

# *Razonamiento automático (2005–06)*

## *Tema 4: Razonamiento automático con igualdad*

José A. Alonso Jiménez

Grupo de Lógica Computacional

Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial

Universidad de Sevilla

# Axiomas de igualdad

---

- Demostrar que si Francisco es igual a Curro y a Paco, entonces Curro y Paco son iguales
- Formalización en OTTER

"ej-1a.in"

```
1 list(sos).  
2 francisco = curro.  
3 francisco = paco.  
4 paco != curro.  
5 end_of_list.  
6  
7 set(binary_res).
```

# Axiomas de igualdad

- Formalización en OTTER con axiomas de igualdad

```

1  list(sos).
2  x=x.                                % Reflexividad
3  x!=y | y=x.                          % Simetría
4  x!=y | y!=z | x=z.                  % Transisitividad
5  francisco = curro.
6  francisco = paco.
7  paco != curro.
8  end_of_list.
9
10 set(binary_res).
```

Analiz.	Gener.	Reten.	Sub. adel.	Sub. atrás	Seg.
10	35	18	10	0	0.63

# Axiomas de igualdad

- Formalización en OTTER con soporte y resolución UR

```

1  list(usable).
2  x=x.                % Reflexividad
3  x!=y | y=x.        % Simetría
4  x!=y | y!=z | x=z. % Transisitividad
5  francisco = curro.
6  francisco = paco.
7  end_of_list.
8
9  list(sos).
10 paco != curro.
11 end_of_list.
12
13 set(ur_res).
```

Analiz.	Gener.	Reten.	Sub. adel.	Sub. atrás	Seg.
2	7	3	4	0	0.00

# Axiomas de sustitución funcionales

---

- Demostrar que si la opuesta de la derecha es la izquierda y la opuesta de la izquierda es la derecha, entonces la opuesta a la opuesta de la derecha es la derecha
- Formalización en OTTER con axiomas de igualdad

"ej-2a.in"

```
1 list(sos).
2 x=x. % Reflexividad
3 x!=y | y=x. % Simetría
4 x!=y | y!=z | x=z. % Transisitividad
5 opuesta(derecha) = izquierda.
6 opuesta(izquierda) = derecha.
7 opuesta(opuesta(derecha)) != derecha.
8 end_of_list.
9
10 set(binary_res).
```

# Axiomas de sustitución funcionales

- Formalización en OTTER con un axioma de sustitución

```
1 include('ej-2a.in').  
2  
3 list(sos).  
4   x!=y | opuesta(x)=opuesta(y).  
5 end_of_list.
```

Analiz.	Gener.	Reten.	Sub. adel.	Sub. atrás	Seg.
23	130	74	49	0	0.02

# Axiomas de sustitución funcionales

- Formalización en OTTER con soporte y resolución UR

"ej-2b2.in"

```
1 list(usable).
2   x=x.                                % Reflexividad
3   x!=y | y=x.                          % Simetría
4   x!=y | y!=z | x=z.                  % Transisitividad
5   x!=y | opuesta(x)=opuesta(y).      % Sustitución
6   opuesta(derecha) = izquierda.
7   opuesta(izquierda) = derecha.
8 end_of_list.
9
10 list(sos).
11   opuesta(opuesta(derecha)) != derecha.
12 end_of_list.
13
14 set(ur_res).
```

Analiz.	Gener.	Reten.	Sub. adel.	Sub. atrás	Seg.
3	8	3	5	0	0.00

# Axiomas de sustitución relacionales

- Demostrar que si los padres son mayores que los hijos y Luis es el padre de Juan, entonces Luis es mayor que Juan.
- Formalización en OTTER con axiomas de sustitución relacionales

"ej-3a.in"

```
1 list(sos).
2 x=x. % Reflexividad
3 x!=y | y=x. % Simetría
4 x!=y | y!=z | x=z. % Transisitividad
5 x!=y | Padre(x)=Padre(y). % Sustitución
6 x1!=x2 | -Mayor(x1,y) | Mayor(x2,y). % Sustitución
7 y1!=y2 | -Mayor(x,y1) | Mayor(x,y2). % Sustitución
8 Mayor(Padre(x),x).
9 Padre(Juan)=Luis.
10 -Mayor(Luis,Juan).
11 end_of_list.
12
13 set(binary_res).
```



