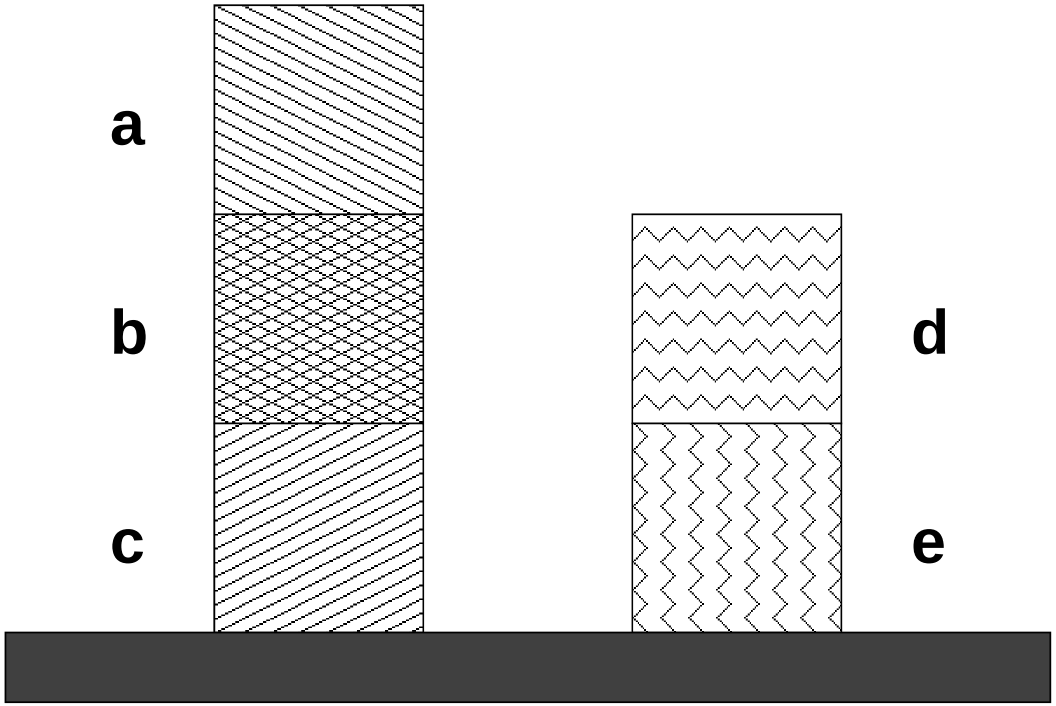
# *Razonamiento automático (2005–06)*

# *Tema 1: Lógica de primer orden*

José A. Alonso Jiménez

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

# Conceptualización del mundo de los bloque




- $\text{sobre}(x, y)$ se verifica si el bloque $x$ está colocado sobre el bloque $y$
- $\text{sobre\_mesa}(x)$ se verifica si el bloque $x$ está sobre la mesa
- Situación del ejemplo:

  $$\text{sobre}(a, b), \text{sobre}(b, c), \text{sobre\_mesa}(c), \text{sobre}(d, e), \text{sobre\_mesa}(e)$$

# Conceptualización del mundo de los bloque

- $\text{bajo}(x,y)$ se verifica si el bloque $x$ está debajo del bloque $y$
  $$(\forall x)(\forall y)[\text{bajo}(x,y) \leftrightarrow \text{sobre}(y,x)]$$
- $\text{encima}(x,y)$ se verifica si el bloque $x$ está encima del bloque $y$ pudiendo haber otros bloques entre ellos
  $$(\forall x)(\forall y)[\text{encima}(x,y) \leftrightarrow \text{sobre}(x,y) \vee (\exists z)[\text{sobre}(x,z) \wedge \text{encima}(z,y)]]$$
- $\text{libre}(x)$ se verifica si el bloque $x$ no tiene bloques encima
  $$(\forall x)[\text{libre}(x) \leftrightarrow \neg(\exists y)\,\text{sobre}(y,x)]$$
- $\text{pila}(x,y,z)$ se verifica si el bloque $x$ está sobre el $y$, el $y$ sobre el $z$ y el $z$ sobre la mesa
  $$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[\text{pila}(x,y,z) \leftrightarrow \text{sobre}(x,y) \wedge \text{sobre}(y,z) \wedge \text{sobre\_mesa}(z)]$$
- Prop.: Si $z,y,z$ es una pila entonces $y$ no está libre
  $$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[\text{pila}(x,y,z) \rightarrow \neg\,\text{libre}(y)]$$

# Conceptualización con funciones e igualdad

- $\text{es\_bloque}(x)$ se verifica si $x$ es un bloque
- $\text{superior}(x)$ es el bloque que está sobre el bloque $x$
- Situación del ejemplo:

  $$\text{es\_bloque}(a), \text{es\_bloque}(b), \text{es\_bloque}(c), \text{es\_bloque}(d), \text{es\_bloque}(e)$$

  $$\text{superior}(b) = a, \text{superior}(c) = b, \text{superior}(e) = d$$

- $\text{sobre\_mesa}(x)$ se verifica si el bloque $x$ está sobre la mesa

  $$(\forall x)[\text{sobre\_mesa}(x) \leftrightarrow \text{es\_bloque}(x) \land \neg(\exists y)\, \text{superior}(y) = x]$$

- $\text{libre}(x)$ se verifica si el bloque $x$ no tiene bloques encima

  $$(\forall x)[\text{libre}(x) \leftrightarrow \neg(\exists y)\, \text{superior}(x) = y]$$

- $\text{tope}(x)$ es el bloque libre que está encima de $x$

  $$(\forall x)[(\text{libre}(x) \rightarrow \text{tope}(x) = x) \land (\neg\text{libre}(x) \rightarrow \text{tope}(x) = \text{tope}(\text{superior}(x)))]$$

# Lenguaje de primer orden

- Símbolos lógicos:
  - Variables: $x, y, z, \dots, x_1, x_2, \dots$.
  - Conectivas: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.
  - Cuantificadores: $\forall, \exists$.
  - Símbolo de igualdad: $=$.
- Símbolos propios:
  - Símbolos de constantes: $a, b, c, \dots, a_1, a_2, \dots$.
  - Símbolos de predicado (con aridad): $P, Q, R, \dots, P_1, P_2, \dots$.
  - Símbolos de función (con aridad): $f, g, h, \dots, f_1, f_2, \dots$.
- Símbolos auxiliares: “$($”, “$)$”, “$,$”.
- Notación:
  - $L, L_1, L_2, \dots$ representan lenguajes de primer orden.
  - Var representa el conjunto de las variables.
- Los símbolos de predicados de aridad mayor que 1 se llaman de relaciones.

# Ejemplos de lenguajes de primer orden

- Lenguaje del mundo de los bloques:
  - Símbolos de constantes: $a, b, c, d, e$
  - Símbolos de predicado (y de relación):
    - – de aridad 1: $\mathrm{sobre\_mesa}, \mathrm{libre}, \mathrm{es\_bloque}$
    - – de aridad 2: $\mathrm{sobre}, \mathrm{bajo}, \mathrm{encima}$
    - – de aridad 3: $\mathrm{pila}$
  - Símbolos de función (de aridad 1): $\mathrm{superior}, \mathrm{tope}$
- Lenguaje de la aritmética:
  - Símbolos de constantes: $0, 1$
  - Símbolos de función:
    - – monaria: $s$ (siguiente)
    - – binarias: $+, \cdot$
  - Símbolo de predicado binario: $<$

# Términos

- Def. de término de un lenguaje de primer orden $L$:
  - Las variables son términos de $L$.
  - Las constantes de $L$ son términos de $L$.
  - Si $f$ es un símbolo de función $n$–aria de $L$ y $t_1, \dots, t_n$ son términos de $L$, entonces $f(t_1, \dots, t_n)$ es un término de $L$.
- Ejemplo: En el lenguaje de la aritmética,
  1. $+(\cdot(x, 1), s(y))$ es un término, que se suele escribir como $(x \cdot 1) + s(y)$
  2. $+(\cdot(x, <), s(y))$ no es un término
- Ejemplo: En el lenguaje del mundo de los bloques,
- Notación:
  - $s, t, t_1, t_2, \dots$ representan términos.
  - $\text{Térm}(L)$ representa el conjunto de los términos de $L$

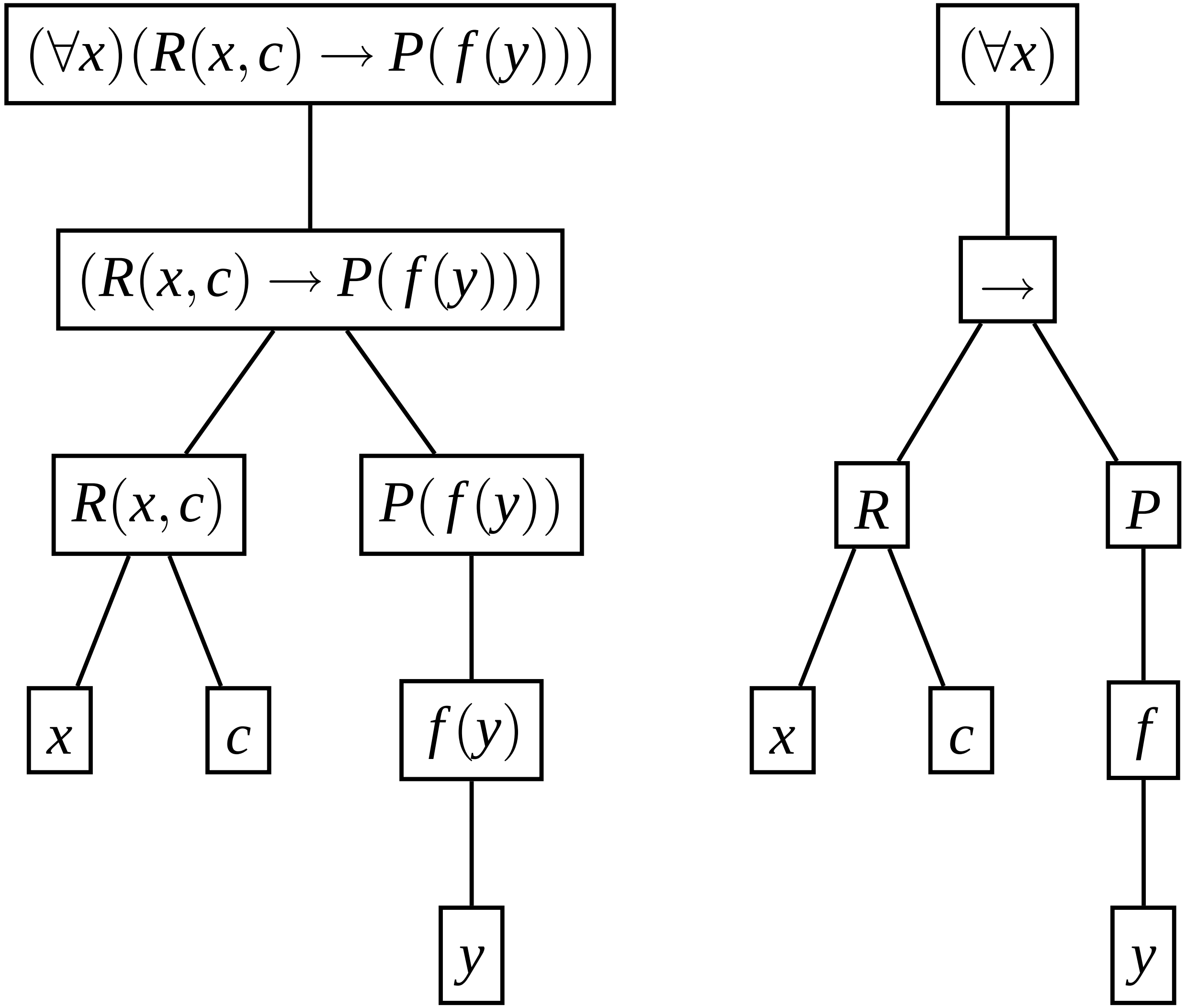
# Fórmulas atómicas

- Def. de fórmula atómica de un lenguaje de primer orden $L$:
  - Si $t_1$ y $t_2$ son términos de $L$, entonces $t_1 = t_2$ es una fórmula atómica de $L$.
  - Si $P$ es un símbolo de relación $n$–aria de $L$ y $t_1, \dots, t_n$ son términos de $L$, entonces $P(t_1, \dots, t_n)$ es una fórmula atómica de $L$.
- Ejemplos:
  - En el lenguaje de la aritmética,
    1. $< (\cdot(x, 1), s(y))$ es una fórmula atómica que se suele escribir como $x \cdot 1 < s(y)$
    2. $+(x,y) = \cdot(x,y)$ es una fórmula atómica que se suele escribir como $x + y = x \cdot y$
  - En el lenguaje del mundo de los bloques,
    1. $\mathrm{libre}(\mathrm{superior}(c))$ es una fórmula atómica.
    2. $\mathrm{tope}(c) = \mathrm{superior}(b)$ es una fórmula atómica.
- Notación:
  - $A, B, A_1, A_2, \dots$ representan fórmulas atómicas.
  - Atom$(L)$ representa el conjunto de las fórmulas atómicas de $L$.

# Fórmulas

- Def. de las fórmulas de $L$:
  - Las fórmulas atómicas de $L$ son fórmulas de $L$.
  - Si $F$ y $G$ son fórmulas de $L$, entonces $\neg F$, $(F \land G)$, $(F \lor G)$, $(F \to G)$ y $(F \leftrightarrow G)$ son fórmulas de $L$.
  - Si $F$ es una fórmula de $L$, entonces $(\forall x)F$ y $(\exists x)F$ son fórmulas de $L$.
- Ejemplos:
  - En el lenguaje de la aritmética,
    1. $(\forall x)(\exists y) < (x,y)$ es una fórmula que se escribe como $(\forall x)(\exists y)x < y$
    2. $(\forall x)(\exists y) + (x,y)$ no es una fórmula.
  - En el lenguaje del mundo de los bloques,
    1. $(\forall x)(\mathrm{tope}(x) = x \leftrightarrow \mathrm{libre}(x))$ es una fórmula.
- Notación:
  - $F, G, H, F_1, F_2, \dots$ representan fórmulas.
  - $\text{Fórm}(L)$ representa el conjunto de las fórmulas de $L$.

# Árboles de análisis (o de formación)



# Subfórmulas

- Def: El conjunto Subf$(F)$ de las subfórmulas de una fórmula $F$ se define recursivamente por:

$$\text{Subf}(F) = \begin{cases} \{F\}, & \text{si } F \text{ es una fórmula atómica;} \\ \{F\} \cup \text{Subf}(G), & \text{si } F = \neg G; \\ \{F\} \cup \text{Subf}(G) \cup \text{Subf}(H), & \text{si } F = G * H; \\ \{F\} \cup \text{Subf}(G), & \text{si } F = (\forall x)G; \\ \{F\} \cup \text{Subf}(G), & \text{si } F = (\exists x)G \end{cases}$$

- Ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{Subf}((\forall x)(R(x,c) \to P(f(y)))) = \{ \; & (\forall x)(R(x,c) \to P(f(y))), \\ & (R(x,c) \to P(f(y))), \\ & R(x,c), \\ & P(f(y))\} \end{aligned}$$

# Criterios de reducción de paréntesis

- Pueden eliminarse los paréntesis externos.
  $F \wedge G$ es una abreviatura de $(F \wedge G)$
- Precedencia de asociación de conectivas y cuantificadores: $\forall, \exists, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.
  $\forall x P(x) \rightarrow Q(x)$ es una abreviatura de $((\forall x)P(x)) \rightarrow Q(x)$
- Cuando una conectiva se usa repetidamente, se asocia por la derecha.

  $F \vee G \vee H$ es una abreviatura de $(F \vee (G \vee H))$

  $F \wedge G \wedge H \rightarrow \neg F \vee G$ es una abreviatura de $((F \wedge (G \wedge H)) \rightarrow (\neg F \vee G))$
- Los símbolos binarios pueden escribirse en notación infija.

  $x + y$ es una abreviatura de $+(x, y)$

  $x < y$ es una abreviatura de $<(x, y)$

# Conjuntos de variables

- Def.: El conjunto de las variables del término $t$ se define recursivamente por:

$$\mathsf{V}(t) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } t \text{ es una constante;} \\ \{x\}, & \text{si } t \text{ es una variable } x; \\ \mathsf{V}(t_1) \cup \cdots \cup \mathsf{V}(t_n), & \text{si } t \text{ es } f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

- Def.: El conjunto de las variables de la fórmula $F$ se define recursivamente por:

$$\mathsf{V}(F) = \begin{cases} \mathsf{V}(t_1) \cup \mathsf{V}(t_2), & \text{si } F \text{ es } t_1 = t_2; \\ \mathsf{V}(t_1) \cup \cdots \cup \mathsf{V}(t_n), & \text{si } F \text{ es } P(t_1, \dots, t_n); \\ \mathsf{V}(G), & \text{si } F \text{ es } \neg G; \\ \mathsf{V}(G) \cup \mathsf{V}(H), & \text{si } F \text{ es } G * H; \\ \mathsf{V}(G), & \text{si } F \text{ es } (\forall x)G; \\ \mathsf{V}(G), & \text{si } F \text{ es } (\exists x)G \end{cases}$$

- Ejemplos:
  - El conjunto de las variables de $(\forall x)(R(x,c) \to P(f(y)))$ es $\{x,y\}$.
  - El conjunto de las variables de $(\forall x)(R(a,c) \to P(f(y)))$ es $\{y\}$.

