

# Tema 8: Programación lógica con restricciones

José A. Alonso Jiménez

Jose-Antonio.Alonso@cs.us.es

<http://www.cs.us.es/~jalonso>

Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

# Sistemas de programación lógica con restricciones

- Descripción del sistema que usaremos en el tema
  - ECLiPSe (ECLiPSe Common Logic Programming System)
  - es un sistema basado en Prolog
  - su objetivo es de servir como plataforma para integrar varias extensiones de la programación lógica, en particular la programación lógica con restricciones (CLP)
  - Llamada al sistema
    - > eclipse
    - ECLiPSe Constraint Logic Programming System [kernel]
    - Copyright Imperial College London and ICL
    - Certain libraries copyright Parc Technologies Ltd
    - GMP library copyright Free Software Foundation
    - Version 5.7 #28, Mon Dec 22 00:13 2003

# CLP sobre números reales: CLP(R)

- **Uso de la biblioteca CLP(R)**

```
[eclipse 1]: lib(clpr).  
Yes (0.32s cpu)
```

- **Diferencia entre objetivo y restricción:**

```
[eclipse 2]: 1+X=5.  
No (0.00s cpu)
```

```
[eclipse 3]: {1+X=5}.  
X = 4.0  
Yes (0.00s cpu)
```

- **Restricciones aritméticas:**

- $\langle \text{restricciones} \rangle := \{ \langle \text{restricción 1} \rangle, \langle \text{restricción 2} \rangle, \dots \}$
- $\langle \text{restricción} \rangle := \langle \text{expresión 1} \rangle \langle \text{operador} \rangle \langle \text{expresión 2} \rangle$   
 $\langle \text{expresión 1} \rangle$  y  $\langle \text{expresión 2} \rangle$  son expresiones aritméticas  
 $\langle \text{operador} \rangle$  es uno de los siguientes: =, =\=, <, =<, >, >=

# CLP sobre números reales: CLP(R)

- Ejemplo de programa en Prolog y en CLP(R)

- Especificación:

convierte(-C,+F) se verifica si C son los grados centígrados correspondientes a F grados Fahrenheit; es decir,  $C = \frac{(F-32)*5}{9}$ .

- Programa Prolog

```
convierte_1(C,F) :-  
    C is (F-32)*5/9.
```

- Sesión con el programa Prolog

```
[eclipse 4]: convierte_1(C,95).  
C = 35  
Yes (0.00s cpu)
```

```
[eclipse 5]: convierte_1(35,F).  
instantiation fault in -(F, 32, _192) in module eclipse  
Abort
```

# CLP sobre números reales: CLP(R)

- Programa CLP(R)

```
:- lib(clpr).
```

```
convierte_2(C,F) :-  
    {C = (F-32)*5/9}.
```

- Sesión con el programa CLP(R)

```
[eclipse 6]: convierte_2(C,95).  
C = 35.0  
Yes (0.00s cpu)
```

```
[eclipse 7]: convierte_2(35,F).  
F = 95.0  
Yes (0.00s cpu)
```

```
[eclipse 8]: convierte_2(C,F).  
% Linear constraints:  
{F = 32.0 + 1.7999999999999998 * C}  
Yes (0.00s cpu)
```

# CLP sobre números reales: CLP(R)

- Ejemplo de ecuaciones e inecuaciones:

```
[eclipse 9]: {3*X-2*Y=6, 2*Y=X}.
```

```
Y = 1.5
```

```
X = 3.0
```

```
Yes (0.00s cpu)
```

```
[eclipse 10]: {Z=<X-2, Z=<6-X, Z+1=2}.
```

```
X = X
```

```
Z = 1.0
```

```
% Linear constraints:
```

```
{X =< 5.0, X >= 3.0}
```

```
Yes (0.00s cpu)
```

```
[eclipse 11]: {X>0, X+2<0}.
```

```
No (0.00s cpu)
```

# CLP sobre números reales: CLP(R)

- Optimización con minimize/1 y maximize/1:

```
[eclipse 12]: {X=<5}, maximize(X).
```

```
X = 5.0
```

```
Yes (0.00s cpu)
```

```
[eclipse 13]: {X=<5, 2=<X}, minimize(2*X+3).
```

```
X = 2.0
```

```
Yes (0.00s cpu)
```

```
[eclipse 14]: {3=<X, X+1=<Y+2, Y=<9, Z=X+Y}, minimize(Z).
```

```
X = 3.0
```

```
Y = 2.0
```

```
Z = 5.0
```

```
Yes (0.00s cpu)
```

```
[eclipse 15]: {X+Y=<4}, maximize(X+Y).
```

```
% Linear constraints: {Y = 4.0 - X}
```

```
Yes (0.00s cpu)
```

```
[eclipse 16]: {X=<5}, minimize(X).
```

```
No (0.00s cpu)
```