# Axiomas de sustitución relacionales

- Prueba obtenida

```
1 [] x=x.
2 [] x!=y | y=x.
3 [] x!=y | y!=z | x=z.
5 [] x1!=x2 | -Mayor(x1,y) | Mayor(x2,y).
7 [] Mayor(Padre(x),x).
8 [] Padre(Juan)=Luis.
9 [] -Mayor(Luis,Juan).
26 [binary,3.1,8.1] Luis!=x | Padre(Juan)=x.
53 [binary,26.1,2.2] Padre(Juan)=x | x!=Luis.
303 [binary,5.3,9.1] x!=Luis | -Mayor(x,Juan).
312 [binary,303.1,53.1,unit_del,7,1] $F.
```

Analiz.	Gener.	Reten.	Sub. adel.	Sub. atrás	Seg.
55	671	302	351	0	0.23

# Axiomas de sustitución relacionales

- Formalización en OTTER con soporte y resolución UR

"ej-3b.in"

```

1 list(usable).
2   x=x.                                     % Reflexividad
3   x!=y | y=x.                             % Simetría
4   x!=y | y!=z | x=z.                     % Transisitividad
5   x!=y | Padre(x)=Padre(y).              % Sustitución
6   x1!=x2 | -Mayor(x1,y) | Mayor(x2,y).   % Sustitución
7   y1!=y2 | -Mayor(x,y1) | Mayor(x,y2).   % Sustitución
8   Mayor(Padre(x),x).
9   Padre(Juan)=Luis.
10 end_of_list.
11
12 list(sos).
13   -Mayor(Luis,Juan).
14 end_of_list.
15
16 set(ur_res).
  
```

Analiz.	Gener.	Reten.	Sub. adel.	Sub. atrás	Seg.
1	2	1	1	0	0.00

# Axiomas de sustitución relacionales

- Formalización en OTTER mediante cláusulas "ej-3c.in"

```
1 list(sos).  
2 -Padre(x,y) | Mayor(x,y).  
3 Padre(Luis,Juan).  
4 -Mayor(Luis,Juan).  
5 end_of_list.  
6  
7 set(binary_res).
```

Analiz.	Gener.	Reten.	Sub. adel.	Sub. atrás	Seg.
3	1	1	0	0	0.00

# Razonamiento con igualdad

- Formalización de los axiomas de igualdad mediante fórmulas

```
1 all x (x=x). % Reflexividad
2 all x y (x=y -> y=x). % Simetría
3 all x y z (x=y & y=z -> x=z). % Transitividad
4
5 % Axiomas de sustitución de la función f/3
6 all x1 x2 x3 y (x1=y -> f(x1,x2,x3) = f(y,x2,x3)).
7 all x1 x2 x3 y (x2=y -> f(x1,x2,x3) = f(x1,y,x3)).
8 all x1 x2 x3 y (x3=y -> f(x1,x2,x3) = f(x1,x2,y)).
9
10 % Axiomas de sustitución de la relación P/3
11 all x1 x2 x3 y (x1=y & P(x1,x2,x3) -> P(y.x2.x3)).
12 all x1 x2 x3 y (x2=y & P(x1,x2,x3) -> P(x1.y.x3)).
13 all x1 x2 x3 y (x3=y & P(x1,x2,x3) -> P(x1.x2.y)).
```

# Razonamiento con igualdad

- Formalización de los axiomas de igualdad mediante cláusulas

```
1  x = x.           % Reflexividad
2  x != y | y = x. % Simetría
3  x != y | y! = z | x=z. % Transitividad
4
5  % Axiomas de sustitución de la función f/3
6  x1 != y | f(x1,x2,x3) = f(y,x2,x3)).
7  x2 != y | f(x1,x2,x3) = f(x1,y,x3)).
8  x3 != y | f(x1,x2,x3) = f(x1,x2,y)).
9
10 % Axiomas de sustitución de la relación P/3
11 x1 != y | -P(x1,x2,x3) | P(y.x2.x3)).
12 x2 != y | -P(x1,x2,x3) | P(x1.y.x3)).
13 x3 != y | -P(x1,x2,x3) | P(x1.x2.y)).
```

