Tema 6: Deducción natural con Jape

José A. Alonso Jiménez

Jose-Antonio.Alonso@cs.us.es
http://www.cs.us.es/∼jalonso

Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial

Universidad de Sevilla

Reglas de la conjunción

- **Reglas de la conjunción:**
  - **Regla de introducción de la conjunción:** $\dfrac{F \quad G}{F \wedge G} \wedge i$
  - **Reglas de eliminación de la conjunción:** $\dfrac{F \wedge G}{F} \wedge e_1 \qquad \dfrac{F \wedge G}{G} \wedge e_2$
  - **Ejemplo:** $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$:

1 :	p∧q , r	premises
2 :	q	∧e2 1.1
3 :	q∧r	∧i 2,1.2

  - **Adecuación de las reglas de la conjunción:**
    - * $\wedge$i : $\{F, G\} \models F \wedge G$
    - * $\wedge e_1$: $F \wedge G \models F$
    - * $\wedge e_2$: $F \wedge G \models G$

Reglas de la doble negación

- **Reglas de la doble negación**
  - **Regla de eliminación de la doble negación:** $\dfrac{\neg\neg F}{F}\ \neg\neg\mathrm{e}$
  - **Regla de introducción de la doble negación:** $\dfrac{F}{\neg\neg F}\ \neg\neg\mathrm{i}$
  - **Ejemplo:** $p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg p \wedge r$:

1 :	p , ¬¬(q∧r)	premises
2 :	¬¬p	¬¬i 1.1
3 :	q∧r	¬¬e 1.2
4 :	r	∧e2 3
5 :	¬¬p∧r	∧i 2,4

  - **Adecuación de las reglas de la doble negación:**
    * $\neg\neg\mathrm{e} : \{\neg\neg F\} \models F$
    * $\neg\neg\mathrm{i} : \{F\} \models \neg\neg F$

Regla de eliminación del condicional

- **Regla de eliminación del condicional:**
  - **Regla de eliminación del condicional:** $\dfrac{F \quad F \to G}{G} \to e$
  - **Ejemplo:** $\neg p \wedge q, \neg p \wedge q \to r \vee \neg p \vdash r \vee \neg p$:

1 :	¬p∧q , ¬p∧q⟶r∨¬p	premises
2 :	r∨¬p	⟶e 1.1,1.2

  - **Ejemplo:** $p, p \to q, p \to (q \to r) \vdash r$:

1 :	p , p⟶q , p⟶(q⟶r)	premises
2 :	q	⟶e 1.1,1.2
3 :	q⟶r	⟶e 1.1,1.3
4 :	r	⟶e 2,3

  - **Adecuación de la regla de eliminación del condicional:** $\{F, F \to G\} \models G$

Regla derivada de modus tollens (MT)

- **Regla derivada de modus tollens (MT)**
  - **Regla derivada de modus tollens (MT):** $\dfrac{F \rightarrow G \quad \neg G}{\neg F} MT$
  - **Ejemplo:** $p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r \vdash \neg q$:

1 :	p⟶(q⟶r) , p , ¬r	premises
2 :	q⟶r	⟶e 1.2,1.1
3 :	¬q	MT 1.3,2

  - **Ejemplo:** $\neg p \rightarrow q, \neg q \vdash p$:

1 :	¬p⟶q , ¬q	premises
2 :	¬¬p	MT 1.2,1.1
3 :	p	¬¬e 2

  - **Ejemplo:** $p \rightarrow \neg q, q \vdash \neg p$:

Regla de introducción del condicional

- **Regla de introducción del condicional**
  - **Regla de introducción del condicional:**

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} F \\ \vdots \\ G \end{array}}}{F \rightarrow G} \rightarrow i$$

  - **Ejemplo:** $p \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow \neg p$:

1 :	p⟶q	premise
2 :	¬q	assumption
3 :	¬p	MT 2,1
4 :	¬q⟶¬p	⟶i 2–3

  - **Adecuación de la regla de introducción del condicional:**
    Si $F \models G$, entonces $\models F \rightarrow G$.

