Temas de "Programación funcional" (curso 2009–10)

José A. Alonso Jiménez

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

Sevilla, 3 de Septiembre de 2009 (versión de 25 de septiembre de 2009)

Índice general

Tema 1

Introducción a la programación funcional

Contenido

1.1. Funciones

Funciones en Haskell

- En **Haskell**, una **función** es una **aplicación** que toma uno o más **argumentos** y devuelve un **valor**.
- En Haskell, las funciones se definen mediante **ecuaciones** formadas por el **nombre de la función**, los **nombres de los argumentos** y el **cuerpo** que especifica cómo se calcula el valor a partir de los argumentos.
- Ejemplo de definición de función en Haskell:

```
doble x = x + x
```

- Ejemplo de evaluación:

```
    doble 3
=   3 + 3       [def. de doble]
=   6           [def. de +]
```

Evaluaciones de funciones en Haskell

- Ejemplo de evaluación anidada impaciente:

```
    doble (doble 3)
=   doble (3 + 3)       [def. de doble]
=   doble 6             [def. de +]
=   6 + 6               [def. de doble]
=   12                  [def. de +]
```

- Ejemplo de evaluación anidada perezosa:

```
    doble (doble 3)
=   (doble 3) + (doble 3)   [def. de doble]
=   (3 +3) + (doble 3)      [def. de doble]
=   6 + (doble 3)           [def. de +]
=   6 + (3 + 3)             [def. de doble]
=   6 + 6                   [def. de +]
=   12                      [def. de +]
```

Comprobación de propiedades

- Propiedad: El doble de x más y es el doble de x más el doble de y
- Expresión de la propiedad:

```
prop_doble x y = doble (x+y) == (doble x) + (doble y)
```

- Comprobación de la propiedad con QuickCheck:

```
*Main> quickCheck prop_doble
+++ OK, passed 100 tests.
```

- Para usar QuickCheck hay que importarla, escribiendo al principio del fichero

```
import Test.QuickCheck
```

Refutación de propiedades

- Propiedad: El producto de dos números cualequiera es distinto de su suma.
- Expresión de la propiedad:

```
prop_prod_suma x y = x*y /= x+y
```

- Refutación de la propiedad con QuickCheck:

```
*Main> quickCheck prop_prod_suma
*** Failed! Falsifiable (after 1 test):
0
0
```

- Refinamiento: El producto de dos números no nulos cualequiera es distinto de su suma.

```
prop_prod_suma' x y =
    x /= 0 && y /= 0 ==> x*y /= x+y
```

- Refutación de la propiedad con QuickCheck:

```
*Main> quickCheck prop_prod_suma'
+++ OK, passed 100 tests.
*Main> quickCheck prop_prod_suma'
*** Failed! Falsifiable (after 5 tests):
2
2
```

1.2. Programación funcional

Programación funcional y programación imperativa

- La **programación funcional** es un estilo de programación cuyo método básico de computación es la aplicación de funciones a sus argumentos.
- Un **lenguaje de programación funcional** es uno que soporta y potencia el estilo funcional.
- La **programación imperativa** es un estilo de programación en el que los programas están formados por instrucciones que especifican cómo se ha de calcular el resultado.
- Ejemplo de problema para diferenciar los estilos de programación:
  Sumar los n primeros números.

Solución mediante programación imperativa

- Programa *suma n*:

  contador := 0
  total := 0
  repetir
    contador := contador + 1
    total := total + contador
  hasta que contador = n

- Evaluación de *suma 4*:

contador	total
0	0
1	1
2	3
3	6
4	10

Solución mediante programación funcional

- Programa:

```
suma n = sum [1..n]
```

- Evaluación de *suma 4*:

```
    suma 4
=   sum [1..4]          [def. de suma]
=   sum [1, 2, 3, 4]    [def. de [..]]
=   1 + 2 + 3 + 4       [def. de sum]
=   10                  [def. de +]
```

1.3. Rasgos característicos de Haskell

- Programas concisos.
- Sistema potente de tipos.
- Listas por comprensión.
- Funciones recursivas.
- Funciones de orden superior.