# Paramodulación

- Regla de paramodulación

- ▶ Izquierda

$$\frac{s_1 = t \cup C \quad L[s_2] \cup D}{\sigma(L[t]) \cup \sigma(C) \cup \sigma(D)}$$

$$\sigma = umg(s_1, s_2)$$

- ▶ Derecha

$$\frac{t = s_1 \cup C \quad L[s_2] \cup D}{\sigma(L[t]) \cup \sigma(C) \cup \sigma(D)}$$

$$\sigma = umg(s_1, s_2)$$

# Paramodulación

- Ejemplos de paramodulación

"ej-5.in"

```
1 list(sos).  
2 P(f(x,b),x) | Q(x).  
3 f(a,x)=x | R(x).  
4 end_of_list.  
5  
6 set(para_into).  
7 set(para_from).
```

# Paramodulación

- Ejemplos de paramodulación: búsqueda

```
given clause #1: (wt=7) 1 [] P(f(x,b),x) | Q(x).
```

```
given clause #2: (wt=7) 2 [] f(a,x)=x | R(x).
```

```
** KEPT 3 [para_into,2.1.1,2.1.1] x=x | R(x).
```

```
** KEPT 4 [para_from,2.1.1,1.1.1] P(b,a) | Q(a) | R(b).
```



# Paramodulación

- Ejemplos de paramodulación: explicación

3 [para\_into,2.1.1,2.1.1]  $x=x \mid R(x)$ .

Into 2.1.1	$\text{'f(a,x1)'=x1} \mid R(x1)$
From 2.1.1	$\text{'f(a,x2)'=x2} \mid R(x2)$
Unificador	$\sigma = \{x2/x1\}$
Paramodulante	$\sigma(x2=x1 \mid R(x2) \mid R(x1))$
	$\implies x1=x1 \mid R(x1)$
	$\implies x=x \mid R(x)$

# Paramodulación

- Ejemplos de paramodulación: explicación

4 [para\_from,2.1.1,1.1.1] P(b,a) | Q(a) | R(b).

From 2.1.1	$\text{'f(a,x1)'} = x1 \mid R(x1)$
Into 1.1.1	$P(\text{'f(x2,b)'} , x2) \mid Q(x2)$
Unificador	$\sigma = \{x2/a, x1/b\}$
Paramodulante	$\sigma(P(x1,x2) \mid Q(x2) \mid R(x1))$ $\implies P(b) \mid Q(a) \mid R(b)$

# Paramodulación

---

- Demostrar que si Francisco es igual a Curro y a Paco, entonces Curro y Paco son iguales

```
                                "ej-1d.in"
1  list(usable).
2  x=x.                          % Reflexividad
3  francisco = curro.
4  francisco = paco.
5  end_of_list.
6
7  list(sos).
8  paco != curro.
9  end_of_list.
10
11 set(para_into).
```

# Paramodulación

- Explicación de la cláusula

```
[para_into,4.1.1,3.1.2] francisco!=curro.
```

```
Into 4.1.1      `paco'!=curro
From 3.1.2      francisco=`paco'
```

- Estadísticas

Analiz.	Gener.	Reten.	Sub. adel.	Sub. atrás	Seg.
1	1	1	0	0	0.00

# Paramodulación

---

- Demostrar que si la opuesta de la derecha es la izquierda y la opuesta de la izquierda es la derecha, entonces la opuesta a la opuesta de la derecha es la derecha

```
----- "ej-2c.in" -----
1  list(usable).
2  x=x.                % Reflexividad
3  opuesta(derecha) = izquierda.
4  opuesta(izquierda) = derecha.
5  end_of_list.
6
7  list(sos).
8  opuesta(opuesta(derecha)) != derecha.
9  end_of_list.
10
11 set(para_into).
12 set(para_from).
```