Regla de introducción del condicional

- **Ejemplo:** $\neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow \neg\neg q$:

1 :	$\neg q \longrightarrow \neg p$	premise
2 :	p	assumption
3 :	$\neg\neg p$	$\neg\neg$i 2
4 :	$\neg\neg q$	MT 3,1
5 :	$p \longrightarrow \neg\neg q$	$\longrightarrow$i 2–4

- **Ejemplo (de teorema):** $\vdash p \rightarrow p$:

1 :	p	assumption
2 :	$p \longrightarrow p$	$\longrightarrow$i 1–1

Regla de introducción del condicional

- **Ejemplo:** $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$:

1 :	$q \rightarrow r$	assumption
2 :	$\neg q \rightarrow \neg p$	assumption
3 :	p	assumption
4 :	$\neg\neg p$	$\neg\neg$i 3
5 :	$\neg\neg q$	MT 4,2
6 :	q	$\neg\neg$e 5
7 :	r	$\rightarrow$e 6,1
8 :	$p \rightarrow r$	$\rightarrow$i 3–7
9 :	$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r)$	$\rightarrow$i 2–8
10 :	$(q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$	$\rightarrow$i 1–9

Regla de introducción del condicional

- **Ejemplo:** $\boldsymbol{p \land q \to r \vdash p \to (q \to r)}$**:**

1 :	$p \land q \longrightarrow r$	premise
2 :	p	assumption
3 :	q	assumption
4 :	$p \land q$	$\land$i 2,3
5 :	r	$\longrightarrow$e 4,1
6 :	$q \longrightarrow r$	$\longrightarrow$i 3–5
7 :	$p \longrightarrow (q \longrightarrow r)$	$\longrightarrow$i 2–6

Regla de introducción del condicional

- **Ejemplo:** $p \to (q \to r) \vdash (p \wedge q) \to r$**:**

1 :	$p \longrightarrow (q \longrightarrow r)$	premise
2 :	$p \wedge q$	assumption
3 :	p	$\wedge$e1 2
4 :	$q \longrightarrow r$	$\longrightarrow$e 3,1
5 :	q	$\wedge$e2 2
6 :	r	$\longrightarrow$e 5,4
7 :	$(p \wedge q) \longrightarrow r$	$\longrightarrow$i 2–6

Regla de introducción del condicional

- **Ejemplo:** $p \rightarrow q \vdash p \wedge r \rightarrow q \wedge r$**:**

1 :	$p \longrightarrow q$	premise
2 :	$p \wedge r$	assumption
3 :	p	$\wedge$e1 2
4 :	r	$\wedge$e2 2
5 :	q	$\longrightarrow$e 3,1
6 :	$q \wedge r$	$\wedge$i 5,4
7 :	$p \wedge r \longrightarrow q \wedge r$	$\longrightarrow$i 2–6

Reglas de la disyunción

- **Reglas de la disyunción:**
  - **Reglas de introducción de la disyunción:** $\dfrac{F}{F \lor G}\,\lor i_1 \qquad \dfrac{G}{F \lor G}\,\lor i_2$
  - **Regla de eliminación de la disyunción:**

$$\dfrac{F \lor G \quad \boxed{\begin{array}{c} F \\ \vdots \\ H \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} G \\ \vdots \\ H \end{array}}}{H}\,\lor e$$

  - **Ejemplo:** $p \lor q \vdash q \lor p$:

1 :	p∨q	premise
2 :	p	assumption
3 :	q∨p	∨i2 2
4 :	q	assumption
5 :	q∨p	∨i1 4
6 :	q∨p	∨e 1,2–3,4–5

Reglas de la disyunción

- **Ejemplo:** $q \to r \vdash p \lor q \to p \lor r$:

1 :	$q \to r$	premise
2 :	$p \lor q$	assumption
3 :	p	assumption
4 :	$p \lor r$	$\lor$i1 3
5 :	q	assumption
6 :	r	$\to$e 5,1
7 :	$p \lor r$	$\lor$i2 6
8 :	$p \lor r$	$\lor$e 2,3–4,5–7
9 :	$p \lor q \to p \lor r$	$\to$i 2–8

Reglas de la disyunción

- **Ejemplo:** $(p \lor q) \lor r \vdash p \lor (q \lor r)$**:**

1 :	(p∨q)∨r	premise
2 :	p∨q	assumption
3 :	p	assumption
4 :	p∨(q∨r)	∨i1 3
5 :	q	assumption
6 :	q∨r	∨i1 5
7 :	p∨(q∨r)	∨i2 6
8 :	p∨(q∨r)	∨e 2,3–4,5–7
9 :	r	assumption
10 :	q∨r	∨i2 9
11 :	p∨(q∨r)	∨i2 10
12 :	p∨(q∨r)	∨e 1,2–8,9–11

Reglas de la disyunción

- **Ejemplo (distributiva):** $\boldsymbol{p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)}$**:**