## CLP sobre números reales: CLP(R)

- Optimización con  $\text{sup}/2$  e  $\text{inf}/2$ :

```
[eclipse 17]: {2=<X, X=<5}, inf(X,I), sup(X,S).
```

```
I = 2.0
```

```
X = X
```

```
S = 5.0
```

```
% Linear constraints:
```

```
{X =< 5.0, X >= 2.0}
```

```
Yes (0.00s cpu)
```

```
[eclipse 18]: {3=<X, X+1=<Y+2, Y=<9, Z=X+Y}, inf(Z,I), sup(Z,S), minimize(Z).
```

```
X = 3.0
```

```
Y = 2.0
```

```
I = 5.0
```

```
S = 19.0
```

```
Z = 5.0
```

```
Yes (0.00s cpu)
```



## CLP sobre números reales: CLP(R)

- Planificación de tareas:

- Problema: Calcular el menor tiempo necesario para realizar las tareas A, B, C y D teniendo en cuenta que los tiempos empleados en cada una son 2, 3, 5 y 4, respectivamente, y además que A precede a B y a C y que B precede a D.

- Plan óptimo:

```
[eclipse 19]: {Ta>=0, Ta+2=<Tb, Ta+2=<Tc, Tb+3=<Td, Tc+5=<Tf, Td+4=<Tf},  
              minimize(Tf).
```

```
Ta = 0.0
```

```
Tb = 2.0
```

```
Tc = Tc
```

```
Td = 5.0
```

```
Tf = 9.0
```

```
% Linear constraints:
```

```
{Tc =< 4.0, Tc >= 2.0}
```

```
Yes (0.01s cpu)
```

# CLP sobre números reales: CLP(R)

- Sucesión de Fibonacci:

- Especificación:

`fib(+N,-F)` se verifica si `F` es el `N`-ésimo término de la sucesión de Fibonacci; es decir, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

- Programa Prolog

```
fib_1(N,F) :-  
    ( N=0, F=1  
    ; N=1, F=1  
    ; N>1,  
      N1 is N-1, fib_1(N1,F1),  
      N2 is N-2, fib_1(N2,F2),  
      F is F1+F2 ).
```

- Sesión con el programa Prolog

```
[eclipse 20]: fib_1(6,F).  
F = 13  
Yes (0.00s cpu, solution 1, maybe more) ?  
[eclipse 21]: fib_1(N,13).  
instantiation fault in N > 1 in module eclipse  
Abort
```

# CLP sobre números reales: CLP(R)

- Programa CLP(R)

```
:- lib(clpr).
```

```
fib_2(N,F) :-  
    ( {N=0, F=1}  
    ; {N=1, F=1}  
    ; {N>1, F=F1+F2, N1=N-1, N2=N-2},  
      fib_2(N1,F1),  
      fib_2(N2,F2) ).
```

- Sesión con el programa CLP(R)

```
[eclipse 22]: fib_2(6,F).
```

```
F = 13.0
```

```
Yes (0.01s cpu, solution 1, maybe more) ?
```

```
[eclipse 23]: fib_2(N,13).
```

```
N = 6.0
```

```
Yes (0.02s cpu, solution 1, maybe more) ?
```

```
[eclipse 24]: fib_2(N,4).
```

```
interruption: type a, b, c, e, or h for help : ? a
```

```
abort
```

```
Aborting execution ...
```

```
Abort
```

# CLP sobre números reales: CLP(R)

- Modificación de `fib_2` para determinar los números que no son términos de la sucesión

```
fib_3(N,F) :-  
    ( {N=0, F=1}  
      ; {N=1, F=1}  
      ; {N>1, F=F1+F2, N1=N-1, N2=N-2, F1>=N1, F2>=N2},  
        fib_3(N1,F1),  
        fib_3(N2,F2) ).
```

- Sesión

```
[eclipse 25]: fib_3(6,F).  
F = 13.0  
Yes (0.02s cpu, solution 1, maybe more) ?  
[eclipse 25]: fib_3(N,13).  
N = 6.0  
Yes (0.04s cpu, solution 1, maybe more) ?  
[eclipse 27]: fib_3(N,4).  
No (0.01s cpu)
```

## CLP sobre números racionales: CLP(Q)

- CLP sobre números racionales: CLP(Q)

```
[eclipse 1]: lib(clpq).  
Yes (0.66s cpu)
```

```
[eclipse 2]: {X=2*Y, Y=1-X}.  
Y = 1 / 3  
X = 2 / 3  
Yes (0.00s cpu)
```