# Apariciones libres y ligadas

- Def.: Una aparición (u ocurrencia) de la variable $x$ en la fórmula $F$ es ligada si es en una subfórmula de $F$ de la forma $(\forall x)G$ ó $(\exists x)G$.
- Def.: Una aparición (u ocurrencia) de la variable $x$ en la fórmula $F$ es libre si no es ligada
- Ejemplo: Las apariciones ligadas son las subrayadas:

$$(\forall x)(P(\underline{x}) \rightarrow R(\underline{x},y)) \rightarrow ((\exists y)P(\underline{y}) \rightarrow R(z,x))$$

$$(\exists x)R(\underline{x},y) \vee (\forall y)P(\underline{y})$$

$$(\forall x)(P(\underline{x}) \rightarrow (\exists y)R(\underline{x},\underline{y}))$$

$$P(x) \rightarrow R(x,y)$$

# Variables libres y ligadas

- Def.: La variable $x$ es libre en $F$ si tiene una aparición libre en $F$.
- Def.: La variable $x$ es ligada en $F$ si tiene una aparición ligada en $F$.
- Prop.: El conjunto de las variables libres de una fórmula $F$ es:

$$\mathsf{VL}(F) = \begin{cases} \mathsf{V}(t_1) \cup \mathsf{V}(t_2), & \text{si } F \text{ es } t_1 = t_2; \\ \mathsf{V}(t_1) \cup \cdots \cup \mathsf{V}(t_n), & \text{si } F \text{ es } P(t_1, \dots, t_n); \\ \mathsf{VL}(G), & \text{si } F \text{ es } \neg G; \\ \mathsf{VL}(G) \cup \mathsf{VL}(H), & \text{si } F \text{ es } G * H; \\ \mathsf{VL}(G) \setminus \{x\}, & \text{si } F \text{ es } (\forall x)G; \\ \mathsf{VL}(G) \setminus \{x\}, & \text{si } F \text{ es } (\exists x)G \end{cases}$$

- Ejemplo:

| Fórmula | Ligadas | Libres |
|---|---|---|
| $(\forall x)(P(x) \to R(x,y)) \to ((\exists y)P(y) \to R(x,z))$ | $x,y$ | $x,y,z$ |
| $(\forall x)(P(x) \to (\exists y)R(x,y))$ | $x,y$ | |
| $(\forall z)(P(x) \to R(x,y))$ | | $x,y$ |

# Fórmulas cerradas y básicas

- Fórmula cerradas:
  - Def.: Una fórmula cerrada (o sentencia) es una fórmula sin variables libres.
  - Ejemplos: $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)R(x,y))$ es cerrada.
    $(\exists x)R(x,y) \vee (\forall y)P(y)$ no es cerrada.
- Fórmulas básicas:
  - Def.: Una fórmula básica es una fórmula sin variables.
  - Ejemplos: $P(a) \rightarrow R(a,b)$ es básica.
    $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)R(x,y))$ no es básica.

# Sustituciones

- Def.: Una sustitución $\sigma$ (de $L$) es una aplicación $\sigma$ : Var $\longrightarrow$ Térm$(L)$.
- Ejemplo: La aplicación $\sigma$ de $Var$ en los términos de la aritmética tal que
  $\sigma(x) = s(0), \sigma(y) = x + y$ y $\sigma(z) = z$ para $z \in$ Var $\setminus \{x, y\}$
  es una sustitución.
- Notación: $[x_1/t_1, x_2/t_2, \ldots, x_n/t_n]$ representa la sustitución $\sigma$ definida por
  $$\sigma(x) = \begin{cases} t_i, & \text{si } x \text{ es } x_i; \\ x, & \text{si } x \notin \{x_1, \ldots, x_n\} \end{cases}$$
- Ejemplo: La sustitución del ejemplo anterior se representa por
  $[x/s(0), y/x + y]$
- Notación: $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$ representarán sustituciones.

# Aplicación de sustituciones a términos

- Def.: $t[x_1/t_1,\dots,x_n/t_n]$ es el término obtenido sustituyendo en $t$ las apariciones de $x_i$ por $t_i$.
- Def.: La extensión de $\sigma$ a términos es la aplicación $\sigma$ : Térm$(L) \to$ Térm$(L)$ definida por

$$t\sigma = \begin{cases} c, & \text{si } t \text{ es una constante } c; \\ \sigma(x), & \text{si } t \text{ es una variable } x; \\ f(t_1\sigma,\dots,t_n\sigma), & \text{si } t \text{ es } f(t_1,\dots,t_n) \end{cases}$$

- Si $\sigma = [x/f(y,a), y/z]$, entonces
  - $a\sigma = a$, donde $a$ es una constante.
  - $w\sigma = w$, donde $w$ es una variable distinta de $x$ e $y$.
  - $h(a,x,w)\sigma = h(a\sigma,x\sigma,w\sigma) = h(a,f(y,a),w)$
  - $f(x,y)\sigma = f(x\sigma,y\sigma) = f(f(y,a),z)$
  - $h(a,f(x,y),w)\sigma = h(a\sigma,f(x,y)\sigma,w\sigma) = h(a,f(f(y,a),z),w)$

# Composición de sustituciones

- Diferencia entre sustituciones simultáneas y consecutivas:
  - $g(x,z)[x/g(z,b),z/a] = g(g(z,b),a)$
  - $g(x,z)[x/g(z,b)][z/a] = g(g(z,b),z)[z/a] = g(g(a,b),a)$
- Cálculo de la composición: Si $\sigma_1 = [x/f(z,a),y/w]$ y $\sigma_2 = [x/b,z/g(w)]$, entonces
  - $x\sigma_1\sigma_2 = (x\sigma_1)\sigma_2 = f(z,a)\sigma_2 = f(z\sigma_2,a\sigma_2) = f(g(w),a)$
  - $y\sigma_1\sigma_2 = (y\sigma_1)\sigma_2 = w\sigma_2 = w$
  - $z\sigma_1\sigma_2 = (z\sigma_1)\sigma_2 = z\sigma_2 = g(w)$
  - $w\sigma_1\sigma_2 = (w\sigma_1)\sigma_2 = w\sigma_2 = w$

  Por tanto, $\sigma_1\sigma_2 = [x/f(g(w),a),y/w,z/g(w)]$.

  Comprobación:

  $$\begin{aligned} h(y,x)\sigma_1\sigma_2 &= (h(y,x)\sigma_1)\sigma_2 = h(w,f(z,a))\sigma_2 = h(w\sigma_2,f(z,a)\sigma_2) \\ &= h(w,f(g(w),a)) \end{aligned}$$

  $$h(y,x)\sigma_1\sigma_2 = h(y,x)[x/f(g(w),a),y/w,z/g(w)] = h(w,f(g(w),a))$$

# Aplicación de sustituciones a fórmulas

- Def.: $F[x_1/t_1,\dots,x_n/t_n]$ es la fórmula obtenida sustituyendo en $F$ las apariciones libres de $x_i$ por $t_i$.
- Def.: La extensión de $\sigma$ a fórmulas es la aplicación $\sigma$ : Fórm$(L) \to$ Fórm$(L)$ definida por

$$F\sigma = \begin{cases} P(t_1\sigma,\dots,t_n\sigma), & \text{si } F \text{ es la fórmula atómica } P(t_1,\dots,t_n); \\ t_1\sigma = t_2\sigma, & \text{si } F \text{ es la fórmula } t_1 = t_2; \\ \neg(G\sigma), & \text{si } F \text{ es } \neg G; \\ G\sigma * H\sigma, & \text{si } F \text{ es } G * H; \\ (Qx)(G\sigma_x), & \text{si } F \text{ es } (Qx)G \text{ y } Q \in \{\forall,\exists\} \end{cases}$$

donde $\sigma_x$ es la sustitución definida por

$$\sigma_x(y) = \begin{cases} x, & \text{si } y \text{ es } x; \\ \sigma(y), & \text{si } y \text{ es distinta de } x \end{cases}$$

# Ejemplos de aplicación de sustituciones a fórmulas

- Ejemplos: Si $\sigma = [x/f(y), y/b]$, entonces

1. $$\begin{aligned} ((\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x,y)))\sigma &= (\forall x)((Q(x) \rightarrow R(x,y))\sigma_x) \\ &= (\forall x)(Q(x)\sigma_x \rightarrow R(x,y)\sigma_x) \\ &= (\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x,b)) \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} (Q(x) \rightarrow (\forall x)R(x,y))\sigma &= Q(x)\sigma \rightarrow ((\forall x)R(x,y))\sigma \\ &= Q(f(y)) \rightarrow (\forall x)(R(x,y)\sigma_x) \\ &= Q(f(y)) \rightarrow (\forall x)R(x,b) \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} ((\forall x)(Q(x) \rightarrow (\forall y)R(x,y)))\sigma &= (\forall x)((Q(x) \rightarrow (\forall y)R(x,y))\sigma_x) \\ &= (\forall x)(Q(x)\sigma_x \rightarrow ((\forall y)R(x,y))\sigma_x) \\ &= (\forall x)(Q(x) \rightarrow (\forall y)(R(x,y)\sigma_{xy})) \\ &= (\forall x)(Q(x) \rightarrow (\forall y)R(x,y)) \end{aligned}$$

# Sustituciones libres

- Def.: Una sustitución se denomina libre para una fórmula cuando todas las apariciones de variables introducidas por la sustitución en esa fórmula resultan libres.
- Ejemplos:
  - $[y/x]$ no es libre para $(\exists x)(x < y)$
    $(\exists x)(x < y)[y/x] = (\exists x)(x < x)$
  - $[y/g(y)]$ es libre para $(\forall x)(P(x) \to Q(x, f(y)))$
    $(\forall x)(P(x) \to Q(x, f(y)))[y/g(y)] = (\forall x)(P(x) \to Q(x, f(g(y))))$
  - $[y/g(x)]$ no es libre para $(\forall x)(P(x) \to Q(x, f(y)))$
    $(\forall x)(P(x) \to Q(x, f(y)))[y/g(x)] = (\forall x)(P(x) \to Q(x, f(g(x))))$
- Convenio: Al escribir $F\sigma$ supondremos que $\sigma$ es libre para $F$.

# Semántica: Estructuras, asignaciones e interpretaciones

- Una estructura del lenguaje $L$ es un par $\mathscr{I} = (U, I)$ tal que:
  - $U$ es un conjunto no vacío, denominado universo de la estructura;
  - $I$ es una función con dominio el conjunto de símbolos propios de $L$ tal que
    - si $c$ es una constante de $L$, entonces $I(c) \in U$;
    - si $f$ es un símbolo de función $n$–aria de $L$, entonces $I(f) : U^n \to U$;
    - si $P$ es un símbolo de relación 0–aria de $L$, entonces $I(P) \in \{1, 0\}$;
    - si $R$ es un símbolo de relación $n$–aria ($n > 0$) de $L$, entonces $I(R) \subseteq U^n$;
- Una asignación $A$ en una estructura $(U, I)$ es una función $A :$ Var $\to U$ que hace corresponder a cada variable del alfabeto un elemento del universo de la estructura.
- Una interpretación de $L$ es un par $(\mathscr{I}, A)$ formado por una estructura $\mathscr{I}$ de $L$ y una asignación $A$ en $\mathscr{I}$.
- Notación: A veces se usa para los valores de verdad V y F en lugar de 1 y 0.

# Ejemplos de estructuras

Sea $L$ el lenguaje de la aritmética cuyos símbolos propios son:

constante: $0$;

símbolo de función monaria: $s$;

símbolo de función binaria: $+$ y

símbolo de relación binaria: $\leq$

- Primera estructura de $L$:

  $U_1 = \mathbb{N}$

  $I_1(0) = 0$

  $I_1(s) = \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$ (sucesor)

  $I_1(+) = \{(a, b, a+b) : a, b \in \mathbb{N}\}$ (suma)

  $I_1(\leq) = \{(n, m) : n, m \in \mathbb{N}, n \leq m\}$ (menor o igual)

- Segunda estructura de $L$:

  $U_2 = \{0, 1\}^*$ (cadenas de $0$ y $1$)

  $I_2(0) = \varepsilon$ (cadena vacía)

  $I_2(s) = \{(w, w1) : w \in \{0, 1\}^*\}$ (siguiente)

  $I_2(+) = \{(w_1, w_2, w_1 w_2) : w_1, w_2 \in \{0, 1\}^*\}$ (concatenación)

  $I_2(\leq) = \{(w_1, w_2) : w_1, w_2 \in \{0, 1\}^*, w_1$ es prefijo de $w_2\}$ (prefijo)

# Ejemplos de estructuras

- Tercera estructura de $L$:
  $U_3 = \{abierto, cerrado\}$
  $I_3(0) = cerrado$
  $I_3(s) = \{(abierto, cerrado), (cerrado, abierto)\}$
  $I_3(+) = \{\ (abierto, abierto, abierto), (abierto, cerrado, abierto),$
  $\quad (cerrado, abierto, abierto), (cerrado, cerrado, cerrado)\}$
  $I_3(\leq) = \{\ (abierto, abierto), (cerrado, abierto), (cerrado, cerrado)\}$

| $e$ | $I_3(s)(e)$ |
|---|---|
| $abierto$ | $cerrado$ |
| $cerrado$ | $abierto$ |

| $I_3(+)$ | $abierto$ | $cerrado$ |
|---|---|---|
| $abierto$ | $abierto$ | $abierto$ |
| $cerrado$ | $abierto$ | $cerrado$ |

| $I_3(\leq)$ | $abierto$ | $cerrado$ |
|---|---|---|
| $abierto$ | 1 | 0 |
| $cerrado$ | 1 | 1 |

# Evaluación de términos

- Def.: Dada una estructura $\mathscr{I} = (U, I)$ de $L$ y una asignación $A$ en $\mathscr{I}$, se define la función de evaluación de términos $\mathscr{I}_A$ : Term$(L) \rightarrow U$ por

$$\mathscr{I}_A(t) = \begin{cases} I(c), & \text{si } t \text{ es una constante } c; \\ A(x), & \text{si } t \text{ es una variable } x; \\ I(f)(\mathscr{I}_A(t_1), \dots, \mathscr{I}_A(t_n)), & \text{si } t \text{ es } f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

- $\mathscr{I}_A(t)$ se lee "el valor de $t$ en $\mathscr{I}$ respecto de $A$".
- Ejemplos: Sean $L$ el lenguaje de la página 24 y $t$ el término $s(+(x, s(0)))$.
  - Si $\mathscr{I}$ es la primera estructura y $A(x) = 3$, entonces

$$\begin{aligned} \mathscr{I}_A(t) &= \mathscr{I}_A(s(+(x, s(0)))) && = I(s)(\mathscr{I}_A(+(x, s(0)))) = \\ &= I(s)(I(+)(\mathscr{I}_A(x), \mathscr{I}_A(s(0)))) && = I(s)(I(+)(A(x), \mathscr{I}_A(s(0)))) = \\ &= I(s)(I(+)(3, I(s)(\mathscr{I}_A(0)))) && = I(s)(I(+)(3, I(s)(I(0)))) = \\ &= I(s)(I(+)(3, I(s)(0))) && = I(s)(I(+)(3, 1)) = \\ &= I(s)(4) && = 5 \end{aligned}$$

# Evaluación de términos

- Ejemplos (cont.)
  - Si $\mathscr{I}$ es la segunda estructura y $A(x) = 10$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathscr{I}_A(t) &= \mathscr{I}_A(s(+(x,s(0)))) && = I(s)(\mathscr{I}_A(+(x,s(0)))) = \\
&= I(s)(I(+)(\mathscr{I}_A(x),\mathscr{I}_A(s(0)))) && = I(s)(I(+)(A(x),\mathscr{I}_A(s(0)))) = \\
&= I(s)(I(+)(10,I(s)(\mathscr{I}_A(0)))) && = I(s)(I(+)(10,I(s)(I(0)))) = \\
&= I(s)(I(+)(10,I(s)(\varepsilon))) && = I(s)(I(+)(10,1)) = \\
&= I(s)(101) && = 10111
\end{aligned}$$

  - Si $\mathscr{I}$ es la tercera estructura y $A(x) = abierto$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathscr{I}_A(t) &= \mathscr{I}_A(s(+(x,s(0)))) && = I(s)(\mathscr{I}_A(+(x,s(0)))) = \\
&= I(s)(I(+)(\mathscr{I}_A(x),\mathscr{I}_A(s(0)))) && = I(s)(I(+)(A(x),\mathscr{I}_A(s(0)))) = \\
&= I(s)(I(+)(abierto,I(s)(\mathscr{I}_A(0)))) && = I(s)(I(+)(abierto,I(s)(I(0)))) = \\
&= I(s)(I(+)(abierto,I(s)(cerrado))) && = I(s)(I(+)(abierto,abierto)) = \\
&= I(s)(abierto) && = cerrado
\end{aligned}$$