# Paramodulación

- Explicación de la cláusula

```
[para_into,4.1.1.1,2.1.1] opuesta(izquierda)!=derecha.
```

```
Into 4.1.1      opuesta('opuesta(derecha)')!=derecha
```

```
From 2.1.1     'opuesta(derecha)'=izquierda
```

- Estadísticas

Analiz.	Gener.	Reten.	Sub. adel.	Sub. atrás	Seg.
1	2	2	0	0	0.01

# Paramodulación

---

- Demostrar que si los padres son mayores que los hijos y Luis es el padre de Juan, entonces Luis es mayor que Juan.

```
----- "ej-3d.in" -----  
1 list(usable).  
2 x=x. % Reflexividad  
3 Mayor(Padre(x),x).  
4 Padre(Juan)=Luis.  
5 end_of_list.  
6  
7 list(sos).  
8 -Mayor(Luis,Juan).  
9 end_of_list.  
10  
11 set(para_into).
```

# Paramodulación

- Explicación de la cláusula

```
[para_into,4.1.1,3.1.2] -Mayor(Padre(Juan),Juan).
```

```
Into 4.1.1      -Mayor('Luis',Juan)
```

```
From 4.1.2     Padre(Juan)='Luis'
```

- Estadísticas

Analiz.	Gener.	Reten.	Sub. adel.	Sub. atrás	Seg.
1	1	1	0	0	0.02



# Paramodulación

---

- Demostrar que si Juan está casado y es el tío de Pepe, entonces el hermano del padre de Juan está casado

\_\_\_\_\_ "ej-6b.in" \_\_\_\_\_

```
1 list(usable).
2   x=x.
3   casado(juan).
4   hermano(padre(x)) = tio(x).
5   tio(pepe)=juan.
6 end_of_list.
7
8 list(sos).
9   -casado(hermano(padre(pepe))).
10 end_of_list.
11
12 set(para_into).
```

# Demodulación

- Regla de demodulación

$$\frac{C[t]}{t_1 = t_2}$$
$$\sigma(C[t_2])$$

$$\sigma = umg(t, t_1)$$

# Demodulación

- Demostrar que si Francisco es igual a Curro y a Paco, entonces Curro y Paco son iguales

```
                                "ej-1e.in"
1  list(usable).
2    x=x.                        % Reflexividad
3  end_of_list.
4
5  list(demodulators).
6    curro = francisco.
7    paco = francisco.
8  end_of_list.
9
10 list(sos).
11  paco != curro.
12 end_of_list.
13
14 set(process_input).
```

# Demodulación

- Demostrar que si la opuesta de la derecha es la izquierda y la opuesta de la izquierda es la derecha, entonces la opuesta a la opuesta de la derecha es la derecha

```
----- "ej-2d.in" -----  
1  list(usable).  
2    x=x.  
3  end_of_list.  
4  
5  list(demodulators).  
6    opuesta(derecha) = izquierda.  
7    opuesta(izquierda) = derecha.  
8  end_of_list.  
9  
10 list(sos).  
11  opuesta(opuesta(derecha)) != derecha.  
12 end_of_list.  
13  
14 set(process_input).
```

# Demodulación

- Demostrar que si Juan está casado y es el tío de Pepe, entonces el hermano del padre de Juan está casado

```
_____ "ej-6a.in" _____  
1  list(usable).  
2    x=x.  
3    casado(juan).  
4  end_of_list.  
5  
6  list(demodulators).  
7    hermano(padre(x)) = tio(x).  
8    tio(pepe)=juan.  
9  end_of_list.  
10  
11 list(sos).  
12   -casado(hermano(padre(pepe))).  
13 end_of_list.  
14  
15 set(process_input).
```