## Planificación de tareas con CLP(Q)

- Especificación de un problema mediante tareas y precede
  - `tareas(+LTD)` se verifica si LTD es la lista de los pares T/D de las tareas y sus duraciones.  
`tareas([t1/5,t2/7,t3/10,t4/2,t5/9]).`
  - `precede(+T1,+T2)` se verifica si la tarea T1 tiene que preceder a la T2.  
`precede(t1,t2).`  
`precede(t1,t4).`  
`precede(t2,t3).`  
`precede(t4,t5).`

# Planificación de tareas con CLP(Q)

- Planificador

- Biblioteca CLP(Q)

```
:- lib(clpq).
```

- `planificación(P,TP)` se verifica si `P` es el plan (esto es una lista de elementos de la forma `tarea/inicio/duración`) para realizar las tareas en el menor tiempo posible y `TP` es dicho tiempo. Por ejemplo,

```
[eclipse 3]: planificación(P,TP).  
P = [t1/0/5, t2/5/7, t3/12/10, t4/I/2, t5/I/9]  
TP = 22  
% Linear constraints:  
{ I =< 13, I >= 5, I - I >= 2 }  
Yes (0.01s cpu)
```

```
planificación(P,TP) :-  
    tareas(LTD),  
    restricciones(LTD,P,TP),  
    minimize(TP).
```

## Planificación de tareas con CLP(Q)

- `restricciones(LTD,P,TP)` se verifica si `P` es un plan para realizar las tareas de `LTD` cumpliendo las restricciones definidas por precedencia/2 y `TP` es el tiempo que se necesita para ejecutar el plan `P`.

```
restricciones([],[],_TP).
restricciones([T/D | RLTD],[T/I/D | RTID],TP) :-
    {I >= 0, I + D =< TP},
    restricciones(RLTD,RTID,TP),
    restricciones_aux(T/I/D,RTID).
```

- `restricciones_aux(TID,LTID)` se verifica si el triple tarea–inicio–duración `TID` es consistente con la lista de triples tarea–inicio–duración `LTID`.

```
restricciones_aux(_,[]).
restricciones_aux(T/I/D, [T1/I1/D1 | RTID]) :-
    ( precede(T,T1),!,{I+D =< I1}
    ; precede(T1,T),!,{I1+D1 =< I}
    ; true ),
    restricciones_aux(T/I/D,RTID).
```



# Restricciones sobre dominios finitos: CLP(FD)

- Restricciones de dominio y aritméticas

- Ejemplos:

```
[eclipse 1]: lib(fd).
```

```
[eclipse 2]: X :: 1..5, Y :: 0..4, X #< Y, Z #= X+Y+1.
```

```
Z = Z{[4..8]}    X = X{[1..3]}    Y = Y{[2..4]}
```

```
Delayed goals:  Y{[2..4]} - X{[1..3]}#>=1
```

```
                -1 - X{[1..3]} - Y{[2..4]} + Z{[4..8]}#=0
```

```
[eclipse 3]: [X,Y] :: 1..3, Z #=X+Y.
```

```
Z = Z{[2..6]}    X = X{[1..3]}    Y = Y{[1..3]}
```

```
Delayed goals:  0 - X{[1..3]} - Y{[1..3]} + Z{[2..6]}#=0
```

- Tipos de restricciones

- \* de dominio de variables: <variable> :: <Mínimo>..<Máximo>

- \* de dominio de lista: <lista> :: <Mínimo>..<Máximo>

- \* aritmética: <expresión 1> <relación> <expresión 2> con <relación> en  
#=, #\=, #<, #>, #=<, #>=.

# Restricciones sobre dominios finitos: CLP(FD)

- Relaciones de enumeración:

- `indomain(X)` asigna un valor a la variable de dominio acotado `X`, en orden creciente.

Por ejemplo,

```
[eclipse 4]: X :: 1..3, indomain(X).  
X = 1    Yes (0.00s cpu, solution 1, maybe more) ? ;  
X = 2    Yes (0.01s cpu, solution 2, maybe more) ? ;  
X = 3    Yes (0.01s cpu, solution 3)
```

- `labeling(L)` se verifica si existe una asignación que verifica las restricciones de las variables de la lista `L`. Por ejemplo,

```
[eclipse 5]: L=[X,Y], L :: 1..2, labeling(L).  
X = 1    Y = 1    L = [1, 1]    Yes (0.00s cpu, solution 1, maybe more) ? ;  
X = 1    Y = 2    L = [1, 2]    Yes (0.00s cpu, solution 2, maybe more) ? ;  
X = 2    Y = 1    L = [2, 1]    Yes (0.00s cpu, solution 3, maybe more) ? ;  
X = 2    Y = 2    L = [2, 2]    Yes (0.00s cpu, solution 4)
```

- `alldifferent(L)` se verifica si todos las variables de la lista `L` tienen valores distintos.