- Efectos monádicos.
- Evaluación perezosa.
- Razonamiento sobre programas.

1.4. Antecedentes históricos

- 1930s: Alonzo Church desarrolla el lambda cálculo (teoría básica de los lenguajes funcionales).
- 1950s: John McCarthy desarrolla el Lisp (lenguaje funcional con asignaciones).
- 1960s: Peter Landin desarrolla ISWIN (lenguaje funcional puro).
- 1970s: John Backus desarrolla FP (lenguaje funcional con orden superior).
- 1970s: Robin Milner desarrolla ML (lenguaje funcional con tipos polimórficos e inferencia de tipos).
- 1980s: David Turner desarrolla Miranda (lenguaje funcional perezoso).
- 1987: Un comité comienza el desarrollo de Haskell.
- 2003: El comité publica el "Haskell Report".

1.5. Presentación de Haskell

Ejemplo de recursión sobre listas

- Especificación: `(sum xs)` es la suma de los elementos de `xs`.
- Ejemplo: sum [2,3,7] $\leadsto$12
- Definición:

```
sum []     = 0
sum (x:xs) = x + sum xs
```

- Evaluación:

```
    sum [2,3,7]
=   2 + sum [3,7]           [def. de sum]
=   2 + (3 + sum [7])       [def. de sum]
=   2 + (3 + (7 + sum []))  [def. de sum]
=   2 + (3 + (7 + 0))       [def. de sum]
=   12                      [def. de +]
```

- Tipo de sum: `(Num a) => [a] -> a`

Ejemplo con listas de comprensión

- Especificación: `(ordena xs)` es la lista obtenida ordenando `xs` mediante el algoritmo de ordenación rápida.
- Ejemplo:

```
ordena [4,6,2,5,3] ⇝ [2,3,4,5,6]
ordena "deacb"     ⇝ "abcde"
```

- Definición:

```
ordena [] = []
ordena (x:xs) =
    (ordena menores) ++ [x] ++ (ordena mayores)
    where menores = [a | a <- xs, a <= x]
          mayores = [b | b <- xs, b > x]
```

- Tipo de `ordena`: `(Ord a) => [a] -> [a]`

Evaluación del ejemplo con listas de comprensión

	ordena [4,6,2,3]	
=	(ordena [2,3]) ++ [4] ++ (ordena [6])	[def. ordena]
=	((ordena []) ++ [2] ++ (ordena [3])) ++ [4] ++ (ordena [6])	[def. ordena]
=	([] ++ [2] ++ (ordena [3])) ++ [4] ++ (ordena [6])	[def. ordena]
=	([2] ++ (ordena [3])) ++ [4] ++ (ordena [6,5])	[def. ++]
=	([2] ++ ((ordena []) ++ [3] ++ [])) ++ [4] ++ (ordena [6])	[def. ordena]
=	([2] ++ ([] ++ [3] ++ [])) ++ [4] ++ (ordena [6])	[def. ordena]
=	([2] ++ [3]) ++ [4] ++ (ordena [6])	[def. ++]
=	[2,3] ++ [4] ++ (ordena [6])	[def. ++]
=	[2,3,4] ++ (ordena [6])	[def. ++]
=	[2,3,4] ++ ((ordena []) ++ [6] ++ (ordena []))	[def. ordena]
=	[2,3,4] ++ ((ordena []) ++ [6] ++ (ordena []))	[def. ordena]
=	[2,3,4] ++ ([] ++ [6] ++ [])	[def. ordena]
=	[2,3,4,6]	[def. ++]

Bibliografía

1. R. Bird. *Introducción a la programación funcional con Haskell*. Prentice Hall, 2000.

- Cap. 1: Conceptos fundamentales.

2. G. Hutton *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2007.
   - Cap. 1: Introduction.
3. B. O'Sullivan, D. Stewart y J. Goerzen *Real World Haskell*. O'Reilly, 2008.
   - Cap. 1: Getting Started.
4. B.C. Ruiz, F. Gutiérrez, P. Guerrero y J.E. Gallardo. *Razonando con Haskell*. Thompson, 2004.
   - Cap. 1: Programación funcional.
5. S. Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*, Second Edition. Addison-Wesley, 1999.
   - Cap. 1: Introducing functional programming.