# Evaluación de términos

- Ejemplo anterior con notación reducida e infija:
  Sean $L$ el lenguaje de la página 24 y $t$ el término $s(x+s(0))$.
  - Si $\mathscr{I}$ es la primera estructura y $A(x) = 3$, entonces

$$\begin{aligned}\mathscr{I}_A(t) &= \mathscr{I}_A(s(x+s(0))) & &= s^I(3 +^I s^I(0^I)) = \\ &= s^I(3 +^I s^I(0)) & &= s^I(3 +^I 1) = \\ &= s^I(4) & &= 5\end{aligned}$$

  - Si $\mathscr{I}$ es la segunda estructura y $A(x) = 10$, entonces

$$\begin{aligned}\mathscr{I}_A(t) &= \mathscr{I}_A(s(x+s(0))) & &= s^I(10 +^I s^I(0^I)) = \\ &= s^I(10 +^I s^I(\varepsilon)) & &= s^I(10 +^I 1) = \\ &= s^I(101) & &= 1011\end{aligned}$$

  - Si $\mathscr{I}$ es la tercera estructura y $A(x) = abierto$, entonces

$$\begin{aligned}\mathscr{I}_A(t) &= \mathscr{I}_A(s(x+s(0))) & &= s^I(abierto +^I s^I(0^I)) = \\ &= s^I(abierto +^I s^I(cerrado)) & &= s^I(abierto +^I abierto) = \\ &= s^I(abierto) & &= cerrado\end{aligned}$$

# Conceptos auxilares para la evaluación de fórmulas

- Variante de una asignación: Sea $A$ una asignación en la estructura $(U,I)$ y $u \in U$. Mediante $A[x/u]$ se representa la asignación definida por

$$A[x/u](y) = \begin{cases} u, & \text{si } y \text{ es } x; \\ A(y) & \text{si } y \text{ es distinta de } x \end{cases}$$

- Función de verdad de una relación: Si $R$ es una relación $n$–aria en $U$ (i.e. $R \subseteq U^n$), entonces la función de verdad de $R$ es la función $H_R : U^n \to \mathbb{B}$ definida por

$$H_R(u_1,\ldots,u_n) = \begin{cases} 1, & \text{si } (u_1,\ldots,u_n) \in R; \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- La función de verdad de la igualdad en $U$ es la función $H_= : U^2 \to \mathbb{B}$ definida por

$$H_=(u_1,u_2) = \begin{cases} 1, & \text{si } u_1 = u_2; \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

# Evaluación de fórmulas

- Def.: Dada una estructura $\mathscr{I} = (U, I)$ de $L$ y una asignación $A$ sobre $\mathscr{I}$, se define la función de evaluación de fórmulas $\mathscr{I}_A$ : Fórm$(L) \to \mathbb{B}$ por
  - Si $F$ es $t_1 = t_2$, $\quad \mathscr{I}_A(F) = H_=(\mathscr{I}_A(t_1), I_A(t_2))$
  - Si $F$ es $P(t_1, \dots, t_n)$, $\quad \mathscr{I}_A(F) = H_{I(P)}(\mathscr{I}_A(t_1), \dots, \mathscr{I}_A(t_n))$
  - Si $F$ es $\neg G$, $\quad \mathscr{I}_A(F) = H_\neg(\mathscr{I}_A(G))$
  - Si $F$ es $G * H$, $\quad \mathscr{I}_A(F) = H_*(\mathscr{I}_A(G), \mathscr{I}_A(H))$
  - Si $F$ es $(\forall x)G$, $\quad \mathscr{I}_A(F) = \begin{cases} 1, & \text{si para todo } u \in U \text{ se tiene} \\ & \mathscr{I}_{A[x/u]}(G) = 1; \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$
  - Si $F$ es $(\exists x)G$, $\quad \mathscr{I}_A(F) = \begin{cases} 1, & \text{si existe algún } u \in U \text{ tal que} \\ & \mathscr{I}_{A[x/u]}(G) = 1; \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$
- $\mathscr{I}_A(F)$ se lee "el valor de $F$ en $\mathscr{I}$ respecto de $A$".

# Ejemplo de evaluación de fórmulas

- Ejemplo: Evaluación de $(\exists y)P(x,y)$ en la estructura $\mathscr{I} = (U,I)$ respecto de la asignación $A$ tales que $U = \{1,2\}$, $I(P) = \{(1,1),(2,2)\}$ y $A(x) = 1$
  - En notación completa:

$$\mathscr{I}_A((\exists y)P(x,y)) = \mathsf{V} \Leftrightarrow \mathscr{I}_{A[y/1]}P(x,y) = \mathsf{V} \text{ ó } \mathscr{I}_{A[y/2]}P(x,y) = \mathsf{V}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{I}_{A[y/1]}P(x,y) &= H_{I(P)}(\mathscr{I}_{A[y/1]}(x), \mathscr{I}_{A[y/1]}(y)) \\ &= H_{I(P)}(A[y/1](x), A[y/1](y)) \\ &= H_{I(P)}(1,1) \\ &= \mathsf{V} \end{aligned}$$

Luego, $\mathscr{I}_A((\exists y)P(x,y)) = \mathsf{V}$.

  - En notación reducida:

$$\mathscr{I}_A((\exists y)P(x,y)) = \mathsf{V} \Leftrightarrow \mathscr{I}_{A[y/1]}P(x,y) = \mathsf{V} \text{ ó } \mathscr{I}_{A[y/2]}P(x,y) = \mathsf{V}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{I}_{A[y/1]}P(x,y) &= P^I(A[y/1](x), A[y/1](y)) \\ &= P^I(1,1) \\ &= \mathsf{V} \end{aligned}$$

Luego, $\mathscr{I}_A((\exists y)P(x,y)) = \mathsf{V}$.

# Dependencias en la evaluación de fórmulas

- Ejemplo de dependencia del universo: Sea $G$ la fórmula $(\forall x)(\exists y)R(y,x)$, entonces
  - $\mathscr{I}_A(G) = $ V, siendo $\mathscr{I} = (\mathbb{Z}, I), I(R) = <$ y $A$ una asignación en $\mathscr{I}$.
  - $\mathscr{I}_A(G) = $ F, siendo $\mathscr{I} = (\mathbb{N}, I), I(R) = <$ y $A$ una asignación en $\mathscr{I}$.
- Ejemplo de dependencia de la estructura: Sea $G$ la fórmula $(\exists x)(\forall y)R(x,y)$, entonces
  - $\mathscr{I}_A(G) = $ V, siendo $\mathscr{I} = (\mathbb{N}, I), I(R) = \leq$ y $A$ una asignación en $\mathscr{I}$.
  - $\mathscr{I}_A(G) = $ F, siendo $\mathscr{I} = (\mathbb{N}, I), I(R) = \geq$ y $A$ una asignación en $\mathscr{I}$.
- Ejemplo de dependencia de la asignación: Sea $G$ la fórmula $(\forall y)R(x,y)$, entonces
  - $\mathscr{I}_A(G) = $ V, siendo $\mathscr{I} = (\mathbb{N}, I), I(R) = \leq$ y $A$ una asignación en $\mathscr{I}$ tal que $A(x) = 0$.
  - $\mathscr{I}_A(G) = $ F, siendo $\mathscr{I} = (\mathbb{N}, I), I(R) = \leq$ y $A$ una asignación en $\mathscr{I}$ tal que $A(x) = 5$.

# Evaluación y variables libres

- Sea $t$ un término de $L$, $F$ una fórmula de $L$ e $\mathscr{I}$ una estructura de $L$.
  - Si $A$ y $B$ son dos asignaciones en $\mathscr{I}$ que coinciden sobre las variables de $t$, entonces $\mathscr{I}_A(t) = \mathscr{I}_B(t)$.
  - Si $A$ y $B$ son dos asignaciones en $\mathscr{I}$ que coinciden sobre las variables libres de $F$, entonces $\mathscr{I}_A(F) = \mathscr{I}_B(F)$.
  - Si $t$ no tiene variables, entonces $\mathscr{I}_A(F) = \mathscr{I}_B(F)$ para cualesquiera asignaciones $A$ y $B$ en $\mathscr{I}$. Se suele escribir simplemente $\mathscr{I}(t)$.
  - Si $F$ es cerrada, entonces $\mathscr{I}_A(F) = \mathscr{I}_B(F)$ para cualesquiera asignaciones $A$ y $B$ en $\mathscr{I}$. Se suele escribir simplemente $\mathscr{I}(F)$.
  - Si las variables libres de $F$ son $x_1, \dots, x_n$, entonces son equivalentes
    - $\mathscr{I}_A(F) = 1$, para toda asignación $A$ en $\mathscr{I}$.
    - $\mathscr{I}((\forall x_1) \dots (\forall x_n)F) = 1$.

# Realización de una fórmula

- Sean $F$ una fórmula de $L$, $\mathscr{I}$ una estructura de $L$ y $A$ una asignación en $\mathscr{I}$.
  - $(\mathscr{I},A)$ es una realización de $F$ si $\mathscr{I}_A(F) = 1$.
    Se representa por $\mathscr{I}_A \models F$.
  - $(\mathscr{I},A)$ no es una realización de $F$ si $\mathscr{I}_A(F) = 0$.
    Se representa por $\mathscr{I}_A \not\models F$.
  - $F$ se verifica en $\mathscr{I}$ respecto de $A$ si $\mathscr{I}_A \models F$.
  - $F$ no se verifica en $\mathscr{I}$ respecto de $A$ si $\mathscr{I}_A \not\models F$.
- Ejemplos: Sea $\mathscr{I} = (\mathbb{N}, I)$ una estructura tal que $I(R) = \leq$.
  - Si $A$ es una asignación en $\mathscr{I}$ tal que $A(x) = 0$. entonces
    $\mathscr{I}_A \models (\forall y)R(x,y)$,
  - Si $A$ es una asignación en $\mathscr{I}$ tal que $A(x) = 5$, entonces
    $\mathscr{I}_A \not\models (\forall y)R(x,y)$,

# Satisfacibilidad en una estructura

- Def.: Sean $F$ una fórmula de $L$ e $\mathscr{I}$ una estructura de $L$.
  - $F$ es satisfacible en $\mathscr{I}$ si existe alguna asignación $A$ en $I$ tal que $\mathscr{I}_A \models F$.
  - $F$ es insatisfacible en $\mathscr{I}$ si no existe ninguna asignación $A$ en $I$ tal que $\mathscr{I}_A \models F$.
- Ejemplos: Sea $\mathscr{I} = (\mathbb{N}, I)$ una estructura tal que $I(R) = \leq$.
  - $(\forall y)R(x,y)$ es satisfacible en $\mathscr{I}$.

    $\mathscr{I}_A \models (\forall y)R(x,y)$, con $A(x) = 0$.
  - $(\forall x)R(x,y)$ es insatisfacible en $\mathscr{I}$.

    No existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$, se tenga $m \leq n$.
- Ejemplos: Sea $\mathscr{I} = (\mathbb{N}, I)$ una estructura tal que $I(R) = \geq$.
  - $(\forall y)R(x,y)$ es insatisfacible en $\mathscr{I}$.

    No existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tenga $m \geq n$.
  - $(\forall x)R(x,y)$ es satisfacible en $\mathscr{I}$.

    $\mathscr{I}_A \models (\forall y)R(x,y)$, con $A(x) = 0$.

# Validez en una estructura

- Def.: Sean $F$ una fórmula de $L$ e $\mathscr{I}$ una estructura de $L$.
  - $F$ es válida en $\mathscr{I}$ si, para toda asignación $A$ en $\mathscr{I}$, $\mathscr{I}_A \models F$.
    Se representa por $\mathscr{I} \models F$.
  - $F$ no es válida en $\mathscr{I}$ si, para alguna asignación $A$ en $\mathscr{I}$, $\mathscr{I}_A \not\models F$.
    Se representa por $\mathscr{I} \not\models F$.
- Ejemplos: Sea $\mathscr{I} = (\mathbb{N}, I)$ una estructura tal que $I(R) = <$.
  - $\mathscr{I} \models (\exists y)R(x,y)$.
    Si $A$ es una asignación en $\mathscr{I}$, entonces $\mathscr{I}_A \models (\exists y)R(x,y)$
    $I_{A[y/A(x)+1]}(R(x,y)) = \text{V}$
  - $\mathscr{I} \not\models (\forall y)R(x,y)$.
    Sea $A$ una asignación en $\mathscr{I}$ tal que $A(x) = 5$. Entonces $\mathscr{I}_A \not\models (\forall y)R(x,y)$
    $I_{A[y/3]}(R(x,y)) = \text{F}$

# Satisfacibilidad y validez en una estructura

- Satisfacibilidad y validez en una estructura para sentencias
  - Sea $F$ una sentencia de $L$ e $\mathscr{I}$ una estructura de $L$.
    - $F$ es válida en $\mathscr{I}$ syss $F$ es satisfacible en $\mathscr{I}$.
    - Se cumple una, y sólo una, de las siguientes condiciones
      1. $F$ es válida en $\mathscr{I}$.
      2. $\neg F$ es válida en $\mathscr{I}$.
- Cierres cuantificacionales:
  - Sea $F$ una fórmula de $L$, $\mathscr{I}$ una estructura de $L$ y $\{x_1, \dots, x_n\}$ el conjunto de las variables libres de $F$.
    - $F$ es válida en $\mathscr{I}$ syss $(\forall x_1) \dots (\forall x_n) F$ es válida en $\mathscr{I}$
    - $F$ es satisfacible en $\mathscr{I}$ syss $(\exists x_1) \dots (\exists x_n) F$ es satisfacible en $\mathscr{I}$

# Modelo de una fórmula

- Def.: Sean $F$ una fórmula de $L$ e $\mathscr{I}$ una estructura de $L$.
  - $\mathscr{I}$ es un modelo de $F$ si $\mathscr{I} \models F$.
  - $\mathscr{I}$ no es un modelo de $F$ si $\mathscr{I} \not\models F$.
- Ejemplos: Sea $\mathscr{I} = (\mathbb{N}, I)$ una estructura tal que $I(R) = <$. Entonces
  $\mathscr{I} \models (\exists y)R(x,y)$. $\mathscr{I} \not\models (\forall y)R(x,y)$.
- Ejemplos: Sea $F$ la fórmula $(\forall x) f(x,e) = x$.
  Las siguientes estructuras son modelos de $F$.
  - $(U,I)$ con $U = \mathbb{N}$, $I(e) = 0$ e $I(f)$ como la suma.
  - $(U,I)$ con $U = \{0,1\}^*$, $I(e) = \varepsilon$ e $I(f)$ la concatenación.
  - $(U,I)$ con $U = \mathbb{B}$, $I(e) = 1$ e $I(f) = H_\wedge$

  Las siguientes estructuras no son modelo de $F$
  - $(U,I)$ con $U = \mathbb{N}$, $I(e) = 5$ e $I(f)$ como la suma.
  - $(U,I)$ con $U = \mathbb{N}$, $I(e) = 0$ e $I(f)$ como el producto.

# Satisfacibilidad de una fórmula

- Def.: Sea $F$ una fórmula de $L$.
  - $F$ es satisfacible si tiene alguna realización (i.e. existe una estructura $\mathscr{I}$ y una asignación $A$ en $\mathscr{I}$ tales que $\mathscr{I}_A(F) = 1$).
  - $F$ es insatisfacible si no tiene ninguna realización (i.e. para toda estructura $\mathscr{I}$ y toda asignación $A$ se tiene que $\mathscr{I}_A(F) = 0$).
- Ejemplos:
  - $(\forall y)R(x,y)$ es satisfacible

    $\mathscr{I}_A((\forall y)R(x,y)) = 1$, siendo $\mathscr{I} = (\mathbb{N}, I)$, $I(R) = \leq$ y $A(x) = 0$.
  - $(\exists x)P(x) \land (\forall x)\neg P(x)$ es insatisfacible.

# Satisfacibilidad y modelo

- Sea $F$ una fórmula cerrada. Son equivalentes:
  - $F$ es satisfacible.
  - $F$ tiene modelo.
- Si $F$ es insatisfacible, entonces no tiene ningún modelo.
- Existen fórmulas satisfacibles que tienen realizaciones, pero no tienen modelos. Por ejemplo, sea $F$ la fórmula $x \neq y$.
  - La fórmula $F$ es satisfacible

    $\mathscr{I}_A(F) = 1$, siendo $\mathscr{I} = (\{p,q\}, I), A(x) = p, A(y) = q$
  - La fórmula $F$ no tiene modelo

    Sea $\mathscr{I}$ una estructura. Existe una asignación $A$ en $\mathscr{I}$ tal que $A(x) = A(y)$. Luego, $\mathscr{I}_A(F) = 0$ y $\mathscr{I} \not\models F$.

# Validez de una fórmula

- Def.: Sea $F$ una fórmula de $L$.
  - $F$ es válida si toda estructura de $L$ es modelo de $F$ (i.e. para toda estructura $\mathscr{I}$ y toda asignación $A$ se tiene que $\mathscr{I}_A(F) = 1$). Se representa por $\models F$.
  - $F$ no es válida si alguna estructura de $L$ no es modelo de $F$ (i.e. existe alguna estructura $\mathscr{I}$ y alguna asignación $A$ tales que $\mathscr{I}_A(F) = 0$). Se representa por $\not\models F$.
- Ejemplos:
  - $(\exists x)P(x) \vee (\forall x)\neg P(x)$ es válida.
  - $(\forall y)R(x,y)$ no es válida.