1 :	p∧(q∨r)	premise
2 :	p	∧e1 1
3 :	q∨r	∧e2 1
4 :	q	assumption
5 :	p∧q	∧i 2,4
6 :	(p∧q)∨(p∧r)	∨i1 5
7 :	r	assumption
8 :	p∧r	∧i 2,7
9 :	(p∧q)∨(p∧r)	∨i2 8
10 :	(p∧q)∨(p∧r)	∨e 3,4–6,7–9

Regla de copia

- **Ejemplo (usando la regla hyp):** $\vdash \boldsymbol{p \rightarrow (q \rightarrow p)}$**:**

1 :	p	assumption
2 :	q	assumption
3 :	p	hyp 1
4 :	q⟶p	⟶i 2–3
5 :	p⟶(q⟶p)	⟶i 1–4

Reglas de la negación

- **Extensiones de la lógica para usar falso:**
  - **Extensión de la sintaxis: $\perp$ es una fórmula proposicional.**
  - **Extensión de la semántica: $v(\perp) = 0$ en cualquier valoración.**
- **Reglas de la negación:**
  - **Regla de eliminación de lo falso:** $\dfrac{\perp}{F}\,\perp e$
  - **Regla de eliminación de la negación:** $\dfrac{F \quad \neg F}{\perp}\,\neg e$
  - **Adecuación de las reglas de la negación:**
    * $\perp \models F$
    * $\{F, \neg F\} \models \perp$

Reglas de la negación

- **Ejemplo $\neg p \lor q \vdash p \to q$:**

1 :	$\neg p \lor q$	premise
2 :	$\neg p$	assumption
3 :	p	assumption
4 :	$\bot$	$\neg$e 2,3
5 :	q	$\bot$e 4
6 :	$p \longrightarrow q$	$\longrightarrow$i 3–5
7 :	q	assumption
8 :	p	assumption
9 :	q	hyp 7
10 :	$p \longrightarrow q$	$\longrightarrow$i 8–9
11 :	$p \longrightarrow q$	$\lor$e 1,2–6,7–10

Reglas de la negación

- **Regla de introducción de la negación:**

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} F \\ \vdots \\ \bot \end{array}}}{\neg F}\ \neg i$$

- **Adecuación: Si $F \models \bot$, entonces $\models \neg F$.**

- **Ejemplo: $p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash \neg p$:**

1 :	p⟶q , p⟶¬q	premises
2 :	p	assumption
3 :	q	⟶e 2,1.1
4 :	¬q	⟶e 2,1.2
5 :	⊥	¬e 4,3
6 :	¬p	¬i 2–5

Reglas de la negación

- **Ejemplo:** $\boldsymbol{p \rightarrow \neg p \vdash \neg p}$**:**

1 :	$p \longrightarrow \neg p$	premise
2 :	p	assumption
3 :	$\neg p$	$\longrightarrow$e 2,1
4 :	$\perp$	$\neg$e 3,2
5 :	$\neg p$	$\neg$i 2–4

Reglas de la negación

- **Ejemplo $p \wedge \neg q \rightarrow r, \neg r, p \vdash q$:**

1 :	p∧¬q⟶r , ¬r , p	premises
2 :	¬q	assumption
3 :	p∧¬q	∧i 1.3,2
4 :	r	⟶e 3,1.1
5 :	⊥	¬e 1.2,4
6 :	¬¬q	¬i 2–5
7 :	q	¬¬e 6

- **Ejemplo: $p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r \vdash \neg q$:**

1 :	p⟶(q⟶r) , p , ¬r	premises
2 :	q⟶r	⟶e 1.2,1.1
3 :	¬q	MT 1.3,2

Reglas del bicondicional

- **Regla de introducción del bicondicional:** $$\frac{F \rightarrow G \quad G \rightarrow F}{F \leftrightarrow G} \leftrightarrow i$$

- **Ejemplo:** $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$:

1 :	$p \wedge q$	assumption	
2 :	p	$\wedge$e1	1
3 :	q	$\wedge$e2	1
4 :	$q \wedge p$	$\wedge$i	3,2
5 :	$p \wedge q \longrightarrow q \wedge p$	$\longrightarrow$i	1–4
6 :	$q \wedge p$	assumption	
7 :	q	$\wedge$e1	6
8 :	p	$\wedge$e2	6
9 :	$p \wedge q$	$\wedge$i	8,7
10 :	$q \wedge p \longrightarrow p \wedge q$	$\longrightarrow$i	6–9
11 :	$p \wedge q \longleftrightarrow q \wedge p$	$\longleftrightarrow$i	5,10