Tema 2

Introducción a la programación con Haskell

Contenido

2.1. El sistema GHC

El sistema GHC

- Los programa funcionales pueden evaluarse manualmente (como en el tema anterior).
- Los lenguajes funcionales evalúan automáticamente los programas funcionales.

- Haskell es un lenguaje funcional.
- GHC (Glasgow Haskell Compiler) es el intérprete de Haskell que usaremos en el curso.

2.2. Iniciación a GHC

2.2.1. Inicio de sesión con GHCi

- Inicio mediante `ghci`

```
I1M> ghci
GHCi, version 6.10.3: http://www.haskell.org/ghc/  :? for help
Prelude>
```

- La llamada es `Prelude>`
- Indica que ha cargado las definiciones básicas que forman el preludio y el sistema está listo para leer una expresión, evaluarla y escribir su resultado.

2.2.2. Cálculo aritmético

Cálculo aritmético: Operaciones aritméticas

- Operaciones aritméticas en Haskell:

```
Prelude> 2+3
5
Prelude> 2-3
-1
Prelude> 2*3
6
Prelude> 7 `div` 2
3
Prelude> 2^3
8
```

Cálculo aritmético: Precedencia y asociatividad

- Precedencia:

```
Prelude> 2*10^3
2000
Prelude> 2+3*4
14
```

- Asociacitividad:

```
Prelude> 2^3^4
2417851639229258349412352
Prelude> 2^(3^4)
2417851639229258349412352
Prelude> 2-3-4
-5
Prelude> (2-3)-4
-5
```

2.2.3. Cálculo con listas

Cálculo con listas: Seleccionar y eliminar

- Seleccionar el primer elemento de una lista no vacía:

```
head [1,2,3,4,5]  ⇝  1
```

- Eliminar el primer elemento de una lista no vacía:

```
tail [1,2,3,4,5]  ⇝  [2,3,4,5]
```

- Seleccionar el n–ésimo elemento de una lista (empezando en 0):

```
[1,2,3,4,5] !! 2  ⇝  3
```

- Seleccionar los n primeros elementos de una lista:

```
take 3 [1,2,3,4,5]  ⇝  [1,2,3]
```

- Eliminar los n primeros elementos de una lista:

```
drop 3 [1,2,3,4,5]  ⇝  [4,5]
```

Cálculo con listas

- Calcular la longitud de una lista:

```
length [1,2,3,4,5]  ⇝  5
```

- Calcular la suma de una lista de números:

```
sum [1,2,3,4,5]  ⇝  15
```

- Calcular el producto de una lista de números:

```
product [1,2,3,4,5]  ⇝  120
```

- Concatenar dos listas:

```
[1,2,3] ++ [4,5]  ⇝  [1,2,3,4,5]
```

- Invertir una lista:

```
reverse [1,2,3,4,5] ⇝  [5,4,3,2,1]
```

2.2.4. Cálculos con errores

Ejemplos de cálculos con errores

```
Prelude> 1 `div` 0
*** Exception: divide by zero
Prelude> head []
*** Exception: Prelude.head: empty list
Prelude> tail []
*** Exception: Prelude.tail: empty list
Prelude> [2,3] !! 5
*** Exception: Prelude.(!!): index too large
```

2.3. Aplicación de funciones

Aplicación de funciones en matemáticas y en Haskell

- Notación para funciones en matemáticas:
  - En matemáticas, la aplicación de funciones se representa usando paréntesis y la multiplicación usando yuxtaposición o espacios

- Ejemplo:
  $f(a,b) + cd$
  representa la suma del valor de f aplicado a a y b más el producto de c por d.

- Notación para funciones en Haskell:
  - En Haskell, la aplicación de funciones se representa usando espacios y la multiplicación usando $*$.
  - Ejemplo:
    `f a b + c*d`
    representa la suma del valor de `f` aplicado a `a` y `b` más el producto de `c` por `d`.