Por ejemplo,

```
[eclipse 5]: L=[X,Y], L :: 1..2, alldifferent(L), labeling(L).  
X = 1    Y = 2    L = [1, 2]    Yes (0.00s cpu, solution 1, maybe more) ? ;  
X = 2    Y = 1    L = [2, 1]    Yes (0.00s cpu, solution 2)
```

# Restricciones sobre dominios finitos: CLP(FD)

- Problema de criptoaritmética

- Especificación: solución([S,E,N,D],[M,O,R,E],[M,O,N,E,Y]) se verifica si cada una de las letras se sustituye por un dígito distinto de forma que SEND+MORE=MONEY.

- Programa

```
:- lib(fd).

solución([S,E,N,D],[M,O,R,E],[M,O,N,E,Y]) :-
    Vars = [S,E,N,D,M,O,R,E,Y], Vars :: 0..9,
    alldifferent(Vars),
    1000*S+100*E+10*N+D
    + 1000*M+100*O+10*R+E #=
    10000*M+1000*O+100*N+10*E+Y,
    M #\= 0, S #\= 0,
    labeling(Vars).
```

- Solución

```
[eclipse 6]: solución(L1,L2,L3).
L1 = [9,5,6,7]   L2 = [1,0,8,5]   L3 = [1,0,6,5,2]
Yes (0.00s cpu, solution 1, maybe more) ? ;
No (0.00s cpu)
```

# Restricciones sobre dominios finitos: CLP(FD)

- Problema de las N reinas

- solución(N,L) se verifica si L es una solución del problema de las N reinas. Por ejemplo,

```
[eclipse 7]: solución(4,L).
L = [2, 4, 1, 3]   Yes (0.00s cpu, solution 1, maybe more) ? ;
L = [3, 1, 4, 2]   Yes (0.00s cpu, solution 2, maybe more) ? ;
No (0.00s cpu)
[eclipse 8]: findall(L,solución(8,L),LS), length(LS,N).
N = 92
Yes (0.02s cpu)
```

```
:- lib(fd).
```

```
solución(N,L) :-
    length(L,N),           % Hay N reinas
    L :: 1..N,             % Las ordenadas están en el intervalo 1..N
    alldifferent(L),       % Las ordenadas son distintas (distintas filas)
    segura(L),             % No hay en más de una en las diagonales
    labeling(L) .         % Buscar los valores de L
```

## Restricciones sobre dominios finitos: CLP(FD)

- `segura(L)` se verifica si las reinas colocadas en las ordenadas  $L$  no se atacan diagonalmente.

```
segura([]).
segura([Y|L]) :-
    no_ataca(Y,L,1),
    segura(L).
```

- `no_ataca(Y,L,D)` se verifica si  $Y$  es un número,  $L$  es una lista de números  $[n_1, \dots, n_m]$  y  $D$  es un número tales que la reina colocada en la posición  $(x, Y)$  no ataca a las colocadas en las posiciones  $(x + d, n_1), \dots, (x + d + m, n_m)$ .

```
no_ataca(_Y, [], _).
no_ataca(Y1, [Y2|L], D) :-
    Y1-Y2 #\= D,
    Y2-Y1 #\= D,
    D1 is D+1,
    no_ataca(Y1,L,D1).
```

# Restricciones sobre dominios finitos: CLP(FD)

- Optimización:

- `minimize(P,V)` busca una solución del problema P que minimiza el valor de V. Por ejemplo,

```
[eclipse 9]: X :: 1..6, V #= X*(X-6), minimize(indomain(X),V).
```

```
Found a solution with cost -5
```

```
Found a solution with cost -8
```

```
Found a solution with cost -9
```

```
X = 3
```

```
V = -9
```

```
Yes (0.00s cpu)
```

```
[eclipse 10]: X :: 1..6, V #= X*(6-X), minimize(indomain(X),V).
```

```
Found a solution with cost 5
```

```
Found a solution with cost 0
```

```
X = 6
```

```
V = 0
```

```
Yes (0.00s cpu)
```

# Restricciones sobre dominios finitos: CLP(FD)

- Problemas de planificación óptima de tareas con CLP(FD):