Reglas del bicondicional

- **Reglas de eliminación del bicondicional:** $\dfrac{F \leftrightarrow G}{F \rightarrow G} \leftrightarrow \mathrm{e}_1 \qquad \dfrac{F \leftrightarrow G}{G \rightarrow F} \leftrightarrow \mathrm{e}_2$
- **Ejemplo:** $p \leftrightarrow q, p \vee q \vdash p \wedge q$**:**

1 :	$p \longleftrightarrow q$, $p \vee q$	premises
2 :	p	assumption
3 :	$p \longrightarrow q$	$\longleftrightarrow$e1 1.1
4 :	q	$\longrightarrow$e 2,3
5 :	$p \wedge q$	$\wedge$i 2,4
6 :	q	assumption
7 :	$q \longrightarrow p$	$\longleftrightarrow$e2 1.1
8 :	p	$\longrightarrow$e 6,7
9 :	$p \wedge q$	$\wedge$i 8,6
10 :	$p \wedge q$	$\vee$e 1.2,2–5,6–9

Reglas derivadas: modus tollens

* Regla derivada de modus tollens (MT): $\dfrac{F \to G \quad \neg G}{\neg F}\ MT$

1 :	$F \longrightarrow G$, $\neg G$	premises
2 :	F	assumption
3 :	G	$\longrightarrow$e 2,1.1
4 :	$\perp$	$\neg$e 1.2,3
5 :	$\neg F$	$\neg$i 2–4

Reglas derivadas: introducción de doble negación

- **Regla de introducción de la doble negación:** $\dfrac{\boldsymbol{F}}{\neg\neg \boldsymbol{F}}\ \neg\neg\mathrm{i}$

1 :	F	premise
2 :	¬F	assumption
3 :	⊥	¬e 2,1
4 :	¬¬F	¬i 2–3

Reglas derivadas: reducción al absurdo (RAA)

- **Regla de reducción al absurdo:**

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\neg F \\ \vdots \\ \bot\end{array}}}{F}\ RAA$$

1 :	$\neg F \longrightarrow \bot$	premise
2 :	$\neg F$	assumption
3 :	$\bot$	$\longrightarrow$e 2,1
4 :	$\neg\neg F$	$\neg$i 2–3
5 :	F	$\neg\neg$e 4

Reglas derivadas: ley del tercio excluido (LEM)

- **Ley del tercio excluido (LEM):** $\dfrac{}{F \lor \neg F}\ \mathit{LEM}$

1 :	$\neg(F\lor\neg F)$	assumption
2 :	F	assumption
3 :	$F\lor\neg F$	$\lor$i1 2
4 :	$\bot$	$\neg$e 1,3
5 :	$\neg F$	$\neg$i 2–4
6 :	$F\lor\neg F$	$\lor$i2 5
7 :	$\bot$	$\neg$e 1,6
8 :	$\neg\neg(F\lor\neg F)$	$\neg$i 1–7
9 :	$F\lor\neg F$	$\neg\neg$e 8

Reglas derivadas: ley del tercio excluido (LEM)

- **Ejemplo:** $p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$**:**

1 :	$p \longrightarrow q$	premise
2 :	$p \vee \neg p$	LEM
3 :	p	assumption
4 :	q	$\longrightarrow$e 3,1
5 :	$\neg p \vee q$	$\vee$i2 4
6 :	$\neg p$	assumption
7 :	$\neg p \vee q$	$\vee$i1 6
8 :	$\neg p \vee q$	$\vee$e 2,3–5,6–7

Reglas de deducción natural

- **Reglas de deducción natural:**

	Introducción	Eliminación
$\wedge$	$\dfrac{F \quad G}{F \wedge G}\wedge i$	$\dfrac{F \wedge G}{F}\wedge \mathrm{e}_1 \qquad \dfrac{F \wedge G}{G}\wedge \mathrm{e}_2$
$\vee$	$\dfrac{F}{F \vee G}\vee \mathrm{i}_1 \qquad \dfrac{G}{F \vee G}\vee \mathrm{i}_2$	$\dfrac{F \vee G \quad \boxed{\begin{array}{c}F\\ \vdots\\ H\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}G\\ \vdots\\ H\end{array}}}{H}\vee e$
$\longrightarrow$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}F\\ \vdots\\ G\end{array}}}{F \longrightarrow G}\longrightarrow i$	$\dfrac{F \quad F \longrightarrow G}{G}\longrightarrow e$