Prioridad de la aplicación de funciones

- En Haskell, la aplicación de funciones tiene mayor prioridad que los restantes operadores. Por ejemplo, la expresión Haskell `f a + b` representa la expresión matemática $f(a) + b$.
- Ejemplos de expresiones Haskell y matemáticas:

Matemáticas	Haskell
$f(x)$	`f x`
$f(x,y)$	`f x y`
$f(g(x))$	`f (g x)`
$f(x,g(y))$	`f x (g y)`
$f(x)g(y)$	`f x * g y`

2.4. Guiones Haskell

- En Haskell los usuarios pueden definir funciones.
- Las nuevas definiciones se definen en guiones, que son ficheros de textos compuestos por una sucesión de definiciones.
- Se acostumbra a identificar los guiones de Haskell mediante el sufijo `.hs`

2.4.1. El primer guión Haskell

- Iniciar emacs y abrir dos ventanas: `C-x 2`
- En la primera ventana ejecutar Haskell: `M-x run-haskell`
- Cambiar a la otra ventana: `C-x o`

- Iniciar el guión: `C-x C-f ejemplo.hs`
- Escribir en el guión las siguientes definiciones

```
doble x     = x+x
cuadruple x = doble (doble x)
```

- Grabar el guión: `C-x C-s`
- Cargar el guión en Haskell: `C-c C-l`
- Evaluar ejemplos:

```
*Main> cuadruple 10
40
*Main> take (doble 2) [1,2,3,4,5,6]
[1,2,3,4]
```

- Volver al guión: `C-x o`
- Añadir al guión las siguientes definiciones:

```
factorial n = product [1..n]
media ns    = sum ns `div` length ns
```

- Grabar el guión: `C-x s`
- Cargar el guión en Haskell: `C-c C-l`
- Evaluar ejemplos:

```
*Main> factorial (doble 2)
24
*Main> doble (media [1,5,3])
6
```

2.4.2. Nombres de funciones

- Los nombres de funciones tienen que empezar por una letra en minúscula. Por ejemplo,
  - `sumaCuadrado`, `suma_cuadrado`, `suma'`
- Las palabras reservadas de Haskell no pueden usarse en los nombres de funciones. Algunas palabras reservadas son

```
case   class   data     default  deriving  do      else
if     import  in       infix    infixl    infixr  instance
let    module  newtype  of       then      type    where
```

- Se acostumbra escribir los argumentos que son listas usando `s` como sufijo de su nombre. Por ejemplo,
  - `ns` representa una lista de números,
  - `xs` representa una lista de elementos,
  - `css` representa una lista de listas de caracteres.

2.4.3. La regla del sangrado

- En Haskell la disposición del texto del programa (el **sangrado**) delimita las definiciones mediante la siguiente regla:

  > Una definición acaba con el primer trozo de código con un margen izquierdo menor o igual que el del comienzo de la definición actual.

- Ejemplo:

```
a = b + c
    where
      b = 1
      c = 2
d = a * 2
```

- Consejos:
  - Comenzar las definiciones de las funciones en la primera columna.
  - Usar el tabulador en emacs para determinar el sangrado en las definiciones.

2.4.4. Comentarios en Haskell

- En los guiones Haskell pueden incluirse comentarios.
- Un **comentario simple** comienza con `--` y se extiende hasta el final de la línea.
- Ejemplo de comentario simple:

```
-- (factorial n) es el factorial del número n.
factorial n = product [1..n]
```

- Un **comentario anidado** comienza con `{-` y termina en `-}`
- Ejemplo de comentario anidado:

```
{- (factorial n) es el factorial del número n.
   Por ejemplo, factorial 3  ==  6 -}
factorial n = product [1..n]
```

Bibliografía

1. R. Bird. *Introducción a la programación funcional con Haskell*. Prentice Hall, 2000.
   - Cap. 1: Conceptos fundamentales.
2. G. Hutton *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2007.
   - Cap. 2: First steps.
3. B. O'Sullivan, D. Stewart y J. Goerzen *Real World Haskell*. O'Reilly, 2008.
   - Cap. 1: Getting Started.
4. B. Pope y A. van IJzendoorn *A Tour of the Haskell Prelude (basic functions)*
5. B.C. Ruiz, F. Gutiérrez, P. Guerrero y J.E. Gallardo. *Razonando con Haskell*. Thompson, 2004.
   - Cap. 2: Introducción a Haskell.
6. S. Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*, Second Edition. Addison-Wesley, 1999.
   - Cap. 2: Getting started with Haskell and Hugs.