    $\mathscr{I}_A((\forall y)R(x,y)) = 0$, siendo $\mathscr{I} = (\mathbb{N}, I)$, $I(R) = \leq$ y $A(x) = 5$.
  - $(\exists x)(P(x) \rightarrow (\forall y)P(y))$ es válida.

# Satisfacibilidad y validez

- Prop.: $F$ es válida syss $\neg F$ es insatisfacible.

  $F$ es válida

  $\iff$ para toda estructura $\mathscr{I}$ y toda asignación $A$ se tiene que $\mathscr{I}_A(F) = 1$

  $\iff$ para toda estructura $\mathscr{I}$ y toda asignación $A$ se tiene que $\mathscr{I}_A(\neg F) = 0$

  $\iff \neg F$ es insatisfacible.

- Si $F$ es válida, entonces $F$ es satisfacible.

  $F$ es válida

  $\Longrightarrow$ para toda estructura $\mathscr{I}$ y toda asignación $A$ se tiene que $\mathscr{I}_A(F) = 1$

  $\Longrightarrow$ existe una estructura $\mathscr{I}$ y una asignación $A$ tales que $\mathscr{I}_A(F) = 1$

  $\Longrightarrow F$ es satisfacible.

- $F$ es satisfacible $\not\Longrightarrow \neg F$ es insatisfacible.

  $(\forall x)P(x)$ es satisfacible.

  modelo $\mathscr{I} = (U, I)$ con $U = \{a\}$ e $I(P) = \{a\}$

  $\neg(\forall x)P(x)$ es satisfacible.

  modelo $\mathscr{I} = (U, I)$ con $U = \{a, b\}$ e $I(P) = \{a\}$

# Realización de un conjunto de fórmulas

- Notación: $S, S_1, S_2, \dots$ representarán conjuntos de fórmulas.
- Def.: Sean $S$ un conjunto de fórmulas de $L$, $\mathscr{I}$ una estructura de $L$ y $A$ una asignación en $\mathscr{I}$.
  - $(\mathscr{I}, A)$ es una realización de $S$ si para toda $F \in S$ se tiene que $\mathscr{I}_A(F) = 1$.
    Se representa por $\mathscr{I}_A \models S$.
  - $(\mathscr{I}, A)$ no es una realización de $S$ si para alguna $F \in S$ se tiene que $\mathscr{I}_A(F) = 0$.
    Se representa por $\mathscr{I}_A \not\models S$.
- Ejemplos: Sea $S = \{(\forall y)R(x,y),\ (\forall y) f(x,y) = y\}$.
  - $(\mathscr{I}, A)$ con $\mathscr{I} = (\mathbb{N}, I), R^I = \leq, f^I = +, A(x) = 0$ es realización de $S$.
  - $(\mathscr{I}, A)$ con $\mathscr{I} = (\mathbb{N}, I), R^I = <, f^I = +, A(x) = 0$ no es realización de $S$.
  - $(\mathscr{I}, A)$ con $\mathscr{I} = (\mathbb{N}, I), R^I = \leq, f^I = *, A(x) = 0$ no es realización de $S$.

# Consistencia de un conjunto de fórmulas

- Def.: Sea $S$ un conjunto de fórmulas de $L$.
  - $S$ es consistente si $S$ tiene alguna realización (i.e. existe alguna estructura $\mathscr{I}$ de $L$ y alguna asignación $A$ en $\mathscr{I}$ tales que, para toda $F \in S$, $I_A(F) = 1$).
  - $S$ es inconsistente si $S$ no tiene ninguna realización (i.e. para toda estructura $\mathscr{I}$ de $L$ y toda asignación $A$ en $\mathscr{I}$, existe alguna $F \in S$, tal que $I_A(F) = 0$).
- Ejemplos:
  - $S = \{(\forall y)R(x,y),\ (\forall y)f(x,y) = y\}$ es consistente .
    $(\mathscr{I}, A)$ con $\mathscr{I} = (\mathbb{N}, I), R^I = \leq, f^I = +, A(x) = 0$ es realización de $S$.
  - $S = \{P(x) \rightarrow Q(x),\ (\forall y)P(y),\ \neg Q(x)\}$ es inconsistente.

# Modelo de un conjunto de fórmulas

- Def.: Sean $S$ un conjunto de fórmulas de $L$ e $\mathscr{I}$ una estructura de $L$.
  - $\mathscr{I}$ es un modelo de $S$ si para toda $F \in S$ se tiene que $\mathscr{I} \models F$ (i.e. para toda $F \in S$ y toda asignación $A$ en $\mathscr{I}$ se tiene $\mathscr{I}_A(F) = 1$). Se representa por $\mathscr{I} \models S$.
  - $\mathscr{I}$ no es un modelo de $S$ si para alguna $F \in S$ se tiene que $\mathscr{I} \not\models F$ (i.e. para alguna $F \in S$ y alguna asignación $A$ en $\mathscr{I}$ se tiene $\mathscr{I}_A(F) = 0$). Se representa por $\mathscr{I} \not\models S$.
- Ejemplos: Sea $S = \{R(e,y),\ f(e,y) = y\}$.
  - $\mathscr{I} = (\mathbb{N}, I)$ con $R^I = \leq, f^I = +, e^I = 0$ es modelo de $S$.
  - $\mathscr{I} = (\mathbb{N}, I)$ con $R^I = <, f^I = +, e^I = 0$ no es modelo de $S$.
  - $\mathscr{I} = (\mathbb{N}, I)$ con $R^I = \leq, f^I = *, e^I = 0$ no es modelo de $S$.
  - $\mathscr{I} = (\{0,1\}^*, I)$ con $R^I =$ prefijo, $f^I =$ concatenación y $e^I = \varepsilon$ es modelo de $S$.

# Consistencia y modelo

- Sea $S$ un conjunto de fórmulas cerradas. Son equivalentes:
  - $S$ es consistente.
  - $S$ tiene modelo.
- Si $S$ es inconsistente, entonces no tiene ningún modelo.
- Existen conjuntos de fórmulas consistentes que tienen realizaciones, pero no tienen modelos.
  Por ejemplo, sea $S = \{x \neq y\}$.
  - El conjunto $S$ es consistente
    $\mathscr{I}_A \models S$, siendo $\mathscr{I} = (\{p,q\}, I), A(x) = p, A(y) = q$
  - El conjunto $S$ no tiene modelo
    Sea $\mathscr{I}$ una estructura. Existe una asignación $A$ en $\mathscr{I}$ tal que $A(x) = A(y)$. Luego, $\mathscr{I}_A(x \neq y) = 0$ y $\mathscr{I} \not\models F$.

# Consecuencia lógica

- Def.: Sean $F$ una fórmula de $L$ y $S$ un conjunto de fórmulas de $L$.
  - $F$ es consecuencia lógica de $S$ si todas las realizaciones de $S$ lo son de $F$.
    (i.e. para toda estructura $\mathscr{I}$ de $L$ y toda asignación $A$ en $\mathscr{I}$,
    si $\mathscr{I}_A \models S$ entonces $\mathscr{I}_A \models F$).
    (i.e. para toda estructura $\mathscr{I}$ de $L$ y toda asignación $A$ en $\mathscr{I}$,
    si, para todo $G \in S$, $\mathscr{I}_A(G) = 1$ entonces $\mathscr{I}_A(F) = 1$).
    Se representa por $S \models F$.
  - $F$ no es consecuencia lógica de $S$ si alguna realización de $S$ no lo es de $F$.
    (i.e. para alguna estructura $\mathscr{I}$ de $L$ y alguna asignación $A$ en $\mathscr{I}$ se tiene que
    $\mathscr{I}_A \models S$ y $\mathscr{I}_A \not\models F$).
    (i.e. para alguna estructura $\mathscr{I}$ de $L$ y alguna asignación $A$ en $\mathscr{I}$ se tiene que,
    para todo $G \in S$, $\mathscr{I}_A(G) = 1$ y $\mathscr{I}_A(F) = 0$).
    Se representa por $S \not\models F$.
  - Se escribe $G \models F$ en lugar de $\{G\} \models F$.
  - Se escribe $G \not\models F$ en lugar de $\{G\} \not\models F$.

# Ejemplos de consecuencia lógica

- Ejemplos:
  - $(\forall x)P(x) \models P(y)$
  - $P(y) \not\models (\forall x)P(x)$

    $(\mathscr{I},A)$ con $\mathscr{I} = (U,I), U = \{1,2\}, P^I = \{1\}, A(y) = 1$.
  - $(\forall x)P(x) \models (\exists y)P(y)$
  - $(\exists x)P(x) \not\models (\forall y)P(y)$

    $\mathscr{I} = (U,I)$ con $U = \{1,2\}, P^I = \{1\}$

    $\mathscr{I} = (U,I)$ con $U = \mathbb{N}$ y $P^I = \{n \in \mathbb{N}$ : $n$ es par
  - $(\exists x)(\forall y)Q(x,y) \models (\forall y)(\exists x)Q(x,y)$
  - $(\forall y)(\exists x)Q(x,y) \not\models (\exists x)(\forall y)Q(x,y)$

    $\mathscr{I} = (U,I)$ con $U = \{1,2\}, Q^I = \{(1,1),(2,2)\}$

    $\mathscr{I} = (U,I)$ con $U = \mathbb{N}, Q^I = >$

# Consecuencia lógica e inconsistencia

- $S \models F$ syss $S \cup \{\neg F\}$ es inconsistente.

  $S \models F$

  $\iff$ para toda estructura $\mathscr{I}$ de $L$ y toda asignación $A$ en $\mathscr{I}$,
  si, para todo $G \in S$, $\mathscr{I}_A(G) = 1$ entonces $\mathscr{I}_A(F) = 1$.

  $\iff$ para toda estructura $\mathscr{I}$ de $L$ y toda asignación $A$ en $\mathscr{I}$,
  si, para todo $G \in S$, $\mathscr{I}_A(G) = 1$ entonces $\mathscr{I}_A(\neg F) = 0$.

  $\iff$ para toda estructura $\mathscr{I}$ de $L$ y toda asignación $A$ en $\mathscr{I}$,
  existe alguna $H \in S \cup \{\neg F\}$ tal que $\mathscr{I}_A(\neg H) = 0$.

  $\iff S \cup \{\neg F\}$ es inconsistente.

- Sean $F$ una fórmula cerrada de $L$ y $S$ un conjunto de fórmulas cerradas de $L$. Entonces, $F$ es consecuencia lógica de $S$ syss todos los modelos de $S$ lo son de $F$.

# Equivalencia lógica

- Def.: Sean $F$ y $G$ fórmulas de $L$. $F$ y $G$ son equivalentes si para toda estructura $\mathscr{I}$ de $L$ y toda asignación $A$ en $\mathscr{I}$, $\mathscr{I}_A(F) = \mathscr{I}_A(G)$.
  Se representa por $F \equiv G$.
- Ejemplos:
  - $P(x) \not\equiv P(y)$.
    $\mathscr{I} = (\{1,2\}, I)$ con $P^I = \{1\}$ y $A(x) = 1, A(y) = 2$.
  - $(\forall x)P(x) \equiv (\forall y)P(y)$.
  - $(\forall x)(P(x) \land Q(x)) \equiv (\forall x)P(x) \land (\forall x)Q(x)$.
  - $(\exists x)(P(x) \land Q(x)) \not\equiv (\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x)$.
    $\mathscr{I} = (\{1,2\}, I)$ con $P^I = \{1\}$ y $Q^I = \{2\}$.
- Propiedades: Sean $F$ y $G$ fórmulas cerradas de $L$.
  - $F \equiv G$ syss $\models F \leftrightarrow G$.
  - $F \equiv G$ syss $F \models G$ y $G \models F$.

# Equivalencias

- Equivalencia lógica
  - Prop.: $F \equiv G$ syss $\models F \leftrightarrow G$.
- Propiedades básicas de la equivalencia lógica:
  - Reflexiva: $F \equiv F$
  - Simétrica: Si $F \equiv G$, entonces $G \equiv F$
  - Transitiva: Si $F \equiv G$ y $G \equiv H$, entonces $F \equiv H$
- Principio de sustitución de fórmulas equivalentes:
  - Prop.: Si en la fórmula $F$ se sustituye una de sus subfórmulas $G$ por una fórmula $G'$ lógicamente equivalente a $G$, entonces la fórmula obtenida, $F'$, es lógicamente equivalente a $F$.
  - Ejemplo: $$\begin{aligned} F &= (\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x) \\ G &= (\forall x)P(x) \\ G' &= (\forall y)P(y) \\ F' &= (\forall y)P(y) \rightarrow (\exists x)Q(x) \end{aligned}$$

# Fórmula en forma rectificada

- Def.: $F$ está en forma rectificada si ninguna variable aparece libre y ligada y cada cuantificador se refiere a una variable diferente.
- Ejemplos:
  $(\forall x)P(x) \to (\forall y)Q(z,y)$ está en forma rectificada
  $(\forall x)P(x) \to (\forall y)Q(x,y)$ no está en forma rectificada
  $(\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(z,x)$ no está en forma rectificada
- Prop.: Para toda fórmula $F$ existe una fórmula equivalente $G$ en forma rectificada.
- Lema del renombramiento: Si $y$ no aparece libre en $F$, entonces
  $(\forall x)F \equiv (\forall y)F[x/y]$
  $(\exists x)F \equiv (\exists y)F[x/y]$.
- Ejemplos de rectificación:

$$(\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(z,x) \equiv (\forall x)P(x) \to (\forall u)Q(z,u)$$

$$(\forall x)P(x) \to (\forall y)Q(x,y) \equiv (\forall z)P(z) \to (\forall y)Q(x,y)$$

# Fórmula en forma normal prenexa

- Def.: La fórmula $F$ está en forma normal prenexa (FNP) si es de la forma $(Q_1 x_1)\dots(Q_n x_n)G$, donde $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $n \geq 0$ y $G$ no tiene cuantificadores.
  $(Q_1 x_1)\dots(Q_n x_n)$ se llama el prefijo de $F$ y $G$ se llama la matriz de $F$.
- Ejemplos:

| Fórmula | ¿FNP? |
|---|---|
| $\neg(\exists x)[P(x) \rightarrow (\forall x)P(x)]$ | no |
| $(\forall x)(\exists y)[P(x) \wedge \neg P(y)]$ | sí |
| $(\forall x)P(x) \vee (\exists y)Q(y)$ | no |
| $(\forall x)(\exists y)[P(x) \vee Q(y)]$ | sí |
| $(\exists y)(\forall x)[P(x) \vee Q(y)]$ | sí |
| $\neg((\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge (\forall x)[Q(x) \rightarrow R(x)] \rightarrow (\forall x)[P(x) \rightarrow R(x)])$ | no |
| $(\exists z)(\forall x)(\forall y)[((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(y) \vee R(y))) \wedge P(z)]$ | sí |

# Algoritmo de cálculo de forma normal prenexa

Aplicando a una fórmula los siguientes pasos se obtiene otra fórmula equivalente y que está en forma normal prenexa rectificada:

1. Rectificar la fórmula usando las equivalencias
   $$(\forall x)F \equiv (\forall y)F[x/y] \tag{1}$$
   $$(\exists x)F \equiv (\exists y)F[x/y] \tag{2}$$
   donde $y$ es una variable que no ocurre libre en $F$.
2. Eliminar los bicondicionales usando la equivalencia
   $$F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F) \tag{3}$$
3. Eliminar los condicionales usando la equivalencia
   $$F \rightarrow G \equiv \neg F \vee G \tag{4}$$

# Algoritmo de cálculo de forma normal prenexa

4. Interiorizar las negaciones usando las equivalencias

$$\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G \quad (5)$$
$$\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G \quad (6)$$
$$\neg\neg F \equiv F \quad (7)$$
$$\neg(\forall x)F \equiv (\exists x)\neg F \quad (8)$$
$$\neg(\exists x)F \equiv (\forall x)\neg F \quad (9)$$

5. Exteriorizar los cuantificadores usando las equivalencias

$$(\forall x)F \wedge G \equiv (\forall x)(F \wedge G) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \quad (11)$$
$$(\forall x)F \vee G \equiv (\forall x)(F \vee G) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \quad (12)$$
$$(\exists x)F \wedge G \equiv (\exists x)(F \wedge G) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \quad (13)$$
$$(\exists x)F \vee G \equiv (\exists x)(F \vee G) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \quad (14)$$
$$G \wedge (\forall x)F \equiv (\forall x)(G \wedge F) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \quad (15)$$
$$G \vee (\forall x)F \equiv (\forall x)(G \vee F) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \quad (16)$$
$$G \wedge (\exists x)F \equiv (\exists x)(G \wedge F) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \quad (17)$$
$$G \vee (\exists x)F \equiv (\exists x)(G \vee F) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \quad (18)$$

# Ejemplos de cálculo de forma normal prenexa

- Ejemplo de cálculo de una forma normal prenexa de

$$
\begin{array}{lll}
 & \neg(\exists x)[P(x) \to (\forall x)P(x)] & \\
\equiv & \neg(\exists x)[P(x) \to (\forall y)P(y)] & \text{[por (1)]} \\
\equiv & \neg(\exists x)[\neg P(x) \vee (\forall y)P(y)] & \text{[por (4)]} \\
\equiv & (\forall x)[\neg(\neg P(x) \vee (\forall y)P(y))] & \text{[por (9)]} \\
\equiv & (\forall x)[\neg\neg P(x) \wedge \neg(\forall y)P(y)] & \text{[por (6)]} \\
\equiv & (\forall x)[P(x) \wedge (\exists y)\neg P(y)] & \text{[por (7 y 8)]} \\
\equiv & (\forall x)(\exists y)[P(x) \wedge \neg P(y)] & \text{[por (17)]}
\end{array}
$$