Reglas de deducción natural

- **Reglas de deducción natural:**

	Introducción	Eliminación
$\neg$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c} F \\ \vdots \\ \bot \end{array}}}{\neg F}\ \neg i$	$\dfrac{F \quad \neg F}{\bot}\ \neg e$
$\bot$		$\dfrac{\bot}{F}\ \bot e$
$\neg\neg$		$\dfrac{\neg\neg F}{F}\ \neg\neg\mathrm{e}$
$\leftrightarrow$	$\dfrac{F \rightarrow G \quad G \rightarrow F}{F \leftrightarrow G}\ \leftrightarrow i$	$\dfrac{F \leftrightarrow G}{F \rightarrow G}\ \leftrightarrow \mathrm{e}_1 \qquad \dfrac{F \leftrightarrow G}{G \rightarrow F}\ \leftrightarrow \mathrm{e}_2$

- **Adecuación y completitud del cálculo de deducción natural.**

Reglas del cuantificador universal

- **Regla de eliminación del cuantificador universal**
  - **Regla de eliminación del cuantificador universal:**

    $$\frac{(\forall x)F}{F[x/t]}\ \forall e$$

    donde $[x/t]$ es libre para F.
  - **Nota: Analogía con $\wedge e_1$ y $\wedge e_2$.**
  - **Ejemplo 1: $P(c), (\forall x)(P(x) \to \neg Q(x)) \vdash \neg Q(c)$**

1 :	var y , P(y) , ∀x.(P(x)⟶¬Q(x))	premises
2 :	P(y)⟶¬Q(y)	∀e 1.3
3 :	¬Q(y)	⟶e 1.2,2

  - **Nota: $(\forall x)(\exists y)(x < y) \nvdash (\exists y)(y < y)$.**

Reglas del cuantificador universal

- **Regla de introducción del cuantificador universal**
  - **Regla de introducción del cuantificador universal:**

$$\frac{\boxed{\begin{array}{l} x_0 \\ \quad\vdots \\ \quad F[x/x_0] \end{array}}}{(\forall x)F}\ \forall i$$

donde x_0 es una variable nueva, que no aparece fuera de la caja.

- **Nota: Analogía con $\wedge$i.**
- **Ejemplo 2: $(\forall x)(P(x) \to Q(x)), (\forall x)P(x) \vdash (\forall x)Q(x)$**

1 :	∀x.(P(x)⟶Q(x)) , ∀x.P(x)	premises
2 :	var c	assumption
3 :	P(c)⟶Q(c)	∀e 1.1
4 :	P(c)	∀e 1.2
5 :	Q(c)	⟶e 4,3
6 :	∀x.Q(x)	∀i 2–5

Reglas del cuantificador existencial

- **Regla de introducción del cuantificador existencial**
  - **Regla de introducción del cuantificador existencial:**

    $$\frac{\boldsymbol{F[x/t]}}{\boldsymbol{(\exists x)F}}\ \exists \boldsymbol{i}$$

    donde $\boldsymbol{[x/t]}$ es libre para $\boldsymbol{F}$.
  - **Nota: Analogía con $\vee \mathrm{i}_1$ y $\vee \mathrm{i}_2$.**
  - **Ejemplo 3: $\boldsymbol{(\forall x)P(x)(\exists x)P(x)}$**

1 :	var c , ∀x.P(x)	premises
2 :	P(c)	∀e 1.2
3 :	∃x.P(x)	∃i 2

Reglas del cuantificador existencial

- **Regla de eliminación del cuantificador existencial**
  - **Regla de eliminación del cuantificador existencial:**

$$\frac{(\exists x)F \qquad \boxed{\begin{array}{ll} x_0 & F[x/x_0] \\ & \quad\vdots \\ & \quad G \end{array}}}{G}\ \exists e$$

donde x_0 es una variable nueva, que no aparece fuera de la caja.

  - **Nota: Analogía con $\vee$e.**
  - **Ejemplo 4: $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x), (\exists x)P(x) \vdash (\exists x)Q(x)$**

1 :	∀x.(P(x)⟶Q(x)) , ∃x.P(x)	premises
2 :	var c , P(c)	assumptions
3 :	P(c)⟶Q(c)	∀e 1.1
4 :	Q(c)	⟶e 2.2,3
5 :	∃x.Q(x)	∃i 4
6 :	∃x.Q(x)	∃e 1.2,2–5

Reglas del cuantificador existencial

- **Ejemplo 5:** $(\forall x)(Q(x) \to R(x)), (\exists x)(P(x) \land Q(x)) \vdash (\exists x)(P(x) \land R(x))$