Tema 3

Tipos y clases

Contenido

3.1. Conceptos básicos sobre tipos

¿Qué es un tipo?

- Un **tipo** es una colección de valores relacionados.
- Un ejemplo de tipos es el de los valores booleanos: `Bool`
- El tipo `Bool` tiene dos valores `True` (verdadero) y `False` (falso).
- `v :: T` representa que `v` es un valor del tipo `T` y se dice que "`v` tiene tipo `T`".
- Cálculo de tipo con `:type`

```
Prelude> :type True
True :: Bool
Prelude> :type False
False :: Bool
```

- El tipo `Bool -> Bool` está formado por todas las funciones cuyo argumento y valor son booleanos.
- Ejemplo de tipo `Bool -> Bool`

```
Prelude> :type not
not :: Bool -> Bool
```

Inferencia de tipos

- Regla de inferencia de tipos
$$\frac{f :: A \to B \quad e :: A}{f\ e :: B}$$
- Tipos de expresiones:

```
Prelude> :type not True
not True :: Bool
Prelude> :type not False
not False :: Bool
Prelude> :type not (not False)
not (not False) :: Bool
```

- Error de tipo:

```
Prelude> :type not 3
Error: No instance for (Num Bool)
Prelude> :type 1 + False
Error: No instance for (Num Bool)
```

Ventajas de los tipos

- Los lenguajes en los que la inferencia de tipo precede a la evaluación se denominan de **tipos seguros**.
- Haskell es un lenguaje de tipos seguros.
- En los lenguajes de tipos seguros no ocurren errores de tipos durante la evaluación.

- La inferencia de tipos no elimina todos los errores durante la evaluación. Por ejemplo,

```
Prelude> :type 1 `div` 0
1 `div` 0 :: (Integral t) => t
Prelude> 1 `div` 0
*** Exception: divide by zero
```

3.2. Tipos básicos

- `Bool` (**Valores lógicos**):
  - Sus valores son `True` y `False`.
- `Char` (**Caracteres**):
  - Ejemplos: `'a'`, `'B'`, `'3'`, `'+'`
- `String` (**Cadena de caracteres**):
  - Ejemplos: `"abc"`, `"1 + 2 = 3"`
- `Int` (**Enteros de precisión fija**):
  - Enteros entre -2^{31} y $2^{31} - 1$.
  - Ejemplos: `123`, `-12`
- `Integer` (**Enteros de precisión arbitraria**):
  - Ejemplos: `126765060022822940149670320537 6`.
- `Float` (**Reales de precisión arbitraria**):
  - Ejemplos: `1.2`, `-23.45`, `45e-7`
- `Double` (**Reales de precisión doble**):
  - Ejemplos: `1.2`, `-23.45`, `45e-7`

3.3. Tipos compuestos

3.3.1. Tipos listas

- Una **lista** es una sucesión de elementos del mismo tipo.
- `[T]` es el tipo de las listas de elementos de tipo `T`.
- Ejemplos de listas:

```
[False, True]  :: [Bool]
['a','b','d']  :: [Char]
["uno","tres"] :: [String]
```

- Longitudes:
  - La **longitud** de una lista es el número de elementos.
  - La lista de longitud 0, `[]`, es la **lista vacía**.
  - Las listas de longitud 1 se llaman **listas unitarias**.
- Comentarios:
  - El tipo de una lista no informa sobre su longitud:

```
['a','b'] :: [Char]
['a','b','c'] :: [Char]
```

  - El tipo de los elementos de una lista puede ser cualquiera:

```
[['a','b'],['c']] :: [[Char]]
```

3.3.2. Tipos tuplas

- Una **tupla** es una sucesión de elementos.
- $(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ es el tipo de las n–tuplas cuya componente i–ésima es de tipo T_i.
- Ejemplos de tuplas:

```
(False,True)     :: (Bool,Bool)
(False,'a',True) :: (Bool,Char,Bool)
```

- Aridades:
  - La **aridad** de una tupla es el número de componentes.
  - La tupla de aridad 0, `()`, es la **tupla vacía**.

