))\right)$

Prenex : $\neg\left(\forall x_1\,(P(x_1) \wedge (Q(a)\vee Q(b))) \to \exists x_2\,(P(x_2)\wedge Q(x_2))\right)$

$\forall x_1\,\forall x_2\,\neg\left((P(x_1) \wedge (Q(a)\vee Q(b))) \to (P(x_2)\wedge Q(x_2))\right)$

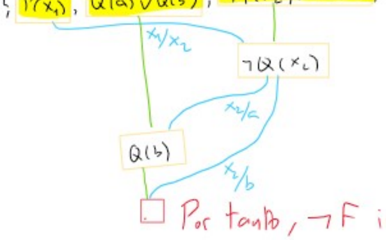
Skolem : ya está

Clausal : $\neg\left((P(x_1) \wedge (Q(a)\vee Q(b))) \to (P(x_2)\wedge Q(x_2))\right)$

$\underbrace{P(x_1)}_{C_1} \wedge \underbrace{(Q(a)\vee Q(b))}_{C_2} \wedge \underbrace{\neg(P(x_2)\wedge Q(x_2))}_{\underbrace{(\neg P(x_2)\vee\neg Q(x_2))}_{C_3}}$

Resolución

$\{P(x_1),\ Q(a)\vee Q(b),\ \neg P(x_2)\vee\neg Q(x_2)\}$



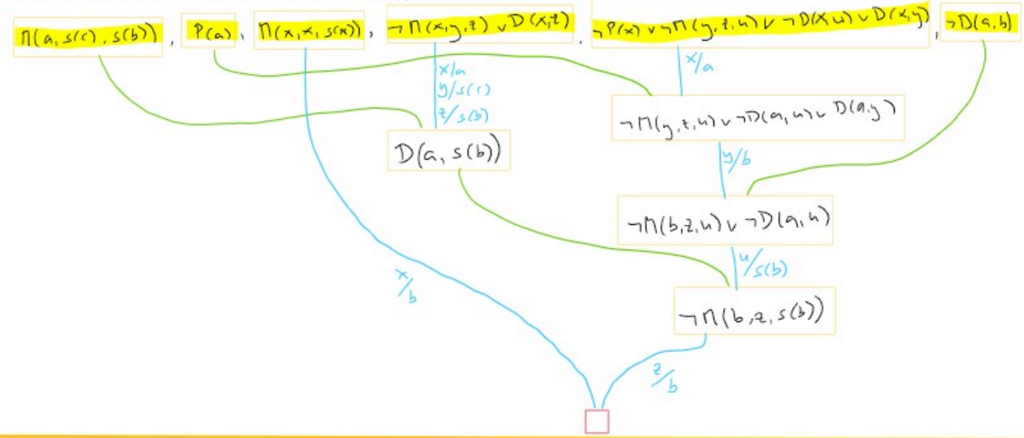
Por tanto, $\neg F$ insat $\Rightarrow$ F lógicamente válida

Ejercicio 88.– Determina la consistencia de los conjuntos de cláusulas:

1. $\{Q(u) \vee P(a),\ \neg Q(w) \vee P(w),\ \neg Q(x) \vee \neg P(x)\}$
2. $\{Q(u) \vee P(a),\ \neg Q(w) \vee P(w),\ \neg Q(x) \vee \neg P(x),\ Q(y) \vee \neg P(y)\}$
3. $\{I(a),\ \neg R(x) \vee L(x),\ \neg D(y) \vee \neg L(y),\ D(a)\}$
4. $\{I(a),\ \neg R(x) \vee L(x),\ \neg D(y) \vee \neg L(y),\ D(a),\ \neg I(z) \vee R(z)\}$
5. $\{\neg P(x,y) \vee \neg P(y,z) \vee P(x,z),\ P(a,x),\ P(x,b),\ P(x,f(x))\}$
6. $\{M(a,s(c),s(b)),\ P(a),\ M(x,x,s(x)),\ \neg M(x,y,z) \vee D(x,z),$ $\neg P(x) \vee \neg M(y,z,u) \vee \neg D(x,u) \vee D(x,y),\ \neg D(a,b)\}$

Σ incons. $\Longleftrightarrow \Sigma \vdash_r \square$

6



Ejercicio 89.– Determina los problemas de deducción:

1. $\{\forall x[P(x) \to \exists y[R(y) \wedge Q(x,y)]],\ \exists x[P(x)]\} \models \exists x \exists y\, Q(x,y)$
2. $\{\neg A(x) \vee F(x) \vee G(f(x)),\ \neg F(x) \vee B(x),\ \neg F(x) \vee C(x),\ \neg G(x) \vee B(x),$ $\neg G(x) \vee D(x),\ A(g(x)) \vee F(h(x))\} \models \exists x \exists y\, [[B(x) \wedge C(x)] \vee [D(y) \wedge B(y)]]$
3. $\{\exists x \forall y\, \neg P(y,x),\ \forall z \exists y \forall x\, [P(x,y) \leftrightarrow [P(x,z) \wedge \neg P(x,y)]]\} \models \forall x \forall y\, \neg P(y,x)$
4. $\{\exists x \forall y\, P(x,y),\ \forall x \forall y\, [P(x,y) \to \neg P(y,x)]\} \models \forall x \exists y\, P(x,y)$
5. $\{\forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \forall w\, [P(x,y,u) \wedge P(y,z,v) \wedge P(x,v,w) \to P(u,z,w)],$

   $\forall x \forall y \exists z\, P(z,x,y),\ \forall x \forall y \exists z\, P(x,z,y)\} \models \exists x \forall y\, P(y,x,y)$

$\Sigma \models F \Leftrightarrow \Sigma \cup \{\neg F\}$ incons $\Leftrightarrow \Sigma \cup \{\neg F\} \vdash_r \square$

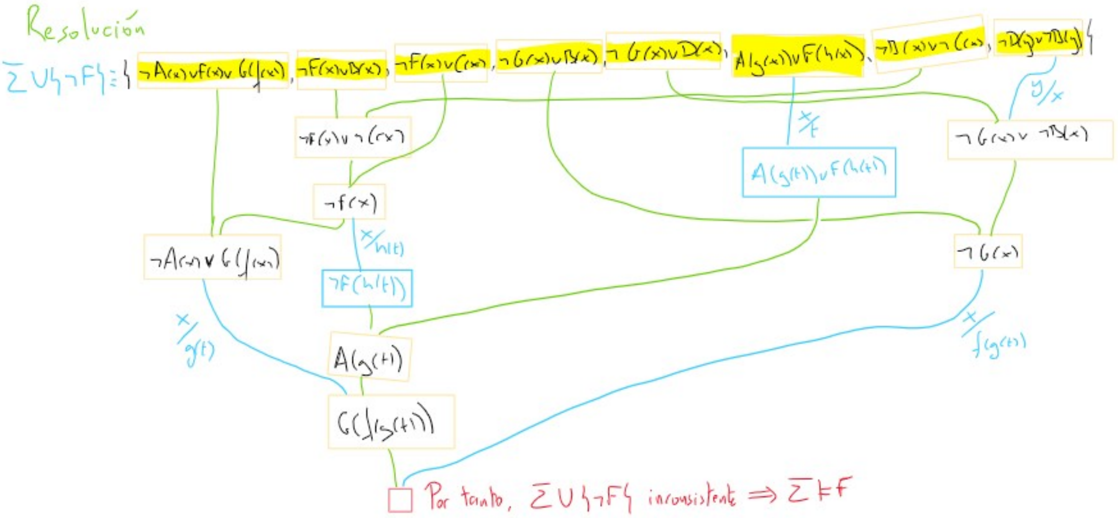
2

$F: \exists x \exists y\, [(B(x) \wedge C(x)) \vee (D(y) \wedge B(y))]$

$\neg F: \forall x \forall y\, [(\neg B(x) \vee \neg C(x)) \wedge (\neg D(y) \vee \neg B(y))]$

Clausal $\neg F$: $\{\neg B(x) \vee \neg C(x),\ \neg D(y) \vee \neg B(y)\}$

Resolución



□ Por tanto, $\Sigma \cup \{\neg F\}$ inconsistente $\Rightarrow \Sigma \models F$

Ejercicio 91.– Sabemos que

1. Existen pacientes a quienes les gustan todos los médicos.
2. A ningún paciente le gusta ningún curandero

Con los predicados $P(x)$ = "x es un paciente", $M(x)$ = "x es un médico", $C(x)$ = "x es un curandero", y $G(x,y)$ = "a x le gusta y", expresar los conocimientos anteriores en forma de cláusulas y, por resolución, demostrar que ningún médico es curandero.

Formalización $F_1 \equiv \exists x\,(P(x) \wedge \forall y\,(M(y) \to G(x,y)))$

$F_2 \equiv \neg \exists x\,(P(x) \wedge \exists y\,(C(y) \wedge G(x,y)))$

$\forall x \forall y\,(P(x) \wedge C(y) \to \neg G(x,y)) \equiv$ otra forma equivalente

$\Sigma = \{F_1, F_2\} \overset{?}{\models} \forall x\,(M(x) \to \neg C(x)) \equiv F$

Pasar a forma clausal Σ y $\neg F$:

$\boxed{F_1}$ Prenex : $\exists x \forall y\,(P(x) \wedge (M(y) \to G(x,y)))$

Skolem : $\forall y\,(P(a) \wedge (M(y) \to G(a,y)))$ a nueva cte

Clausal : $\{P(a),\ \neg M(y) \vee G(a,y)\}$

$\boxed{F_2}$ Prenex : $\forall x \forall y\,(P(x) \wedge C(y) \to \neg G(x,y))$

Skolem : ya está

Clausal : $\{\neg P(x) \vee \neg C(y) \vee \neg G(x,y)\}$

$\boxed{\neg F}$ $\neg \forall x\,(M(x) \to \neg C(x))$

Prenex : $\exists x\, \neg (M(x) \to \neg C(x))$

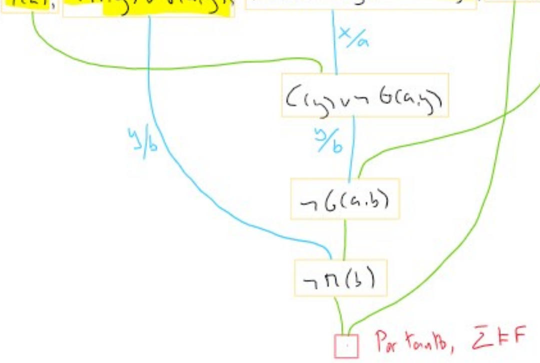
Skolem : $\neg (M(b) \to \neg C(b))$ b nueva cte

Clausal : $M(b) \wedge C(b)$

$\{M(b),\ C(b)\}$

Resolución

$\Sigma \cup \{\neg F\} = \{P(a),\ \neg M(y) \vee G(a,y),\ \neg P(x) \vee \neg C(y) \vee \neg G(x,y),\ M(b),\ C(b)\}$



Ejercicio 94.– Sabemos que

1. Todos los pasajeros que no eran VIP's fueron registrados por algún aduanero.
2. Algunos pasajeros eran narcotraficantes, y fueron registrados sólo por narcotraficantes.
3. Ningún narcotraficante era VIP.

Con los predicados $P(x)$ = "x es pasajero", $V(x)$ = "x es VIP", $A(x)$ = "x es aduanero", $N(x)$ = "x es narcotraficante", y $R(x, y)$ = "x es registrado por y", expresa los conocimientos anteriores en forma de cláusulas y, por resolución, demuestra que algún aduanero es narcotraficante.

Formalización $F_1 \equiv \forall x(P(x) \land \neg V(x) \rightarrow \exists y(A(y) \land R(x,y)))$

$F_2 \equiv \exists x(P(x) \land N(x) \land \forall y(R(x,y) \rightarrow N(y)))$

$F_3 \equiv \forall x(N(x) \rightarrow \neg V(x))$ también: $\neg\exists x(N(x) \land V(x))$

$\Sigma : \{F_1, F_2, F_3\} \overset{?}{\models} F \equiv \exists x(A(x) \land N(x))$

Pasar a forma clausal Σ y $\neg F$

$\boxed{F_1}$ Prenex: $\forall x \exists y(P(x) \land \neg V(x) \rightarrow A(y) \land R(x,y))$

Skolem: $\forall x(P(x) \land \neg V(x) \rightarrow A(f(x)) \land R(x, f(x)))$ f nueva función

Clausal: $\neg(P(x) \land \neg V(x)) \lor (A(f(x)) \land R(x, f(x)))$

$(\neg P(x) \lor V(x)) \lor (A(f(x)) \land R(x, f(x)))$

$\{\neg P(x) \lor V(x) \lor A(f(x)), \neg P(x) \lor V(x) \lor R(x, f(x))\}$

$\boxed{F_2}$ Prenex: $\exists x \forall y(P(x) \land N(x) \land (R(x,y) \rightarrow N(y)))$

Skolem: $\forall y(P(a) \land N(a) \land (R(a,y) \rightarrow N(y)))$ a nueva ct

Clausal: $\{P(a), N(a), \neg R(a,y) \lor N(y)\}$

$\boxed{F_3}$ Prenex: $\forall x(N(x) \rightarrow \neg V(x))$

Skolem: Ya está

Clausal: $\{\neg N(x) \lor \neg V(x)\}$

$\boxed{\neg F}$ $\neg\exists x(A(x) \land N(x))$

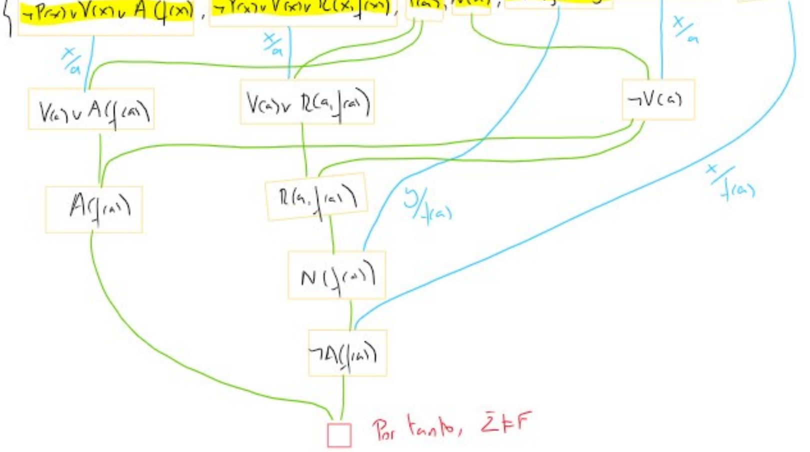
Prenex: $\forall x \neg(A(x) \land N(x))$