1 :	∀x.(Q(x)⟶R(x)) , ∃x.(P(x)∧Q(x))	premises
2 :	var c , P(c)∧Q(c)	assumptions
3 :	Q(c)⟶R(c)	∀e 1.1
4 :	Q(c)	∧e2 2.2
5 :	R(c)	⟶e 4,3
6 :	P(c)	∧e1 2.2
7 :	P(c)∧R(c)	∧i 6,5
8 :	∃x.(P(x)∧R(x))	∃i 7
9 :	∃x.(P(x)∧R(x))	∃e 1.2,2−8

Reglas del cuantificador existencial

- **Ejemplo 6:** $(\exists x)P(x), (\forall x)(\forall y)(P(x) \rightarrow Q(y)) \vdash (\forall y)Q(y)$

1 :	$\exists$x.P(x) , $\forall$x.$\forall$y.(P(x)$\longrightarrow$Q(y))	premises
2 :	var c	assumption
3 :	var c1 , P(c1)	assumptions
4 :	$\forall$y.(P(c1)$\longrightarrow$Q(y))	$\forall$e 1.2
5 :	P(c1)$\longrightarrow$Q(c)	$\forall$e 4
6 :	Q(c)	$\longrightarrow$e 3.2,5
7 :	Q(c)	$\exists$e 1.1,3$-$6
8 :	$\forall$y.Q(y)	$\forall$i 2$-$7

Equivalencias

- **Equivalencias:**
  - **Sean F y G fórmulas.**

    [1(a)] $\neg(\forall x)F \equiv (\exists x)\neg F$

    [1(b)] $\neg(\exists x)F \equiv (\forall x)\neg F$

  - **Sean F y G fórmulas y x una varible no libre en G.**

    [2(a)] $(\forall x) \wedge G \equiv (\forall x)(F \wedge G)$

    [2(b)] $(\forall x) \vee G \equiv (\forall x)(F \vee G)$

    [2(c)] $(\exists x) \wedge G \equiv (\exists x)(F \wedge G)$

    [2(d)] $(\exists x) \vee G \equiv (\exists x)(F \vee G)$

    [2(e)] $(\forall x) \rightarrow G \equiv F \rightarrow (\forall x)G$

    [2(f)] $(\exists x) \rightarrow G \equiv (\forall x)F \rightarrow G$

Equivalencias

- **Sean F y G fórmulas.**

  [3(a)] $(\forall x)F \land (\forall x)G \equiv (\forall x)(F \land G)$

  [3(b)] $(\exists x)F \lor (\exists x)G \equiv (\exists x)(F \lor G)$

- **Sean F y G fórmulas.**

  [4(a)] $(\forall x)(\forall y)F \equiv (\forall y)(\forall x)F$

  [4(b)] $(\exists x)(\exists y)F \equiv (\exists y)(\exists x)F$

Equivalencias

- **Equivalencia 1(a):** $\neg(\forall x)F \vdash (\exists x)\neg F$

1 :	$\neg(\forall x.P(x))$	premise
2 :	$\neg(\exists x.\neg P(x))$	assumption
3 :	var c	assumption
4 :	$\neg P(c)$	assumption
5 :	$\exists x.\neg P(x)$	$\exists$i 4
6 :	$\perp$	$\neg$e 2,5
7 :	$P(c)$	RAA 4–6
8 :	$\forall x.P(x)$	$\forall$i 3–7
9 :	$\perp$	$\neg$e 1,8
10 :	$\exists x.\neg P(x)$	RAA 2–9

Equivalencias

- **Equivalencia 1(a):** $(\exists x)\neg F \vdash \neg(\forall x)F$

1 :	$\exists x.\neg P(x)$	premise
2 :	$\neg\neg(\forall x.P(x))$	assumption
3 :	$\forall x.P(x)$	$\neg\neg$e 2
4 :	var c , $\neg P(c)$	assumptions
5 :	$P(c)$	$\forall$e 3
6 :	$\bot$	$\neg$e 4.2,5
7 :	$\bot$	$\exists$e 1,4–6
8 :	$\neg(\forall x.P(x))$	RAA 2–7

Equivalencias

- **Equivalencia 1(a):** $\neg(\forall x)F \equiv (\exists x)\neg F$

1 :	$\boxed{\neg(\forall x.P(x))}$	assumption
2 :	$\boxed{\exists x.\neg P(x)}$	Theorem $\neg(\forall x.P(x)) \vdash \exists x.\neg P(x)$ 1
3 :	$\neg(\forall x.P(x)) \longrightarrow \exists x.\neg P(x)$	$\longrightarrow$i 1–2
4 :	$\boxed{\exists x.\neg P(x)}$	assumption
5 :	$\boxed{\neg(\forall x.P(x))}$	Theorem $\exists x.\neg P(x) \vdash \neg(\forall x.P(x))$ 4
6 :	$\exists x.\neg P(x) \longrightarrow \neg(\forall x.P(x))$	$\longrightarrow$i 4–5
7 :	$\neg(\forall x.P(x)) \longleftrightarrow \exists x.\neg P(x)$	$\longleftrightarrow$i 3,6