- Ejemplo de cálculo de una forma normal prenexa de

$$
\begin{array}{lll}
 & (\forall x)P(x) \vee (\exists y)Q(y) & \\
\equiv & (\forall x)[P(x) \vee (\exists y)Q(y)] & \text{[por (12)]} \\
\equiv & (\forall x)(\exists y)[P(x) \vee Q(y)] & \text{[por (18)]}
\end{array}
$$

- Ejemplo de cálculo de otra forma normal prenexa de

$$
\begin{array}{lll}
 & (\forall x)P(x) \vee (\exists y)Q(y) & \\
\equiv & (\exists y)[(\forall x)P(x) \vee Q(y)] & \text{[por (18)]}
\end{array}
$$

# Ejemplos de cálculo de forma normal prenexa

- Ejemplo de cálculo de una forma normal prenexa de

$$\neg((\forall x)[P(x) \to Q(x)] \land (\forall x)[Q(x) \to R(x)] \to (\forall x)[P(x) \to R(x)])$$

$$\equiv \neg((\forall x)[P(x) \to Q(x)] \land (\forall y)[Q(y) \to R(y)] \to (\forall z)[P(z) \to R(z)]) \quad \text{[por (1)]}$$

$$\equiv \neg(\neg((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land (\forall y)[\neg Q(y) \lor R(y)]) \lor (\forall z)[\neg P(z) \lor R(z)]) \quad \text{[por (4)]}$$

$$\equiv \neg\neg((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land (\forall y)[\neg Q(y) \lor R(y)]) \land \neg(\forall z)[\neg P(z) \lor R(z)] \quad \text{[por (6)]}$$

$$\equiv ((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land (\forall y)[\neg Q(y) \lor R(y)]) \land (\exists z)[\neg(\neg P(z) \lor R(z))] \quad \text{[por (7, 8)]}$$

$$\equiv ((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land (\forall y)[\neg Q(y) \lor R(y)]) \land (\exists z)[\neg\neg P(z) \land \neg R(z)] \quad \text{[por (6)]}$$

$$\equiv ((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land (\forall y)[\neg Q(y) \lor R(y)]) \land (\exists z)[P(z) \land \neg R(z)] \quad \text{[por (7)]}$$

$$\equiv (\exists z)[((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land (\forall y)[\neg Q(y) \lor R(y)]) \land (P(z) \land \neg R(z))] \quad \text{[por (17)]}$$

$$\equiv (\exists z)[(\forall x)[(\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\forall y)[\neg Q(y) \lor R(y)]] \land (P(z) \land \neg R(z))] \quad \text{[por (11)]}$$

$$\equiv (\exists z)(\forall x)[((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\forall y)[\neg Q(y) \lor R(y)]) \land (P(z) \land \neg R(z))] \quad \text{[por (11)]}$$

$$\equiv (\exists z)(\forall x)[(\forall y)[(\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg Q(y) \lor R(y))] \land (P(z) \land \neg R(z))] \quad \text{[por (15)]}$$

$$\equiv (\exists z)(\forall x)(\forall y)[((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg Q(y) \lor R(y))) \land (P(z) \land \neg R(z))] \quad \text{[por (11)]}$$

# Fórmula en forma normal prenexa conjuntiva

- Def.: La fórmula $F$ está en forma normal prenexa conjuntiva (FNPC) si es de la forma $(Q_1x_1)\dots(Q_nx_n)G$, donde $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $n \geq 0$, $G$ no tiene cuantificadores y $G$ está en forma normal conjuntiva.
- Algoritmo de cálculo de forma normal prenexa conjuntiva:
  - Algoritmo: Aplicando a una fórmula los siguientes pasos se obtiene otra fórmula equivalente y que está en forma normal prenexa conjuntiva rectificada:
    1. Calcular una forma normal prenexa rectificada usando las equivalencias (1)–(18)
    2. Interiorizar las disyunciones usando las equivalencias
       $$A \lor (B \land C) \equiv (A \lor B) \land (A \lor C) \tag{19}$$
       $$(A \land B) \lor C \equiv (A \lor C) \land (B \lor C) \tag{20}$$
  - Ejemplo de cálculo de una FNPC de $(\forall x)(\exists y)[P(x) \lor (Q(y) \land \neg R(y))]$:

$$\begin{array}{ll} & (\forall x)(\exists y)[P(x) \lor (Q(y) \land \neg R(y))] \\ \equiv & (\forall x)(\exists y)[(P(x) \lor Q(y)) \land (P(x) \lor \neg R(y))] \quad \text{[por (19)]} \end{array}$$

# Fórmula en forma de Skolem

- Forma de Skolem:
  - Def.: La fórmula $F$ está en forma de Skolem (FS) si es de la forma $(\forall x_1)\dots(\forall x_n)G$, donde $n \geq 0$ y $G$ no tiene cuantificadores.
  - Ejemplos:

| | |
|---|---|
| $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$ | no está en forma de Skolem |
| $(\forall x)P(x,f(x))$ | sí está en forma de Skolem |
| $(\exists x)Q(x)$ | no está en forma de Skolem |
| $Q(a)$ | sí está en forma de Skolem |

- Equisatisfacibilidad:
  - Def.: Las fórmulas $F$ y $G$ son equisatisfacible si:
    $F$ es satisfacible syss $G$ es satisfacible.
    Se representa por $F \equiv_{sat} G$
  - Ejemplos:

$$
\begin{array}{lll}
(\exists x)Q(x) & \equiv_{sat} & Q(a) \\
(\exists x)Q(x) & \not\equiv & Q(a) \\
(\forall x)(\exists y)P(x,y) & \equiv_{sat} & (\forall x)P(x,f(x)) \\
(\forall x)(\exists y)P(x,y) & \not\equiv & (\forall x)P(x,f(x))
\end{array}
$$

# Algoritmo de cálculo de forma de Skolem

- Propiedades:
  - Si $a$ es una constante que no ocurre en $F$, entonces $(\exists x)F \equiv_{sat} F[x/a]$.
  - Si $g$ es un símbolo de función $n$–aria que no ocurre en $F$, entonces $(\forall x_1)\dots(\forall x_n)(\exists x)F \equiv_{sat} (\forall x_1)\dots(\forall x_n)F[x/g(x_1,\dots,x_n)]$.
- Algoritmo de cálculo de forma de Skolem:
  - Sea $F$ una fórmula en forma normal prenexa rectificada, la forma de Skolem de $F$ es

    $$\text{Sko}(F) = \begin{cases} \text{Sko}(G[x/a]), & \text{si } F \text{ es } (\exists x)G \text{ y} \\ & a \text{ es una nueva constante;} \\ \text{Sko}((\forall x_1)\dots(\forall x_n)G[x/f(x_1,\dots,x_n)]), & \text{si } F \text{ es } (\forall x_1)\dots(\forall x_n)(\exists x)G \text{ y} \\ & f \text{ es un nuevo símbolo de función;} \\ F, & \text{si } F \text{ está en forma de Skolem} \end{cases}$$
  - Propiedad: Si $F$ es una fórmula en forma normal prenexa rectificada, entonces $\text{Sko}(F)$ está en forma de Skolem y $\text{Sko}(F) \equiv_{sat} F$.

# Ejemplos de cálculo de forma de Skolem

- Ejemplo 1:

$$\text{Sko}((\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(x,y,z,u,v,w))$$

$$= \text{Sko}((\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(a,y,z,u,v,w))$$

$$= \text{Sko}((\forall y)(\forall z)(\forall v)(\exists w)P(a,y,z,f(y,z),v,w))$$

$$= \text{Sko}((\forall y)(\forall z)(\forall v)P(a,y,z,f(y,z),v,g(y,z,v)))$$

$$= (\forall y)(\forall z)(\forall v)P(a,y,z,f(y,z),v,g(y,z,v))$$

- Ejemplo 2:

$$\text{Sko}((\forall x)(\exists y)(\forall z)(\exists w)[\neg P(a,w) \vee Q(f(x),y)])$$

$$= \text{Sko}((\forall x)(\forall z)(\exists w)[\neg P(a,w) \vee Q(f(x),h(x))])$$

$$= \text{Sko}((\forall x)(\forall z)[\neg P(a,g(x,z)) \vee Q(f(x),h(x))])$$

$$= (\forall x)(\forall z)[\neg P(a,g(x,z)) \vee Q(f(x),h(x))]$$

# Ejemplos de cálculo de forma de Skolem

- Ejemplo de cálculo de una forma de Skolem de

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg(\exists x)[P(x) \to (\forall x)P(x)] \\
\equiv & (\forall x)(\exists y)[P(x) \land \neg P(y)] \quad \text{[por página 56]} \\
\equiv_{sat} & (\forall x)[P(x) \land \neg P(f(x))]
\end{array}
$$

- Ejemplo de cálculo de una forma de Skolem de

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall x)P(x) \lor (\exists y)Q(y) \\
\equiv & (\forall x)(\exists y)[P(x) \lor Q(y)] \quad \text{[por página 56]} \\
\equiv_{sat} & (\forall x)[P(x) \lor Q(f(x))]
\end{array}
$$

- Ejemplo de cálculo de otra forma de Skolem de

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall x)P(x) \lor (\exists y)Q(y) \\
\equiv & (\exists y)(\forall x)[P(x) \lor Q(y)] \quad \text{[por página 56]} \\
\equiv_{sat} & (\forall x)[P(x) \lor Q(a)]
\end{array}
$$

- Ejemplo de cálculo de una forma de Skolem de

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg((\forall x)[P(x) \to Q(x)] \land (\forall x)[Q(x) \to R(x)] \to (\forall x)[P(x) \to R(x)]) \\
\equiv & (\exists z)(\forall x)(\forall y)[((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg Q(y) \lor R(y))) \land (P(z) \land \neg R(z))] \quad \text{[por p. 57} \\
\equiv_{sat} & (\forall x)(\forall y)[((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg Q(y) \lor R(y))) \land (P(a) \land \neg R(a))]
\end{array}
$$

# Sintaxis de la lógica clausal

- Un átomo es una fórnula atómica.
  Variables sobre átomos: $A, B, C, \dots, A_1, A_2, \dots$.
- Un literal es un átomo ($A$) o la negación de un átomo ($\neg A$).
  Variables sobre literales: $L, L_1, L_2, \dots$.
- Una cláusula es un conjunto finito de literales.
  Variables sobre cláusulas: $C, C_1, C_2, \dots$.
- La cláusula vacía es el conjunto vacío de literales.
  La cláusula vacía se representa por $\square$.
- Conjuntos finitos de cláusulas.
  Variables sobre conjuntos finitos de cláusulas: $S, S_1, S_2, \dots$.

# Semántica de la lógica clausal

- Fórmulas correspondientes:
  - Def.: La fórmula correspondiente a la cláusula $\{L_1, \dots, L_n\}$ es
    $$(\forall x_1)\dots(\forall x_p)[L_1 \vee \dots \vee L_n],$$
    donde $x_1, \dots, x_p$ son las variables libres de $L_1 \vee \dots \vee L_n$.
  - Def.: La fórmula correspondiente a la cláusula $\square$ es $\bot$.
  - Def.: La fórmula correspondiente al conjunto de cláusulas $\{\{L^1_1, \dots, L^1_{n_1}\}, \dots, \{L^m_1, \dots, L^m_{n_m}\}\}$ es
    $$(\forall x_1)\dots(\forall x_p)[(L^1_1 \vee \dots \vee L^1_{n_1}) \wedge \dots \wedge (L^m_1 \vee \dots \vee L^m_{n_m})],$$
    donde $x_1, \dots, x_p$ son las variables libres de $(L^1_1 \vee \dots \vee L^1_{n_1}) \wedge \dots \wedge (L^m_1 \vee \dots \vee L^m_{n_m})$.
  - Def.: La fórmula correspondiente al conjunto de cláusulas $\emptyset$ es $\top$.
- Semántica:
  - Def.: En cualquier interpretación $\mathscr{I} = (U, I)$, $I(\top) = 1$ e $I(\bot) = 0$.
  - Def.: Los conceptos semánticos relativos a las cláusulas y a los conjuntos de cláusulas son los de sus correspondientes fórmulas.

# Forma clausal de una fórmula

- Def.: Una forma clausal de una fórmula $F$ es un conjunto de cláusulas $S$ tal que $F \equiv_{sat} S$.
- Algoritmo: Aplicando a la fórmula $F$ los siguientes pasos se obtiene $S$ que una forma clausal de $F$:
  1. Sea $F_1 = (\exists y_1)\dots(\exists y_n)F$, donde $y_1,\dots,y_n$ son las variables libres de $F$.
  2. Sea $F_2$ una forma normal prenexa conjuntiva rectificada de $F_1$ calculada mediante el algoritmo de la página 58.
  3. Sea $F_3 = \text{Sko}(F_2)$, que tiene la forma
  $$(\forall x_1)\dots(\forall x_p)[(L_1^1 \vee \dots \vee L_{n_1}^1) \wedge \dots \wedge (L_1^m \vee \dots \vee L_{n_m}^m)],$$
  4. Sea $S = \{\{L_1^1,\dots,L_{n_1}^1\},\dots,\{L_1^m,\dots,L_{n_m}^m\}\}$.
- Prop.: $F \equiv_{sat} F_1 \equiv F_2 \equiv_{sat} F_3 \equiv S$.

# Ejemplos de cálculo de forma clausal de una fórmula

- Ejemplo de cálculo de una forma clausal de

$$\begin{array}{ll} & \neg(\exists x)[P(x) \rightarrow (\forall x)P(x)] \\ \equiv_{sat} & (\forall x)[P(x) \wedge \neg P(f(x))] \qquad \text{[pág. 62]} \\ \equiv & \{\{P(x)\},\{\neg P(f(x))\}\} \end{array}$$

- Ejemplo de cálculo de una forma clausal de

$$\begin{array}{ll} & (\forall x)P(x) \vee (\exists y)Q(y) \\ \equiv_{sat} & (\forall x)[P(x) \vee Q(f(x))] \qquad \text{[pág. 62]} \\ \equiv & \{\{P(x),Q(f(x))\}\} \end{array}$$

- Ejemplo de cálculo de otra forma clausal de

$$\begin{array}{ll} & (\forall x)P(x) \vee (\exists y)Q(y) \\ \equiv_{sat} & (\forall x)[P(x) \vee Q(a)] \qquad \text{[pág. 62]} \\ \equiv & \{\{P(x),Q(a)\}\} \end{array}$$

- Ejemplo de cálculo de una forma clausal de

$$\begin{array}{ll} & \neg((\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge (\forall x)[Q(x) \rightarrow R(x)] \rightarrow (\forall x)[P(x) \rightarrow R(x)]) \\ \equiv_{sat} & (\forall x)(\forall y)[((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(y) \vee R(y))) \wedge (P(a) \wedge \neg R(a))] \qquad \text{[pág. 62]} \\ \equiv & \{\{\neg P(x),Q(x)\},\{\neg Q(y),R(y)\},\{P(a)\},\{\neg R(a)\}\} \end{array}$$

# Ejemplos de cálculo de forma clausal de una fórmula

| | | |
|---|---|---|
| | $\neg((\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge (\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x))$ | |
| $\equiv$ | $\neg((\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge (\exists y)P(y) \rightarrow (\exists z)Q(z))$ | [(2)] |
| $\equiv$ | $\neg(\neg((\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge (\exists y)P(y)) \vee (\exists z)Q(z))$ | [(4)] |
| $\equiv$ | $\neg(\neg((\forall x)[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge (\exists y)P(y)) \vee (\exists z)Q(z))$ | [(4)] |
| $\equiv$ | $\neg\neg((\forall x)[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge (\exists y)P(y)) \wedge \neg(\exists z)Q(z)$ | [(6)] |
| $\equiv$ | $((\forall x)[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge (\exists y)P(y)) \wedge \neg(\exists z)Q(z)$ | [(7)] |
| $\equiv$ | $((\forall x)[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge (\exists y)P(y)) \wedge (\forall z)\neg Q(z)$ | [(9)] |
| $\equiv$ | $(\exists y)[(\forall x)[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge P(y)] \wedge (\forall z)\neg Q(z)$ | [(17)] |
| $\equiv$ | $(\exists y)[((\forall x)[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge P(y)) \wedge (\forall z)\neg Q(z)]$ | [(13)] |
| $\equiv$ | $(\exists y)[(\forall x)[(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge P(y))] \wedge (\forall z)\neg Q(z)$ | [(11)] |
| $\equiv$ | $(\exists y)(\forall x)[((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge P(y)) \wedge (\forall z)\neg Q(z)]$ | [(11)] |
| $\equiv$ | $(\exists y)(\forall x)(\forall z)[(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge P(y) \wedge \neg Q(z)]$ | [(15)] |
| $\equiv_{sat}$ | $(\forall x)(\forall z)[(\neg P(x) \vee Q(x) \wedge P(a)) \wedge \neg Q(z)]$ | [(15)] |
| $\equiv$ | $\{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\}$ | |

# Forma clausal de un conjunto de fórmulas

- Equisatisfacibilidad de conjuntos de fórmulas:
  - Def.: Los conjuntos de fórmulas $S_1$ y $S_2$ son equisatisfacible si:

    $S_1$ es satisfacible syss $S_2$ es satisfacible.