- Planificación

```
[eclipse 11]: Tiempos_iniciales = [Ta,Tb,Tc,Td,Tf],
              Tiempos_iniciales :: 0..10,
              Ta+2 #=< Tb,
              Ta+2 #=< Tc,
              Tb+3 #=< Td,
              Tc+5 #=< Tf,
              Td+4 #=< Tf.
```

```
Tiempos_iniciales = [Ta{[0, 1]}, Tb{[2, 3]}, Tc{[2..5]}, Td{[5, 6]}, Tf{[9, 10]}]
```

Delayed goals:

```
Tf{[9, 10]} - Tc{[2..5]}#>=5
Tc{[2..5]} - Ta{[0, 1]}#>=2
Tf{[9, 10]} - Td{[5, 6]}#>=4
Td{[5, 6]} - Tb{[2, 3]}#>=3
Tb{[2, 3]} - Ta{[0, 1]}#>=2
Yes (0.00s cpu)
```

# Restricciones sobre dominios finitos: CLP(FD)

- Traza:

| <i>Paso</i> |                  | <i>Ta</i> | <i>Tb</i> | <i>Tc</i> | <i>Td</i> | <i>Tf</i> |
|-------------|------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
|             |                  | 0..10     | 0..10     | 0..10     | 0..10     | 0..10     |
| 1           | $Ta + 2 \leq Tb$ | 0..8      | 2..10     |           |           |           |
| 2           | $Tb + 3 \leq Td$ |           | 2..7      |           | 5..10     |           |
| 3           | $Td + 4 \leq Tf$ |           |           |           | 5..6      | 9..10     |
| 4           | $Tb + 3 \leq Td$ |           | 2..3      |           |           |           |
| 5           | $Ta + 2 \leq Tb$ | 0..1      |           |           |           |           |
| 6           | $Ta + 2 \leq Tc$ |           |           | 2..10     |           |           |
| 7           | $Tc + 5 \leq Tf$ |           |           | 2..5      |           |           |



# Restricciones sobre dominios finitos: CLP(FD)

- Optimización

```
[eclipse 11]: Tiempos_iniciales = [Ta,Tb,Tc,Td,Tf],  
             Tiempos_iniciales :: 0..20,  
             Ta+2 #=< Tb,  
             Ta+2 #=< Tc,  
             Tb+3 #=< Td,  
             Tc+5 #=< Tf,  
             Td+4 #=< Tf,  
             minimize(labeling(Tiempos_iniciales),Tf).
```

Found a solution with cost 9

Ta = 0

Tb = 2

Tc = 2

Td = 5

Tiempos\_iniciales = [0, 2, 2, 5, 9]

Tf = 9

Yes (0.00s cpu)

# Restricciones sobre dominios finitos: CLP(FD)

- Reducción del espacio de búsqueda

- Genera y prueba

```
p(1). p(3). p(7). p(16). p(15). p(14).
solución_1(X,Y,Z) :-
    p(X), p(Y), p(Z),
    q_1(X,Y,Z).
q_1(X,Y,Z) :- Y ::= X+1, Z ::= Y+1.
```

- Estadísticas

```
[eclipse 25]: lib(port_profiler).
[eclipse 26]: port_profile(solución_1(X,Y,Z), []).
PREDICATE      call
p                /1      42
+                /3     218
::=:            /2     218
q_1              /3     208
solución_1      /3       1

X = 14   Y = 15   Z = 16
Yes (0.00s cpu)
```

# Restricciones sobre dominios finitos: CLP(FD)

- Restringe y genera

```
:- lib(fd).
```

```
solución_2(X,Y,Z) :-  
    q_2(X,Y,Z),  
    p(X), p(Y), p(Z).
```

```
q_2(X,Y,Z) :- Y #= X+1, Z #= Y+1.
```

- Estadísticas

```
[eclipse 27]: port_profile(solución_2(X,Y,Z), []).
```

```
PREDICATE      call  
p                /1      9  
q_2              /3      1  
solución_2      /3      1
```

```
X = 14   Y = 15   Z = 16
```

```
Yes (0.00s cpu)
```

## Bibliografía

- I. Bratko *Prolog Programming for Artificial Intelligence (Third ed.)* (Prentice–Hall, 2001)
  - Cap 14: “Constraint logic programming”
- A.M. Cheadle, W. Harvey, A.J. Sadler, J. Schimpf, K. Shen y M.G. Wallace *ECLiPSe: An Introduction* (Imperial College London, Technical Report IC–Parc–03–1, 2003)
- K. Marriott y P.J. Stuckey *Programming with Constraints. An Introduction.* (The MIT Press, 1998).