Skolem: Ya está

Clausal: $\{\neg A(x) \lor \neg N(x)\}$

Resolución

$\Sigma \cup \{\neg F\} : \{\neg P(x) \lor V(x) \lor A(f(x)), \neg P(x) \lor V(x) \lor R(x, f(x)), P(a), N(a), \neg R(a,y) \lor N(y), \neg N(x) \lor \neg V(x), \neg A(x) \lor \neg N(x)\}$



Por tanto, $\Sigma \models F$

Ejercicio 92. Sabemos que:

1. Los aficionados a la música son cultos.
2. A algunos cultos les gusta el fútbol.
3. Los aficionados a todo no son cultos.
4. Los aficionados al fútbol, pero no a la música, no son cultos.

m : música, f : fútbol } constantes

Con los predicados $AF(x, y)$ = "x es aficionado a y" y $CU(x)$ = "x es culto", prueba por resolución que hay a quien le gusta la música y el fútbol.

Formalización

$F_1 \equiv \forall x\,(AF(x,m) \to Cu(x))$

$F_2 \equiv \exists x\,(Cu(x) \land AF(x,f))$

$F_3 \equiv \forall x\,(\forall y\, AF(x,y) \to \neg Cu(x))$

$F_4 \equiv \forall x\,(AF(x,f) \land \neg AF(x,m) \to \neg Cu(x))$

$\Sigma = \{F_1, F_2, F_3, F_4\} \overset{?}{\models} F \equiv \exists x\,(AF(x,m) \land AF(x,f))$

Pasar a forma clausal Σ y $\neg F$

$\boxed{F_1}$ Prenex : Ya está en forma prenex

Skolem : Ya está en forma skolem

Clausal : $\{\neg AF(x,m) \lor Cu(x)\}$

$\boxed{F_2}$ Prenex : Ya

Skolem : $Cu(a) \land AF(a,f)$ a nueva cte

Clausal : $\{Cu(a),\ AF(a,f)\}$

$\boxed{F_3}$ Prenex : $\forall x \exists y\,(AF(x,y) \to \neg Cu(x))$

Skolem : $\forall x\,(AF(x,g(x)) \to \neg Cu(x))$ g nueva función

Clausal : $\{\neg AF(x,g(x)) \lor \neg Cu(x)\}$

$\boxed{F_4}$ Prenex : Ya

Skolem : Ya

Clausal : $\{\neg AF(x,f) \lor AF(x,m) \lor \neg Cu(x)\}$

$\boxed{\neg F}$ $\neg\exists x\,(AF(x,m) \land AF(x,f))$

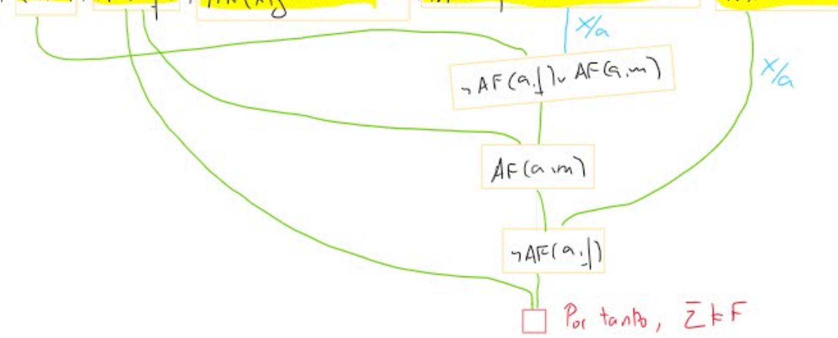
Prenex : $\forall x\, \neg(AF(x,m) \land AF(x,f))$

Skolem : Ya

Clausal : $\{\neg AF(x,m) \lor \neg AF(x,f)\}$

Resolución

$\Sigma \cup \{\neg F\} = \{\neg AF(x,m) \lor Cu(x),\ Cu(a),\ AF(a,f),\ \neg AF(x,g(x)) \lor \neg Cu(x),\ \neg AF(x,f) \lor AF(x,m) \lor \neg Cu(x),\ \neg AF(x,m) \lor \neg AF(x,f)\}$



Por tanto, $\Sigma \models F$