    Se representa por $S_1 \equiv_{sat} S_2$
- Forma clausal de un conjunto de fórmulas:
  - Def.: Una forma clausal de un conjunto de fórmulas $S$ es un conjunto de cláusulas equisatisfacible con $S$.
  - Prop.: Si $S_1, \dots, S_n$ son formas clausales de $F_1, \dots, F_n$, entonces $S_1 \cup \dots \cup S_n$ es una forma clausal de $\{F_1, \dots, F_n\}$.
  - Ejemplo: Una forma clausal de

    $$\{(\forall x)[P(x) \to Q(x)], (\exists x)P(x), \neg(\exists x)Q(x)\}$$

    es

    $$\{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\}.$$

# Consecuencia e inconsistencia de cláusulas

- Prop: Sean $S_1, \dots, S_n$ formas clausales de las fórmulas $F_1, \dots, F_n$ y $S$ una forma clausal de $\neg G$. Son equivalentes:
  1. $\{F_1, \dots, F_n\} \models G$.
  2. $\{F_1, \dots, F_n, \neg G\}$ es inconsistente.
  3. $S_1 \cup \dots \cup S_n \cup S$ es inconsistente.
- Ejemplos:
  - Ejemplo 1:

    $\{(\forall x)[P(x) \to Q(x)], (\exists x)P(x)\} \models (\exists x)Q(x)$

    syss $\{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\}$ es inconsistente.
  - Ejemplo 2:

    $\{(\forall x)[P(x) \to Q(x)], (\forall x)[Q(x) \to R(x)]\} \models (\forall x)[P(x) \to R(x)]$

    syss $\{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(y), R(y)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}$ es inconsistente.

# Reducción de la LPO básica a proposicional

- Observación:
  - En este tema sólo se consideran lenguajes de primer orden sin igualdad.
- Reducción de la LPO básica a proposicional
  - Def.: Una fórmula básica es una fórmula sin variables ni cuantificadores.
  - Prop.: Sea $S$ un conjunto de fórmulas básicas. Son equivalentes:
    1. $S$ es consistente en el sentido de la lógica de primer orden.
    2. $S$ es consistente en el sentido de la lógica proposicional.

# Ejemplos de reducción de la LPO básica a proposicional

- $\{P(a) \vee P(b), \neg P(b) \vee P(c), P(a) \rightarrow P(c)\}$
  es consistente en el sentido de la lógica de primer orden
  (con modelos $\mathscr{I}_4, \mathscr{I}_6, \mathscr{I}_8$).
- $\{P(a) \vee P(b), \neg P(b) \vee P(c), P(a) \rightarrow P(c), \neg P(c)\}$
  es inconsistente en el sentido de la lógica de primer orden.

| | $P^I$ | $P(a) \vee P(b)$ | $\neg P(b) \vee P(c)$ | $P(a) \rightarrow P(c)$ | $\neg P(c)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathscr{I}_1$ | $\emptyset$ | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $\mathscr{I}_2$ | $\{c^I\}$ | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $\mathscr{I}_3$ | $\{b^I\}$ | 1 | 0 | 1 | 1 |
| $\mathscr{I}_4$ | $\{b^I, c^I\}$ | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $\mathscr{I}_5$ | $\{a^I\}$ | 1 | 1 | 0 | 1 |
| $\mathscr{I}_6$ | $\{a^I, c^I\}$ | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $\mathscr{I}_7$ | $\{a^I, b^I\}$ | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $\mathscr{I}_8$ | $\{a^I, b^I, c^I\}$ | 1 | 1 | 1 | 0 |

# Ejemplos de reducción de la LPO básica a proposicional

- $\{P(a) \vee P(b), \neg P(b) \vee P(c), P(a) \rightarrow P(c)\}$
  es consistente en el sentido proposicional (con modelos $v_4, v_6, v_8$).
- $\{P(a) \vee P(b), \neg P(b) \vee P(c), P(a) \rightarrow P(c), \neg P(c)\}$
  es inconsistente en el sentido proposicional.
  
  Se consideran los cambios $P(a)/p, P(b)/q, P(c)/r$

| | $p$ | $q$ | $r$ | $p \vee q$ | $\neg q \vee r$ | $p \rightarrow r$ | $\neg r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $v_2$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $v_3$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| $v_4$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $v_5$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| $v_6$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $v_7$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $v_8$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

# Notación

- $L$ representa un lenguaje de primer orden sin igualdad.
- $\mathscr{C}$ es el conjunto de constantes de $L$.
- $\mathscr{F}$ es el conjunto de símbolos de función de $L$.
- $\mathscr{R}$ es el conjunto de símbolos de relación de $L$.
- $\mathscr{F}_n$ es el conjunto de símbolos de función $n$–aria de $L$.
- $\mathscr{R}_n$ es el conjunto de símbolos de relación $n$–aria de $L$.
- $f/n$ indica que $f$ es un símbolo de función $n$–aria de $L$.
- $P/n$ indica que $f$ es un símbolo de relación $n$–aria de $L$.

# Universo de Herbrand

- Def.: El universo de Herbrand de $L$ es el conjunto de los términos básicos de $L$. Se representa por $\text{UH}(L)$.
- Prop.: $\text{UH}(L) = \bigcup_{i \geq 0} H_i(L)$, donde $H_i(L)$ es el nivel $i$ del $\text{UH}(L)$ definido por

$$H_0(L) = \begin{cases} \mathscr{C}, & \text{si } \mathscr{C} \neq \emptyset; \\ \{a\}, & \text{en caso contrario. (} a \text{ es una nueva constante).} \end{cases}$$

$$H_{i+1}(L) = H_i(L) \cup \{ f(t_1, \dots, t_n) : f \in \mathscr{F}_n \text{ y } t_1, \dots, t_n \in H_i(L) \}$$

- Prop.: $\text{UH}(L)$ es finito syss $L$ no tiene símbolos de función.

# Ejemplos de universo de Herbrand

- Si $\mathscr{C} = \{a,b,c\}$ y $\mathscr{F} = \emptyset$, entonces

$$\begin{aligned}
H_0(L) &= \{a,b,c\} \\
H_1(L) &= \{a,b,c\} \\
&\vdots \\
\text{UH}(L) &= \{a,b,c\}
\end{aligned}$$

- Si $\mathscr{C} = \emptyset$ y $\mathscr{F} = \{f/1\}$, entonces

$$\begin{aligned}
H_0(L) &= \{a\} \\
H_1(L) &= \{a, f(a)\} \\
H_2(L) &= \{a, f(a), f(f(a))\} \\
&\vdots \\
\text{UH}(L) &= \{a, f(a), f(f(a)), \dots\} = \{f^i(a) : i \in \mathbb{N}\}
\end{aligned}$$

# Ejemplos de universo de Herbrand

- Si $\mathscr{C} = \{a,b\}$ y $\mathscr{F} = \{f/1, g/1\}$, entonces

$$\begin{aligned}
H_0(L) &= \{a,b\} \\
H_1(L) &= \{a,b,f(a),f(b),g(a),g(b)\} \\
H_2(L) &= \{a,b,f(a),f(b),g(a),g(b), \quad f(f(a)),f(f(b)),f(g(a)),f(g(b)), \\
&\qquad g(f(a)),g(f(b)),g(g(a)),g(g(b))\ \} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

- Si $\mathscr{C} = \{a,b\}$ y $\mathscr{F} = \{f/2\}$, entonces

$$\begin{aligned}
H_0(L) &= \{a,b\} \\
H_1(L) &= \{a,b,f(a,a),f(a,b),f(b,a),f(b,b)\} \\
H_2(L) &= \{a,b,f(a,a),f(a,b),f(b,a),f(b,b),f(a,f(a,a)),f(a,f(a,b)),\dots\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

# Base de Herbrand

- Def.: La base de Herbrand de $L$ es el conjunto de los átomos básicos de $L$. Se representa por $\text{BH}(L)$.
- Prop.: $\text{BH}(L) = \{P(t_1,\dots,t_n) : P \in \mathscr{R}_n$ y $t_1,\dots,t_n \in \text{UH}(L)\}$.
- Prop.: $\text{BH}(L)$ es finita syss $L$ no tiene símbolos de función.
- Ejemplos:
  - Si $\mathscr{C} = \{a,b,c\}$, $\mathscr{F} = \emptyset$ y $\{\mathscr{R} = P/1\}$, entonces
    $$\begin{aligned} \text{UH}(L) &= \{a,b,c\} \\ \text{BH}(L) &= \{P(a),P(b),P(c)\} \end{aligned}$$
  - Si $\mathscr{C} = \{a\}$, $\mathscr{F} = \{f/1\}$ y $\mathscr{R} = \{P/1,Q/1,R/1\}$, entonces
    $$\begin{aligned} \text{UH}(L) &= \{a,f(a),f(f(a)),\dots\} = \{f^i(a) : i \in \mathbb{N}\} \\ \text{BH}(L) &= \{P(a),Q(a),R(a),P(f(a)),Q(f(a)),R(f(a)),\dots\} \end{aligned}$$

# Interpretaciones de Herbrand

- Def.: Una interpretación de Herbrand es una interpretación $\mathscr{I} = (U, I)$ tal que
  - $U$ es el universo de Herbrand de $L$;
  - $I(c) = c$, para cada constante $c$ de $L$;
  - $I(f) = f$, para cada símbolo de función $f$ de $L$.
- Prop.: Sea $\mathscr{I}$ una interpretación de Herbrand de $L$. Si $t$ es un término básico de $L$, entonces $\mathscr{I}(t) = t$.
- Prop.: Una interpretación de Herbrand queda determinada por un subconjunto de la base de Herbrand, el conjunto de átomos básicos verdaderos en esa interpretación.

# Modelos de Herbrand

- Nota: Las definiciones de universo de Herbrand, base de Herbrand e interpretación de Herbrand definidas para un lenguaje se extienden a fórmulas y conjuntos de fórmulas considerando el lenguaje formado por los símbolos no lógicos que aparecen.
- Def.: Un modelo de Herbrand de una fórmula $F$ es una interpretación de Herbrand de $F$ que es modelo de $F$.
- Def.: Un modelo de Herbrand de un conjunto de fórmulas $S$ es una interpretación de Herbrand de $S$ que es modelo de $S$.
- Ejemplo: Los modelos de Herbrand de $\{P(a) \vee P(b), \neg P(b) \vee P(c), P(a) \to P(c)\}$ son $\{P(b), P(c)\}, \{P(a), P(c)\}$ y $\{P(a), P(b), P(c)\}$ (ver página 71).
- Ejemplo: Sea $S = \{(\forall x)(\forall y)[Q(b,x) \to P(a) \vee R(y)], P(b) \to \neg(\exists z)(\exists u)Q(z,u)\}$. Entonces,

  $$\begin{aligned} \text{UH}(S) &= \{a, b\} \\ \text{BH}(S) &= \{P(a), P(b), Q(a,a), Q(a,b), Q(b.a), Q(b,b), R(a), R(b)\} \end{aligned}$$

  Un modelo de Herbrand de $S$ es $\{P(a)\}$.

# Interpretación de Herbrand correspondiente

- Sea $S = \{\{\neg Q(b,x), P(a), R(y)\}, \{\neg P(b), \neg Q(z,u)\}\}$ e $\mathscr{I} = (\{1,2\}, I)$ con $a^I = 1, b^I = 2, P^I = \{1\}, Q^I = \{(1,1),(2,2)\}, R^I = \{2\}$. Entonces, $\mathscr{I} \models S$.
  Cálculo de la interpretación de Herbrand $\mathscr{I}^*$ correspondiente a $\mathscr{I}$:

$$
\begin{array}{ll}
\mathscr{I}^* & = (\mathrm{UH}(S), I^*) \\
\mathrm{UH}(S) & = \{a, b\} \\
\mathrm{BH}(S) & = \{P(a), P(b), Q(a,a), Q(a,b), Q(b.a), Q(b,b), R(a), R(b)\} \\
I^*(P(a)) & = P^I(a^I) = P^I(1) = \mathrm{V} \\
I^*(P(b)) & = P^I(b^I) = P^I(2) = \mathrm{F} \\
I^*(Q(a,a)) & = Q^I(a^I, a^I) = Q^I(1,1) = \mathrm{V} \\
I^*(Q(a,b)) & = Q^I(a^I, b^I) = Q^I(1,2) = \mathrm{F} \\
I^*(Q(b,a)) & = Q^I(b^I, a^I) = Q^I(2,1) = \mathrm{F} \\
I^*(Q(b,b)) & = Q^I(b^I, b^I) = Q^I(2,2) = \mathrm{V} \\
I^*(R(a))) & = R^I(a^I) = R^I(1) = \mathrm{F} \\
I^*(R(b)) & = R^I(b^I) = R^I(2) = \mathrm{V}
\end{array}
$$

  $I^* = \{P(a), Q(a,a), Q(b,b), R(b)\}$ y $\mathscr{I}^* \models S$.

# Interpretación de Herbrand correspondiente

- Sea $S$ el conjunto de cláusulas $\{\{P(a)\},\{Q(y,f(a))\}\}$ e $\mathscr{I} = (\{1,2\},I)$ con $a^I = 1$, $f^I = \{(1,2),(2,1)\}$, $P^I = \{1\}$, $Q^I = \{(1,2),(2,2)\}$. Entonces, $\mathscr{I} \models S$.
  Cálculo de la interpretación de Herbrand $\mathscr{I}^*$ correspondiente a $\mathscr{I}$:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{I}^* &= (\mathsf{UH}(S), I^*) \\
\mathsf{UH}(S) &= \{a, f(a), f(f(a)), \dots\} = \{f^i(a) : i \in \mathbb{N}\} \\
\mathsf{BH}(S) &= \{P(f^n(a)) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{Q(f^n(a), f^m(a)) : n,m \in \mathbb{N}\} \\
I^*(P(a)) &= P^I(a^I) = P^I(1) = \mathsf{V} \\
I^*(P(f(a))) &= P^I(f^I(a^I)) = P^I(f^I(1)) = P^I(2) = \mathsf{F} \\
I^*(P(f(f(a)))) &= P^I(f^I(f^{(}a^I))) = P^I(1) = \mathsf{V} \\
I^*(P(f^n(a))) &= \begin{cases} \mathsf{V}, & \text{si } n \text{ es par;} \\ \mathsf{F}, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \\
I^*(Q(f^n(a), f^m(a))) &= \begin{cases} \mathsf{V}, & \text{si } m \text{ es impar;} \\ \mathsf{F}, & \text{en caso contrario.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$I^* = \{P(f^{2n}(a)) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{Q(f^n(a), f^{2m+1}(a)) : n,m \in \mathbb{N}\}$

$\mathscr{I}^* \models S$.

# Consistencia mediante modelos de Herbrand

- Prop.: Sea $S$ un conjunto de fórmulas básicas. Son equivalentes:
  1. $S$ es consistente.
  2. $S$ tiene un modelo de Herbrand.
- Prop.: Sea $S$ un conjunto de cláusulas. Si $\mathscr{I}^*$ es una interpretación de Herbrand correspondiente a un modelo $\mathscr{I}$ de $S$, entonces $\mathscr{I}^*$ es un modelo de $S$.
- Prop.: Sea $S$ un conjunto de cláusulas. Son equivalentes:
  1. $S$ es consistente.
  2. $S$ tiene un modelo de Herbrand.
- Prop.: Sea $S$ un conjunto de cláusulas. Son equivalentes:
  1. $S$ es inconsistente.
  2. $S$ no tiene ningún modelo de Herbrand.
- Prop.: Existen conjuntos de fórmulas consistentes sin modelos de Herbrand.

# Ejemplo de consistente sin modelos de Herbrand

- Sea $S = \{(\exists x)P(x), \neg P(a)\}$. Entonces,
  - $S$ es consistente.
    $\mathscr{I} \models S$ con $\mathscr{I} = (\{1,2\}, I)$, $a^I = 1$ y $P^I = \{2\}$.
  - $S$ no tiene modelos de Herbrand
    $\mathrm{UH}(S) = \{a\}$
    $\mathrm{BH}(S) = \{P(a)\}$
    Las interpretaciones de Herbrand de $S$ son $\emptyset$ y $\{P(a)\}$.
    $\emptyset \not\models S$
    $\{P(a)\} \not\models S$

# Instancias básicas de una cláusula

- Def.: Una sustitución $\sigma$ (de $L$) es una aplicación $\sigma$ : Var $\longrightarrow$ Térm$(L)$.
- Def.: Sea $C = \{L_1, \dots, L_n\}$ una cláusula de $L$ y $\sigma$ una sustitución de $L$. Entonces, $C\sigma = \{L_1\sigma, \dots, L_n\sigma\}$ es una instancia de $C$.
- Ejemplo: Sea $C = \{P(x,a), \neg P(x, f(y))\}$.
  $$C[x/a, y/f(a)] = \{P(f(a),a), \neg P(f(a), f(f(a)))\}$$
- Def.: $C\sigma$ es una instancia básica de $C$ si todos los literales de $C\sigma$ son básicos.
- Ejemplo: Sea $C = \{P(x,a), \neg P(x, f(y))\}$.
  $\{P(f(a),a), \neg P(f(a), f(f(a)))\}$ es una instancia básica de $C$.
  $\{P(f(a),a), \neg P(f(f(a)), f(a))\}$ no es una instancia básica de $C$.
  $\{P(x,a), \neg P(f(f(a)), f(a))\}$ no es una instancia básica de $C$.