Equivalencias

- **Equivalencia 3(a):** $(\forall x)F \wedge (\forall x)G \vdash (\forall x)(F \wedge G)$

1 :	∀x.(P(x)∧Q(x))	premise
2 :	var c	assumption
3 :	P(c)∧Q(c)	∀e 1
4 :	P(c)	∧e1 3
5 :	∀x.P(x)	∀i 2–4
6 :	var c1	assumption
7 :	P(c1)∧Q(c1)	∀e 1
8 :	Q(c1)	∧e2 7
9 :	∀x.Q(x)	∀i 6–8
10 :	∀x.P(x)∧∀x.Q(x)	∧i 5,9

Equivalencias

- **Equivalencia 3(a):** $(\forall \boldsymbol{x})(\boldsymbol{F} \wedge \boldsymbol{G}) \vdash (\forall \boldsymbol{x})\boldsymbol{F} \wedge (\forall \boldsymbol{x})\boldsymbol{G}$

1 :	∀x.P(x)∧∀x.Q(x)	premise
2 :	var c	assumption
3 :	∀x.P(x)	∧e1 1
4 :	∀x.Q(x)	∧e2 1
5 :	P(c)	∀e 3
6 :	Q(c)	∀e 4
7 :	P(c)∧Q(c)	∧i 5,6
8 :	∀x.(P(x)∧Q(x))	∀i 2−7

Equivalencias

- **Equivalencia 3(a):** $(\forall x)F \wedge (\forall x)G \equiv (\forall x)(F \wedge G)$

1 :	$\boxed{\forall x.(P(x) \wedge Q(x))}$	assumption
2 :	$\boxed{\forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x)}$	Theorem $\forall x.(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x)$ 1
3 :	$\forall x.(P(x) \wedge Q(x)) \longrightarrow \forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x)$	$\longrightarrow$i 1–2
4 :	$\boxed{\forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x)}$	assumption
5 :	$\boxed{\forall x.(P(x) \wedge Q(x))}$	Theorem $\forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x) \vdash \forall x.(P(x) \wedge Q(x))$ 4
6 :	$\forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x) \longrightarrow \forall x.(P(x) \wedge Q(x))$	$\longrightarrow$i 4–5
7 :	$\forall x.(P(x) \wedge Q(x)) \longleftrightarrow \forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x)$	$\longleftrightarrow$i 3,6

Equivalencias

- **Equivalencia 3(b): $(\exists x)F \vee (\exists x)G \vdash (\exists x)(F \vee G)$**

1 :	∃x.P(x)∨∃x.Q(x)	premise
2 :	∃x.P(x)	assumption
3 :	var c , P(c)	assumptions
4 :	P(c)∨Q(c)	∨i1 3.2
5 :	∃x.(P(x)∨Q(x))	∃i 4
6 :	∃x.(P(x)∨Q(x))	∃e 2,3−5
7 :	∃x.Q(x)	assumption
8 :	var c1 , Q(c1)	assumptions
9 :	P(c1)∨Q(c1)	∨i2 8.2
10 :	∃x.(P(x)∨Q(x))	∃i 9
11 :	∃x.(P(x)∨Q(x))	∃e 7,8−10
12 :	∃x.(P(x)∨Q(x))	∨e 1,2−6,7−11

Equivalencias

- **Equivalencia 3(b):** $(\exists x)(F \vee G) \vdash (\exists x)F \vee (\exists x)G$

1 :	∃x.(P(x)∨Q(x))	premise
2 :	var c , P(c)∨Q(c)	assumptions
3 :	P(c)	assumption
4 :	∃x.P(x)	∃i 3
5 :	∃x.P(x)∨∃x.Q(x)	∨i1 4
6 :	Q(c)	assumption
7 :	∃x.Q(x)	∃i 6
8 :	∃x.P(x)∨∃x.Q(x)	∨i2 7
9 :	∃x.P(x)∨∃x.Q(x)	∨e 2.2,3–5,6–8
10 :	∃x.P(x)∨∃x.Q(x)	∃e 1,2–9

Equivalencias

- **Equivalencia 3(b):** $(\exists x)F \vee (\exists x)G \equiv (\exists x)(F \vee G)$