# Operadores

- Sea  $G$  un grupo y  $e$  su elemento neutro. Demostrar que si, para todo  $x$  de  $G$ ,  $x^2 = e$ , entonces  $G$  es conmutativo.
- Formalización
  - ▶ Axiomas de grupo
$$(\forall x)[e.x = x]$$
$$(\forall x)[x.e = x]$$
$$(\forall x)[x.x^{-1} = e]$$
$$(\forall x)[x^{-1}.x = e]$$
$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(x.y).z = x.(y.z)]$$
  - ▶ Hipótesis
$$(\forall x)[x.x = e]$$
  - ▶ Conclusión
$$(\forall x)(\forall y)[x.y = y.x]$$

# Operadores

- Formalización en OTTER

"ej-7a.in"

```
1  op(400, xfy, *).
2  op(300, yf, ^).
3
4  list(usable).
5      x = x.                % Reflexividad
6      e * x = x.           % Ax. 1
7      x * e = x.           % Ax. 2
8      x^ * x = e.          % Ax. 3
9      x * x^ = e.          % Ax. 4
10     (x * y) * z = x * (y * z). % Ax. 5
11 end_of_list.
12
13 list(sos).
14     x * x = e.
15     a * b != b * a.
16 end_of_list.
17
18 set(para_into).
19 set(para_from).
```

# Operadores

- Prueba obtenida

```
2 [] e*x=x.
3 [] x*e=x.
6 [] (x*y)*z=x*y*z.
7 [] x*x=e.
8 [] a*b!=b*a.
19 [para_from,7.1.2,3.1.1.2] x*y*y=x.
20 [para_from,7.1.2,2.1.1.1] (x*x)*y=y.
31 [para_into,19.1.1,6.1.2] (x*y)*y=x.
167 [para_into,20.1.1,6.1.1] x*x*y=y.
170 [para_from,20.1.1,6.1.1] x=y*y*x.
496 [para_into,167.1.1.2,31.1.1] (x*y)*x=y.
755 [para_into,496.1.1.1,170.1.2] x*y=y*x.
756 [binary,755.1,8.1] $F.
```



# Operadores

---

- Cláusula 19 [para\_from,7.1.2,3.1.1.2]  $x*y*y=x$ .

From 7.1.2  $x1*x1='e'$

Into 3.1.1.2  $x2*'e'=x2$

$$\implies x2*(x1*x1)=x2 \quad \{x2/x, x1/y\}$$

$$\implies x*(y*y)=x$$

- Cláusula 20 [para\_from,7.1.2,2.1.1.1]  $(x*x)*y=y$ .

From 7.1.2  $x1*x1='e'$

Into 2.1.1.1  $'e'*x2=x2$

$$\implies (x1*x1)*x2=x2 \quad \{x1/x, x2/y\}$$

$$\implies (x*x)*y=y$$

# Operadores

- Cláusula 31 [para\_into,19.1.1,6.1.2]  $(x*y)*y=x$ .
  - Into 19.1.1  $\text{'x2*(y2*y2)'=x2}$
  - From 6.1.2  $(x1*y1)*z1=\text{'x1*(y1*z1)'}$
  - Unificador  $\sigma = \{x2/x1, y2/y1, z1/y1\}$
  - Paramodulante  $\sigma((x1*y1)*z1=x2)$ 
    - $\implies (x1*y1)*y1=x1 \quad \{x1/x, y1/y\}$
    - $\implies (x*y)*y=x$
- Cláusula 167 [para\_into,20.1.1,6.1.1]  $x*x*y=y$ .
  - Into 20.1.1  $\text{'(x2*x2)*y2'=y2}$
  - From 6.1.1  $\text{'(x1*y1)*z1'=x1*(y1*z1)}$
  - Unificador  $\sigma = \{x1/x2, y1/x2, z1/y2\}$
  - Paramodulante  $\sigma(x1*(y1*z1)=y2)$ 
    - $\implies x2*(x2*y2)=y2 \quad \{x2/x, y2/y\}$
    - $\implies x*(x*y)=y$