# Extensiones de Herbrand

- Def.: La extensión de Herbrand de un conjunto de cláusulas $S$ es el conjunto de fórmulas

  $\mathrm{EH}(S) = \{C\sigma : C \in S$ y, para toda variable $x$ en $C, \sigma(x) \in \mathrm{UH}(S)\}$.
- Prop.: $\mathrm{EH}(L) = \bigcup_{i \geq 0} \mathrm{EH}_i(L)$, donde $\mathrm{EH}_i(L)$ es el nivel $i$ de la $\mathrm{EH}(L)$ definido por $\mathrm{EH}_i(S) = \{C\sigma : C \in S$ y, para toda variable $x$ en $C, \sigma(x) \in \mathrm{UH}_i(S)\}$.
- Ejemplos:
  - Sea $S = \{\{P(x)\}, \{\neg P(f(x))\}\}$ (p. 8.17). Entonces,

    $$\begin{aligned}
    \mathrm{EH}_0(S) &= \{\{P(a)\}, \{\neg P(f(a))\}\} \\
    \mathrm{EH}_1(S) &= \mathrm{EH}_0(S) \cup \{\{P(f(a))\}, \{\neg P(f(f(a)))\}\} \\
    \mathrm{EH}_2(S) &= \mathrm{EH}_1(S) \cup \{\{P(f(f(a)))\}, \{\neg P(f(f(f(a))))\}\}
    \end{aligned}$$
  - Sea $S = \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\}$ (p. 8.21).
    Entonces, $\mathrm{EH}(S) = \{\{\neg P(a), Q(a)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(a)\}\}$.
  - Sea $S = \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(y), R(y)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}$ (p. 8.21).
    Entonces, $\mathrm{EH}(S) = \{\{\neg P(a), Q(a)\}, \{\neg Q(a), R(a)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}$.

# Teorema de Herbrand

- Teorema de Herbrand: Sea $S$ un conjunto de cláusulas. Son equivalentes:
  1. $S$ es consistente.
  2. EH$(S)$ es consistente (en el sentido proposicional).
- Prop.: Sea $S$ un conjunto de cláusulas. Entonces, son equivalentes
  1. $S$ es inconsistente.
  2. EH$(S)$ tiene un subconjunto finito inconsistente (en el sentido proposicional).
  3. Para algún $i$, EH$_i(S)$ es inconsistente (en el sentido proposicional).

# Semidecisón mediante el teorema de Herbrand

- Entrada: Un conjunto de cláusulas $S$.
- Procedimiento:
  1. Hacer $i := 0$.
  2. Calcular $\mathrm{EH}_i(S)$.
  3. Si $\mathrm{EH}_i(S)$ es inconsistente (en el sentido proposicional), parar e indicar que $S$ es inconsistente.
  4. Si $\mathrm{EH}_i(S)$ es consistente (en el sentido proposicional), hacer $i := i+1$ y volver al paso 2.

# Ejemplos de decisión mediante el teorema de Herbrand

- $S = \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\}$ (p. 85) es inconsistente.
  $\text{EH}_0(S) = \{\{\neg P(a), Q(a)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(a)\}\}$ es inconsistente.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\{\neg P(a), Q(a)\}$ | |
| 2 | $\{P(a)\}$ | |
| 3 | $\{\neg Q(a)\}$ | |
| 4 | $\{Q(a)\}$ | Res $1,2$ |
| 5 | $\square$ | Res $3,4$ |

- $S = \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(y), R(y)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}$ es inconsistente.
  $\text{EH}_0(S) = \{\{\neg P(a), Q(a)\}, \{\neg Q(a), R(a)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}$.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\{\neg P(a), Q(a)\}$ | |
| 2 | $\{\neg Q(a), R(a)\}$ | |
| 3 | $\{P(a)\}$ | |
| 4 | $\{\neg R(a)\}$ | |
| 5 | $\{Q(a)\}$ | Res $1,3$ |
| 6 | $\{R(a)\}$ | Res $5,2$ |
| 7 | $\square$ | Res $6,4$ |

# Ejemplos de decisión mediante el teorema de Herbrand

- $S = \{\{P(x)\}, \{\neg P(f(x))\}\}$ es inconsistente (p. 85).
  – $\text{EH}_0(S) = \{\{P(a)\}, \{\neg P(f(a))\}\}$ es consistente
  $\mathscr{I} = \{P(a)\} \models \text{EH}_0(S)$
  – $\text{EH}_1(S) = \text{EH}_0(S) \cup \{\{P(f(a))\}, \{\neg P(f(f(a)))\}\}$ es inconsistente.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\{P(f(a))\}$ | |
| 2 | $\{\neg P(f(a))\}$ | |
| 3 | $\square$ | Res $1,2$ |

- $S = \{\{\neg P(x), Q(f(x),x)\}, \{P(g(b))\}, \{\neg Q(y,z)\}\}$ es inconsistente. Dem.:
  $S' = \{\{\neg P(g(b)), Q(f(g(b)),g(b))\}, \{P(g(b))\}, \{\neg Q(f(g(b)),g(b))\}\} \subset \text{EH}(S)$
  es inconsistente.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\{\neg P(g(b)), Q(f(g(b)),g(b))\}$ | |
| 2 | $\{P(g(b))\}$ | |
| 3 | $\{\neg Q(f(g(b)),g(b))\}$ | |
| 4 | $\{Q(f(g(b)),g(b))\}$ | Res $1,2$ |
| 5 | $\square$ | Res $3,3$ |

# Ejemplos de consecuencia mediante resolución

- Ejemplo 1: $\{(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)], (\exists x)P(x)\} \models (\exists x)Q(x)$
  syss $\{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\}$ es inconsistente.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\{\neg P(x), Q(x)\}$ | Hipótesis |
| 2 | $\{P(a)\}$ | Hipótesis |
| 3 | $\{\neg Q(z)\}$ | Hipótesis |
| 4 | $\{Q(a)\}$ | Resolvente de 1 y 2 con $\sigma = [x/a]$ |
| 5 | $\square$ | Resolvente de 3 y 4 con $\sigma = [z/a]$ |

- Ejemplo 2: $\{(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)], (\forall x)[Q(x) \rightarrow R(x)]\} \models (\forall x)[P(x) \rightarrow R(x)]$
  syss $\{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(y), R(y)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}$ es inconsistente.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\{\neg P(x), Q(x)\}$ | Hipótesis |
| 2 | $\{\neg Q(y), R(y)\}$ | Hipótesis |
| 3 | $\{P(a)\}$ | Hipótesis |
| 4 | $\{\neg R(a)\}$ | Hipótesis |
| 5 | $\{Q(a)\}$ | Resolvente de 1 y 2 con $\sigma = [x/a]$ |
| 6 | $\{R(a)\}$ | Resolvente de 2 y 5 con $\sigma = [y/a]$ |
| 5 | $\square$ | Resolvente de 3 y 4 con $\sigma = \varepsilon$ |

# Unificadores

- Def.: La sustitución $\sigma$ es un unificador de los términos $t_1$ y $t_2$ si $t_1\sigma = t_2\sigma$.
- Def.: Los términos $t_1$ y $t_2$ son unificables si tienen algún unificador.
- Def.: $t$ es una instancia común de $t_1$ y $t_2$ si existe una sustitución $\sigma$ tal que $t = t_1\sigma = t_2\sigma$.
- Ejemplos:

| $t_1$ | $t_2$ | Unificador | Instancia común |
|---|---|---|---|
| $f(x,g(z))$ | $f(g(y),x)$ | $[x/g(z),y/z]$ | $f(g(z),g(z))$ |
| $f(x,g(z))$ | $f(g(y),x)$ | $[x/g(y),z/y]$ | $f(g(y),g(y))$ |
| $f(x,g(z))$ | $f(g(y),x)$ | $[x/g(a),y/a]$ | $f(g(a),g(a))$ |
| $f(x,y)$ | $f(y,x)$ | $[x/a,y/a]$ | $f(a,a)$ |
| $f(x,y)$ | $f(y,x)$ | $[y/x]$ | $f(x,x)$ |
| $f(x,y)$ | $g(a,b)$ | No tiene | No tiene |
| $f(x,x)$ | $f(a,b)$ | No tiene | No tiene |
| $f(x)$ | $f(g(x))$ | No tiene | No tiene |

- Nota: Las anteriores definiciones se extienden a conjuntos de términos y de literales.

# Composición de sustituciones e identidad

- Composición de sustituciones:
  - Def.: La composición de las sustituciones $\sigma_1$ y $\sigma_2$ es la sustitución $\sigma_1\sigma_2$ definida por $x(\sigma_1\sigma_2) = (x\sigma_1)\sigma_2$, para toda variable $x$.
  - Ejemplo: Si $\sigma_1 = [x/f(z,a), y/w]$ y $\sigma_2 = [x/b, z/g(w)]$, entonces
    - $x\sigma_1\sigma_2 = (x\sigma_1)\sigma_2 = f(z,a)\sigma_2 = f(z\sigma_2, a\sigma_2) = f(g(w),a)$
    - $y\sigma_1\sigma_2 = (y\sigma_1)\sigma_2 = w\sigma_2 = w$
    - $z\sigma_1\sigma_2 = (z\sigma_1)\sigma_2 = z\sigma_2 = g(w)$
    - $w\sigma_1\sigma_2 = (w\sigma_1)\sigma_2 = w\sigma_2 = w$

    Por tanto, $\sigma_1\sigma_2 = [x/f(g(w),a), y/w, z/g(w)]$.
- Def.: La substitución identidad es la sustitución $\varepsilon$ tal que, para todo $x$, $x\varepsilon = x$.
- Propiedades:
  1. Asociativa: $\sigma_1(\sigma_2\sigma_3) = (\sigma_1\sigma_2)\sigma_3$
  2. Neutro: $\sigma\varepsilon = \varepsilon\sigma = \sigma$.

# Comparación de sustituciones

- Def.: La sustitución $\sigma_1$ es más general que la $\sigma_2$ si existe una sustitución $\sigma_3$ tal que $\sigma_2 = \sigma_1\sigma_3$, Se representa por $\sigma_2 \leq \sigma_1$.
- Def.: Las sustituciones $\sigma_1$ y $\sigma_2$ son equivalentes si $\sigma_1 \leq \sigma_2$ y $\sigma_2 \leq \sigma_1$. Se representa por $\sigma_1 \equiv \sigma_2$.
- Ejemplos: Sean $\sigma_1 = [x/g(z), y/z], \sigma_2 = [x/g(y), z/y]$ y $\sigma_3 = [x/g(a), y/a]$. Entonces,
  1. $\sigma_1 = \sigma_2[y/z]$
  2. $\sigma_2 = \sigma_1[z/y]$
  3. $\sigma_3 = \sigma_1[z/a]$
  4. $\sigma_1 \equiv \sigma_2$
  5. $\sigma_3 \leq \sigma_1$
- Ejemplo: $[x/a, y/a] \leq [y/x]$, ya que $[x/a, y/a] = [y/x][x/a, y/a]$.

# Unificador de máxima generalidad

- Unificador de máxima generalidad:
- Def.: La sustitución $\sigma$ es un unificador de máxima generalidad (UMG) de los términos $t_1$ y $t_2$ si
  – $\sigma$ es un unificador de $t_1$ y $t_2$.
  – $\sigma$ es más general que cualquier unificador de $t_1$ y $t_2$.
- Ejemplos:
  1. $[x/g(z), y/z]$ es un UMG de $f(x, g(z))$ y $f(g(y), x)$.
  2. $[x/g(y), z/y]$ es un UMG de $f(x, g(z))$ y $f(g(y), x)$.
  3. $[x/g(a), y/a]$ no es un UMG de $f(x, g(z))$ y $f(g(y), x)$.
- Nota: Las anterior definición se extienden a conjuntos de términos y de literales.

# Unificación de listas de términos

- Notación de lista:
  - $(a_1, \dots, a_n)$ representa una lista cuyos elementos son $a_1, \dots, a_n$.
  - $(a|R)$ representa una lista cuyo primer elemento es $a$ y resto es $R$.
  - $()$ representa la lista vacía.
- Unificadores de listas de términos:
  - Def.: $\sigma$ es un unificador de $(s_1 \dots, s_n)$ y $(t_1 \dots, t_n)$ si $s_1\sigma = t_1\sigma, \dots, s_n\sigma = t_n\sigma$.
  - Def.: $(s_1 \dots, s_n)$ y $(t_1 \dots, t_n)$ son unificables si tienen algún unificador.
  - Def.: $\sigma$ es un unificador de máxima generalidad (UMG) de $(s_1 \dots, s_n)$ y $(t_1 \dots, t_n)$ si $\sigma$ es un unificador de $(s_1 \dots, s_n)$ y $(t_1 \dots, t_n)$ más general que cualquier otro.
- Aplicación de una sustitución a una lista de ecuaciones:
  - $(s_1 = t_1, \dots, s_n = t_n)\sigma = (s_1\sigma = t_1\sigma, \dots, s_n\sigma = t_n\sigma)$.
- Algoritmo de unificación de listas de términos:
  - Entrada: Lista de ecuaciones $L = (s_1 = t_1, \dots, s_n = t_n)$ y sustitución $\sigma$.
  - Salida: Un UMG de las listas $(s_1 \dots, s_n)$ y $(t_1 \dots, t_n)$, si son unificables;
    “No unificables”, en caso contrario.

# Algoritmo de unificación

- Procedimiento $\mathsf{unif}(L, \sigma)$:
  1. Si $L = ()$, entonces $\mathsf{unif}(L, \sigma) = \sigma$.
  2. Si $L = (t = t | L')$, entonces $\mathsf{unif}(L, \sigma) = \mathsf{unif}(L', \sigma)$.
  3. Si $L = (f(t_1, \dots, t_m) = f(t'_1 \dots, t'_m) | L')$, entonces
     $\mathsf{unif}(L, \sigma) = \mathsf{unif}((t_1 = t'_1, \dots, t_m = t'_m | L'), \sigma)$.
  4. Si $L = (x = t | L')$ (ó $L = (t = x | L')$) y $x$ no aparece en $t$, entonces
     $\mathsf{unif}(L, \sigma) = \mathsf{unif}(L'[x/t], \sigma[x/t])$.
  5. Si $L = (x = t | L')$ (ó $L = (t = x | L')$) y $x$ aparece en $t$, entonces
     $\mathsf{unif}(L, \sigma) =$ “No unificables”.
  6. Si $L = (f(t_1, \dots, t_m) = g(t'_1 \dots, t'_m) | L')$, entonces
     $\mathsf{unif}(L, \sigma) =$ “No unificables”.
  7. Si $L = (f(t_1, \dots, t_m) = f(t'_1 \dots, t'_p) | L')$ y $m \neq p$, entonces
     $\mathsf{unif}(L, \sigma) =$ “No unificables”.