1 :	$\boxed{\exists x.P(x)\vee\exists x.Q(x)}$	assumption
2 :	$\boxed{\exists x.(P(x)\vee Q(x))}$	Theorem $\exists x.P(x)\vee\exists x.Q(x) \vdash \exists x.(P(x)\vee Q(x))$ 1
3 :	$\exists x.P(x)\vee\exists x.Q(x)\longrightarrow\exists x.(P(x)\vee Q(x))$	$\longrightarrow$i 1–2
4 :	$\boxed{\exists x.(P(x)\vee Q(x))}$	assumption
5 :	$\boxed{\exists x.P(x)\vee\exists x.Q(x)}$	Theorem $\exists x.(P(x)\vee Q(x)) \vdash \exists x.P(x)\vee\exists x.Q(x)$ 4
6 :	$\exists x.(P(x)\vee Q(x))\longrightarrow\exists x.P(x)\vee\exists x.Q(x)$	$\longrightarrow$i 4–5
7 :	$\exists x.P(x)\vee\exists x.Q(x)\longleftrightarrow\exists x.(P(x)\vee Q(x))$	$\longleftrightarrow$i 3,6

Equivalencias

- **Equivalencia 4(b):** $(\exists \boldsymbol{x})(\exists \boldsymbol{y})\boldsymbol{F} \vdash (\exists \boldsymbol{y})(\exists \boldsymbol{x})\boldsymbol{F}$

1 :	∃x.∃y.P(x,y)	premise
2 :	var c , ∃y.P(c,y)	assumptions
3 :	var c1 , P(c,c1)	assumptions
4 :	∃x.P(x,c1)	∃i 3.2
5 :	∃y.∃x.P(x,y)	∃i 4
6 :	∃y.∃x.P(x,y)	∃e 2.2,3−5
7 :	∃y.∃x.P(x,y)	∃e 1,2−6

Equivalencias

- **Equivalencia 4(b):** $(\exists \boldsymbol{x})(\exists \boldsymbol{y})\boldsymbol{F} \equiv (\exists \boldsymbol{y})(\exists \boldsymbol{x})\boldsymbol{F}$

1 :	$\exists x.\exists y.P(x,y)$	assumption
2 :	$\exists y.\exists x.P(x,y)$	Theorem $\exists x.\exists y.P(x,y) \vdash \exists y.\exists x.P(x,y)$ 1
3 :	$\exists x.\exists y.P(x,y) \longrightarrow \exists y.\exists x.P(x,y)$	$\longrightarrow$i 1–2
4 :	$\exists y.\exists x.P(x,y)$	assumption
5 :	$\exists x.\exists y.P(x,y)$	Theorem $\exists x.\exists y.P(x,y) \vdash \exists y.\exists x.P(x,y)$ 4
6 :	$\exists y.\exists x.P(x,y) \longrightarrow \exists x.\exists y.P(x,y)$	$\longrightarrow$i 4–5
7 :	$\exists x.\exists y.P(x,y) \longleftrightarrow \exists y.\exists x.P(x,y)$	$\longleftrightarrow$i 3,6

Reglas de la igualdad

- **Regla de eliminación de la igualdad:**

$$\frac{t_1 = t_2 \quad F[x/t_1]}{F[x/t_2]} =e$$

donde $[x/t_1]$ y $[x/t_2]$ son libres para F.

- **Ejemplo:**

1	$(x+1) = (1+x)$	premisa
2	$(x+1>1) \to (x+1>0)$	premisa
3	$(1+x>1) \to (1+x>0)$	=e 1,2

- **Ejemplo:** $t_1 = t_2, t_2 = t_3 \vdash t_1 = t_3$

1	$t_1 = t_2$	premisa
2	$t_2 = t_3$	premisa
3	$t_1 = t_3$	=e 2,1

Reglas de la igualdad

- **Regla de introducción de la igualdad:**

$$\frac{}{t = t} =i$$

- **Ejemplo:** $t_1 = t_2, \vdash t_2 = t_1$

1	$t_1 = t_2$	premisa
2	$t_1 = t_1$	=i
3	$t_2 = t_1$	=e 1,2

Bibliografía

- C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal.* (Ariel, 2000) pp. 259–287.
- R. Bornat *Using ItL Jape with X* (Department of Computer Science, QMW, 1998)
- J. Dingel *Propositional and predicate logic: a review.* (2000) pp. 28–33.
- J.A. Díez *Iniciación a la Lógica*, (Ariel, 2002)
- J.L. Fernández, A. Manjarrés y F.J. Díez *Lógica computacional.* (UNED, 2003) pp. 88–94.
- M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems.* (Cambridge University Press, 2000) pp. 109-127.
- E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003)