# Operadores

- Cláusula 170 [para\_from,20.1.1,6.1.1]  $x=y*y*x$ .
  - From 20.1.1  $\text{'(x1*x1)*y1' = y1}$
  - Into 6.1.1  $\text{'(x2*y2)*z2' = x2*(y2*z2)}$
  - Unificador  $\sigma = \{x2/x1, y2/x1, z2/y1\}$
  - Paramodulante  $\sigma(y1=x2*(y2*z2))$ 
    - $\implies y1=x1*(x1*y1) \{y1/x, x1/y\}$
    - $\implies x=y*(y*x)$
- Cláusula 496 [para\_into,167.1.1.2,31.1.1]  $(x*y)*x=y$ .
  - Into 167.1.1.2  $x2*\text{'(x2*y2)' = y2}$
  - From 31.1.1  $\text{'(x1*y1)*y1' = x1}$
  - Unificador  $\sigma = \{x2/x1*y1, y2/y1\}$
  - Paramodulante  $\sigma(x2*x1=y2)$ 
    - $\implies (x1*y1)*x1=y1 \{x1/x, y1/y\}$
    - $\implies (x*y)*x=y$

# Operadores

- Cláusula 755 [para\_into, 496.1.1.1, 170.1.2]  $x*y=y*x$ .

Into 496.1.1.1  $\text{'(x2*y2)'} * x2 = y2$

From 170.1.2  $x1 = \text{'y1*(y1*x1)'}$

Unificador  $\sigma = \{x2/y1, y2/y1*x1\}$

Paramodulante  $\sigma((x1*x2)=y2)$

$\implies x1*y1=y1*x1 \{x1/x, y1/y\}$

$\implies x*y=y*x$

- Estadísticas

Analiz.	Gener.	Reten.	Sub. adel.	Sub. atrás	Seg.
72	5741	747	4994	45	0.26

# Operadores

- Mejora con demoduladores

```
----- "ej-7b.in" -----
1  include('ej-7a.in').
2
3  list(demodulators).
4  e * x = x.           % Ax. 1
5  x * e = x.           % Ax. 2
6  x^ * x = e.          % Ax. 3
7  x * x^ = e.          % Ax. 4
8  (x * y) * z = x * (y * z). % Ax. 5
9  end_of_list.
```

Analiz.	Gener.	Reten.	Sub. adel.	Sub. atrás	Seg.
68	5562	527	5035	7	0.26

# Operadores

- Mejora con demoduladores dinámicos

```
_____ "ej-7c.in" _____  
1 include('ej-7b.in').  
2  
3 set(dynamic_demod).
```

Analiz.	Gener.	Reten.	Sub. adel.	Sub. atrás	Seg.
10	219	13	206	1	0.01

# Operadores

- Modo autónomo

"ej-7d.in"

```
1  set(auto2).
2
3  op(400, xfy, *).
4  op(300, yf, ^).
5
6  list(usable).
7  e * x = x.           % Ax. 1
8  x * e = x.           % Ax. 2
9  x^ * x = e.          % Ax. 3
10 x * x^ = e.          % Ax. 4
11 (x * y) * z = x * (y * z). % Ax. 5
12 x = x.               % Ax. 6
13 x * x = e.
14 a * b != b * a.
15 end_of_list.
```

Analiz.	Gener.	Reten.	Sub. adel.	Sub. atrás	Seg.
12	90	20	87	8	0.18

## Bibliografía

---

- Alonso, J.A.; Fernández, A. y Pérez, M.J. *Razonamiento automático*. (en *Lógica formal (Orígenes, métodos y aplicaciones*, Ed. Kronos, 1995)
- Chang, C.L. y Lee, R.C.T. *Symbolic logic and mechanical theorem proving*. (Academic Press, 1973)
  - ▶ Cap. 8 “The equality relation”
- Genesereth, M.R. y Nilsson, N.J. *Logical foundations of Artificial Intelligence* (Morgan Kaufmann, 1987)
  - ▶ Cap. 9 “Relational resolution”
- Wos, L., Overbeek, R., Lusk, E. y Boyle, J. *Automated Reasoning: Introduction and Applications, (2nd ed.)* (McGraw–Hill, 1992)