# Algoritmo de unificación de dos términos

- Entrada: Dos términos $t_1$ y $t_2$.
- Salida: Un UMG de $t_1$ y $t_2$, si son unificables;
  "No unificables", en caso contrario.
- Procedimiento: $\mathsf{unif}((t_1 = t_2), \varepsilon)$.
- Ejemplo 1: Unificar $f(x, g(z))$ y $f(g(y), x)$:

$$
\begin{array}{rll}
 & \mathsf{unif}((f(x,g(z)) = f(g(y),x)), \varepsilon) & \\
= & \mathsf{unif}((x = g(y), g(z) = x), \varepsilon) & \text{por 3} \\
= & \mathsf{unif}((g(z) = x)[x/g(y)], \varepsilon[x/g(y)]) & \text{por 4} \\
= & \mathsf{unif}((g(z) = g(y)), [x/g(y)]) & \\
= & \mathsf{unif}((z = y), [x/g(y)]) & \text{por 3} \\
= & \mathsf{unif}((), [x/g(y)][z/y]) & \text{por 4} \\
= & \mathsf{unif}((), [x/g(y), z/y]) & \\
= & [x/g(y), z/y] & \text{por 1}
\end{array}
$$

# Ejemplos de unificación

- Ejemplo 2: Unificar $f(x,b)$ y $f(a,y)$:

$$\begin{array}{lll} & \text{unif}((f(x,b) = f(a,y),\varepsilon) & \\ = & \text{unif}((x = a, b = y),\varepsilon) & \text{por 3} \\ = & \text{unif}((b = y)[x/a],\varepsilon[x/a]) & \text{por 4} \\ = & \text{unif}((b = y),[x/a]) & \\ = & \text{unif}((),[x/a][y/b]) & \text{por 4} \\ = & [x/a,y/b]) & \text{por 1} \end{array}$$

- Ejemplo 3: Unificar $f(x,x)$ y $f(a,b)$:

$$\begin{array}{lll} & \text{unif}((f(x,x) = f(a,b)),\varepsilon) & \\ = & \text{unif}((x = a, x = b),\varepsilon) & \text{por 3} \\ = & \text{unif}((x = b)[x/a],\varepsilon[x/a]) & \text{por 4} \\ = & \text{unif}((a = b),[x/a]) & \\ = & \text{“No unificable”} & \text{por 6} \end{array}$$

# Ejemplos de unificación

- Ejemplo 4: Unificar $f(x,g(y))$ y $f(y,x)$:

$$\begin{array}{lll} & \text{unif}((f(x,g(y)) = f(y,x)),\varepsilon) & \\ = & \text{unif}((x = y, g(y) = x),\varepsilon) & \text{por 3} \\ = & \text{unif}((g(y) = x)[x/y],\varepsilon[x/y]) & \text{por 4} \\ = & \text{unif}((g(y) = y),[x/y]) & \\ = & \text{“No unificable”} & \text{por 5} \end{array}$$

- Ejemplo 5: Unificar $j(w,a,h(w))$ y $j(f(x,y),x,z)$

$$\begin{array}{lll} & \text{unif}((j(w,a,h(w)) = j(f(x,y),x,z))\varepsilon) & \\ = & \text{unif}((w = f(x,y), a = x, h(w) = z),\varepsilon) & \text{por 3} \\ = & \text{unif}((a = x, h(w) = z)[w/f(x,y)],\varepsilon[w/f(x,y)]) & \text{por 4} \\ = & \text{unif}((a = x, h(f(x,y)) = z),[w/f(x,y)]) & \\ = & \text{unif}((h(f(x,y)) = z)[x/a],[w/f(x,y)][x/a]) & \text{por 4} \\ = & \text{unif}((h(f(a,y)) = z),[w/f(a,y),x/a]) & \\ = & \text{unif}((),[w/f(a,y),x/a][z/h(f(a,y))]) & \text{por 4} \\ = & [w/f(a,y),x/a,z/h(f(a,y)))  & \text{por 1} \end{array}$$

# Ejemplos de unificación

- Ejemplo 6: Unificar $j(w,a,h(w))$ y $j(f(x,y),x,y)$

$$
\begin{array}{rll}
& \text{unif}((j(w,a,h(w)) = j(f(x,y),x,y))\varepsilon) & \\
= & \text{unif}((w = f(x,y), a = x, h(w) = y), \varepsilon) & \text{por 3} \\
= & \text{unif}((a = x, h(w) = y)[w/f(x,y)], \varepsilon[w/f(x,y)]) & \text{por 4} \\
= & \text{unif}((a = x, h(f(x,y)) = y), [w/f(x,y)]) & \\
= & \text{unif}((h(f(x,y)) = y)[x/a], [w/f(x,y)][x/a]) & \text{por 4} \\
= & \text{unif}((h(f(a,y)) = y), [w/f(a,y), x/a]) & \\
= & \text{“No unificable”} & \text{por 5}
\end{array}
$$

- Ejemplo 7: Unificar $f(a,y)$ y $f(a,b)$:

$$
\begin{array}{rll}
& \text{unif}((f(a,y) = f(a,b), \varepsilon)) & \\
= & \text{unif}((a = a, y = b), \varepsilon) & \text{por 3} \\
= & \text{unif}((y = b), \varepsilon) & \text{por 2} \\
= & \text{unif}((), [y/b]) & \text{por 4} \\
= & [y/b] & \text{por 1}
\end{array}
$$

# Separación de variables

- Def.: La sustitución $[x_1/t_1,\dots,x_n/t_n]$ es un renombramiento si todos los $t_i$ son variables.
- Prop.: Si $\theta$ es un renombramiento, entonces $C \equiv C\theta$.
- Def.: Las cláusulas $C_1$ y $C_2$ están separadas sin no tienen ninguna variable común.
- Def.: Una separación de las variables de $C_1$ y $C_2$ es un par de renombramientos $(\theta_1,\theta_2)$ tales que $C_1\theta_1$ y $C_2\theta_2$ están separadas.
- Ejemplo: Una separación de variables de $C_1 = \{P(x), Q(x,y)\}$ y $C_2 = \{R(f(x,y))\}$ es $(\theta_1 = [x/x_1, y/y_1], \theta_2 = [x/x_2, y/y_2])$.

# Resolvente binaria

- Def.: La cláusula $C$ es una resolvente binaria de las cláusulas $C_1$ y $C_2$ si existen una separación de variables $(\theta_1, \theta_2)$ de $C_1$ y $C_2$, un literal $L_1 \in C_1$, un literal $L_2 \in C_2$ y un UMG $\sigma$ de $L_1\theta_1$ y $L_2^c\theta_2$ tales que
  $$C = (C_1\theta_1\sigma \setminus \{L_1\theta_1\sigma_1\}) \cup (C_2\theta_2\sigma \setminus \{L_2\theta_2\sigma\}).$$
- Ejemplo: Sean
  $$\begin{aligned}
  C_1 &= \{\neg P(x), Q(f(x))\},\\
  C_2 &= \{\neg Q(x), R(g(x))\},\\
  L_1 &= Q(f(x)),\\
  L_2 &= \neg Q(x),\\
  \theta_1 &= [x/x_1],\\
  \theta_2 &= [x/x_2],\\
  L_1\theta_1 &= Q(f(x_1)),\\
  L_2^c\theta_2 &= Q(x_2),\\
  \sigma &= [x_2/f(x_1)]
  \end{aligned}$$
  Entonces, $C = \{\neg P(x_1), R(g(f(x_1)))\}$ es una resolvente binaria de $C_1$ y $C_2$.

# Factorización

- Def.: La cláusula $C$ es un factor de la cláusula $D$ si existen dos literales $L_1$ y $L_2$ en $D$ que son unificables y $C = D\sigma \setminus \{L_2\sigma\}$ donde $\sigma$ es un UMG de $L_1$ y $L_2$.
- Ejemplo: Sean

$$
\begin{aligned}
D &= \{P(x,y), P(y,x), Q(a)\} \\
L_1 &= P(x,y) \\
L_2 &= P(y,x) \\
\sigma &= [y/x]
\end{aligned}
$$

Entonces,

$C = \{P(x,x), Q(a)\}$ es un factor de $D$.

# Ejemplos de refutación por resolución

- Refutación de $S = \{\{\neg P(x, f(x,y))\}, \{P(a,z), \neg Q(z,v)\}, \{Q(u,a)\}\}$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\{\neg P(x, f(x,y))\}$ | Hipótesis |
| 2 | $\{P(a,z), \neg Q(z,v)\}$ | Hipótesis |
| 3 | $\{Q(u,a)\}$ | Hipótesis |
| 4 | $\{\neg Q(f(a,y),v)\}$ | Resolvente de 1 y 2 con $\sigma = [x/a, z/f(a,y)]$ |
| 5 | $\square$ | Resolvente de 3 y 4 con $\sigma = [u/f(a,y), v/a]$ |

- Refutación de $S = \{\{P(x)\}, \{\neg P(f(x))\}\}$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\{P(x)\}$ | Hipótesis |
| 2 | $\{\neg P(f(x))\}$ | Hipótesis |
| 3 | $\square$ | Resolvente de 1 y 2 con $\theta_1 = \varepsilon, \theta_2 = [x/x'], \sigma = [x/f(x')]$ |

- Refutación de $S = \{\{P(x,y), P(y,x)\}, \{\neg P(u,v), \neg P(v,u)\}\}$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\{P(x,y), P(y,x)\}$ | Hipótesis |
| 2 | $\{\neg P(u,v), \neg P(v,u)\}$ | Hipótesis |
| 3 | $\{P(x,x)\}$ | Factor de 1 con $[y/x]$ |
| 4 | $\{\neg P(u,u)\}$ | Factor de 2 con $[v/u]$ |
| 5 | $\square$ | Resolvente de 3 y 4 con $[x/u]$ |

# Resolución

- Sea $S$ un conjunto de cláusulas.
- La sucesión $(C_1, \ldots, C_n)$ es una demostración por resolución de la cláusula $C$ a partir de $S$ si $C = C_n$ y para todo $i \in \{1, ..., n\}$ se verifica una de las siguientes condiciones:
  - $C_i \in S$;
  - existen $j, k < i$ tales que $C_i$ es una resolvente de $C_j$ y $C_k$
  - existe $j < i$ tal que $C_i$ es un factor de $C_j$
- La cláusula $C$ es demostrable por resolución a partir de $S$ si existe una demostración por resolución de $C$ a partir de $S$.
- Una refutación por resolución de $S$ es una demostración por resolución de la cláusula vacía a partir de $S$.
- Se dice que $S$ es refutable por resolución si existe una refutación por resolución a partir de $S$.

# Demostraciones por resolución

- Def.: Sean $S_1, \dots, S_n$ formas clausales de las fórmulas $F_1, \dots, F_n$ y $S$ una forma clausal de $\neg F$. Una demostración por resolución de $F$ a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$ es una refutación por resolución de $S_1 \cup \dots \cup S_n \cup S$.
- Def.: La fórmula $F$ es demostrable por resolución a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$ si existe una demostración por resolución de $F$ a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$.
  Se representa por $\{F_1, \dots, F_n\} \vdash_{Res} F$.
- Ejemplo: (tema 8 p. 21) $\{(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)], (\exists x)P(x)\} \vdash_{Res} (\exists x)Q(x)$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\{\neg P(x), Q(x)\}$ | Hipótesis |
| 2 | $\{P(a)\}$ | Hipótesis |
| 3 | $\{\neg Q(z)\}$ | Hipótesis |
| 4 | $\{Q(a)\}$ | Resolvente de 1 y 2 con $[x/a]$ |
| 5 | $\square$ | Resolvente de 3 y 4 con $[z/a]$ |

# Ejemplos de demostraciones por resolución

- Ejemplo: (tema 8 p. 21)
  $\{(\forall x)[P(x) \to Q(x)], (\forall x)[Q(x) \to R(x)] \vdash_{Res} (\forall x)[P(x) \to R(x)]\}$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\{\neg P(x), Q(x)\}$ | Hipótesis |
| 2 | $\{\neg Q(y), R(y)\}$ | Hipótesis |
| 3 | $\{P(a)\}$ | Hipótesis |
| 4 | $\{\neg R(a)\}$ | Hipótesis |
| 5 | $\{Q(a)\}$ | Resolvente de 1 y 2 con $[x/a]$ |
| 6 | $\{R(a)\}$ | Resolvente de 2 y 5 con $[y/a]$ |
| 5 | $\square$ | Resolvente de 6 y 4 con |

- Ejemplo: (tema 6 p. 55) $\vdash_{Res} (\exists x)[P(x) \to (\forall y)P(y)]$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\{P(x)\}$ | Hipótesis |
| 2 | $\{\neg P(f(x))\}$ | Hipótesis |
| 3 | $\square$ | Resolvente de 1 y 2 con $\theta_2 = [x/x'], \sigma = [x/f(x')]$ |

# Ejemplos de demostraciones por resolución

- Ejemplo: $\vdash_{Res} (\forall x)(\exists y)\neg(P(y,x) \leftrightarrow \neg P(y,y))$
  - Forma clausal:

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg(\forall x)(\exists y)\neg(P(y,x) \leftrightarrow \neg P(y,y)) \\
\equiv & \neg(\forall x)(\exists y)\neg((P(y,x) \rightarrow \neg P(y,y)) \wedge (\neg P(y,y) \rightarrow P(y,x))) \\
\equiv & \neg(\forall x)(\exists y)\neg((\neg P(y,x) \vee \neg P(y,y)) \wedge (\neg\neg P(y,y) \vee P(y,x))) \\
\equiv & \neg(\forall x)(\exists y)\neg((\neg P(y,x) \vee \neg P(y,y)) \wedge (P(y,y) \vee P(y,x))) \\
\equiv & (\exists x)(\forall y)\neg\neg((\neg P(y,x) \vee \neg P(y,y)) \wedge (P(y,y) \vee P(y,x))) \\
\equiv & (\exists x)(\forall y)((\neg P(y,x) \vee \neg P(y,y)) \wedge (P(y,y) \vee P(y,x))) \\
\equiv_{sat} & (\forall y)((\neg P(y,a) \vee \neg P(y,y)) \wedge (P(y,y) \vee P(y,a))) \\
\equiv & \{\{\neg P(y,a), \neg P(y,y)\}, \{P(y,y), P(y,a)\}\}
\end{array}
$$

  - Refutación:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\{\neg P(y,a), \neg P(y,y)\}$ | Hipótesis |
| 2 | $\{P(y,y), P(y,a)\}$ | Hipótesis |
| 3 | $\{\neg P(a,a)\}$ | Factor de 1 con $[y/a]$ |
| 4 | $\{\neg P(a,a)\}$ | Factor de 2 con $[y/a]$ |
| 5 | $\square$ | Resolvente de 3 y 4 |

# Paradoja del barbero de Russell

Ejemplo (Paradoja del barbero de Russell): En una isla pequeña hay sólo un barbero. El gobernador de la isla ha publicado la siguiente norma: *“El barbero afeita a todas las personas que no se afeitan a sí misma y sólo a dichas personas”*. Demostrar que la norma es inconsistente.

– Representación: $(\forall x)[\text{afeita}(b,x) \leftrightarrow \neg\text{afeita}(x,x)]$

– Forma clausal:

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall x)[\text{afeita}(b,x) \leftrightarrow \neg\text{afeita}(x,x)] \\
\equiv & (\forall x)[(\text{afeita}(b,x) \rightarrow \neg\text{afeita}(x,x)) \land (\neg\text{afeita}(x,x) \rightarrow \text{afeita}(b,x))] \\
\equiv & (\forall x)[(\neg\text{afeita}(b,x) \lor \neg\text{afeita}(x,x)) \land (\neg\neg\text{afeita}(x,x) \lor \text{afeita}(b,x))] \\
\equiv & (\forall x)[(\neg\text{afeita}(b,x) \lor \neg\text{afeita}(x,x)) \land (\text{afeita}(x,x) \lor \text{afeita}(b,x))] \\
\equiv & \{\{\neg\text{afeita}(b,x), \neg\text{afeita}(x,x)\}, \{\text{afeita}(x,x), \text{afeita}(b,x)\}\}
\end{array}
$$

– Refutación:

$$
\begin{array}{lll}
1 & \{\neg\text{afeita}(b,x), \neg\text{afeita}(x,x)\} & \text{Hipótesis} \\
2 & \{\text{afeita}(x,x), \text{afeita}(b,x)\} & \text{Hipótesis} \\
3 & \{\neg\text{afeita}(b,b)\} & \text{Factor de 1 con } [x/b] \\
4 & \{\text{afeita}(b,b)\} & \text{Factor de 2 con } [x/b] \\
5 & \square & \text{Resolvente de 3 y 4}
\end{array}
$$

# Adecuación y completitud de la resolución

- Propiedades:
  - Si $C$ es una resolvente de $C_1$ y $C_2$, entonces $\{C_1, C_2\} \models C$.
  - Si $D$ es un factor de $C$ entonces $C \models D$.
  - Si $\square \in S$, entonces $S$ es inconsistente.
  - Si el conjunto de cláusulas $S$ es refutable por resolución, entonces $S$ es inconsistente.
- Teor.: El cálculo de resolución (para la lógica de primer orden sin igualdad) es adecuado y completo; es decir,

  Adecuado: $S \vdash_{Res} F \quad \Longrightarrow \quad S \models F$

  Completo: $S \models F \quad \Longrightarrow \quad S \vdash_{Res} F$

# Determinación de no–consecuencia por resolución

- Enunciado: Comprobar, por resolución, que
  $(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \not\models (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$.
- Reducción 1: Comprobar que es consistente
  $\{(\forall x)[P(x) \vee Q(x)],\ \neg((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x))\}$
- Reducción 2: Comprobar que es consistente
  $\{\{P(x), Q(x)\}, \{\neg P(a)\}, \{\neg Q(b)\}\}$
- Resolución:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\{P(x), Q(x)\}$ | Hipótesis |
| 2 | $\{\neg P(a)\}$ | Hipótesis |
| 3 | $\{\neg Q(b)\}$ | Hipótesis |
| 4 | $\{Q(a)\}$ | Resolvente de 1 y 2 |
| 5 | $\{P(b)\}$ | Resolvente de 1 y 3 |

- Modelo: $U = \{a, b\}, I(P) = \{b\}, I(Q) = \{a\}$.

# Bibliografía


1. Badesa, C.; Jané, I. y Jansana, R. *Elementos de lógica formal.* (Ariel, 2000)
2. Chang, C.L. y Lee, R.C.T. *Symbolic logic and mechanical theorem proving* (Academic Press, 1973)
3. Fitting, M. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving (2nd ed.)* (Springer, 1996)
4. Gallier, J.H. *Logic for computer science (foundations of automatic theorem Proving)* (June 2003)
5. Huth, M. y Ryan, M. *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems.* (Cambridge University Press, 2000)
6. Hölldobler, S. *Computational logic.* (U. de Dresden, 2004)
7. Ojeda, M. y Pérez, I. *Lógica para la computación (Vol. 2: Lógica de Primer Orden)* (Ágora, 1997) pp. 138–164.
8. Paulson, L. *Logic and proof* (U. Cambridge, 2005)
9. Schöning, U. *Logic for computer scientists* (Birkäuser, 1989)