  - No están permitidas las tuplas de longitud 1.
- Comentarios:
  - El tipo de una tupla informa sobre su longitud:
    ```
    ('a','b')     :: (Char,Char)
    ('a','b','c') :: (Char,Char,Char)
    ```
  - El tipo de los elementos de una tupla puede ser cualquiera:
    ```
    (('a','b'),['c','d']) :: ((Char,Char),[Char])
    ```

3.3.3. Tipos funciones

Tipos funciones

- Una **función** es una aplicación de valores de un tipo en valores de otro tipo.
- $T_1 \rightarrow T_2$ es el tipo de las funciones que aplica valores del tipo T_1 en valores del tipo T_2.
- Ejemplos de funciones:

```
not     :: Bool -> Bool
isDigit :: Char -> Bool
```

Funciones con múltiples argumentos o valores

- Ejemplo de función con múltiples argumentos:
  `suma (x,y)` es la suma de `x` e `y`. Por ejemplo, `suma (2,3)` es `5`.

```
suma :: (Int,Int) -> Int
suma (x,y) = x+y
```

- Ejemplo de función con múltiples valores:
  `deCeroA 5` es la lista de los números desde `0` hasta `n`. Por ejemplo, `deCeroA n` es `[0,1,2,3,4,5]`.

```
deCeroA :: Int -> [Int]
deCeroA n = [0..n]
```

- Notas:
  1. En las definiciones se ha escrito la **signatura** de las funciones.
  2. No es obligatorio escribir la signatura de las funciones.
  3. Es conveniente escribir las signatura.

3.4. Parcialización

Parcialización

- Mecanismo de **parcialización** (*currying* en inglés): Las funciones de más de un argumento pueden interpretarse como funciones que toman un argumento y devuelven otra función con un argumento menos.
- Ejemplo de parcialización:

```
suma' :: Int -> (Int -> Int)
suma' x y = x+y
```

  `suma'` toma un entero `x` y devuelve la función `suma' x` que toma un entero `y` y devuelve la suma de `x` e `y`. Por ejemplo,

```
*Main> :type suma' 2
suma' 2 :: Int -> Int
*Main> :type suma' 2 3
suma' 2 3 :: Int
```

- Ejemplo de parcialización con tres argumentos:

```
mult :: Int -> (Int -> (Int -> Int))
mult x y z = x*y*z
```

  `mult` toma un entero `x` y devuelve la función `mult x` que toma un entero `y` y devuelve la función `mult x y` que toma un entero `z` y devuelve `x*y*z`. Por ejemplo,

```
*Main> :type mult 2
mult 2 :: Int -> (Int -> Int)
*Main> :type mult 2 3
mult 2 3 :: Int -> Int
*Main> :type mult 2 3 7
mult 2 3 7 :: Int
```

Aplicación parcial

- Las funciones que toman sus argumentos de uno en uno se llaman **currificadas** (*curried* en inglés).
- Las funciones `suma'` y `mult` son currificadas.

- Las funciones currificadas pueden aplicarse parcialmente. Por ejemplo,

```
*Main> (suma' 2) 3
5
```

- Pueden definirse funciones usando aplicaciones parciales. Por ejemplo,

```
suc :: Int -> Int
suc = suma' 1
```

`suc x` es el sucesor de `x`. Por ejemplo, `suc 2` es 3.

Convenios para reducir paréntesis

- Convenio 1: Las flechas en los tipos se asocia por la derecha. Por ejemplo,
  `Int -> Int -> Int -> Int`
  representa a
  `Int -> (Int -> (Int -> Int))`
- Convenio 2: Las aplicaciones en de funciones se asocia por la derecha. Por ejemplo,
  `mult x y z`
  representa a
  `((mult x) y) z`
- **Nota**: Todas las funciones con múltiples argumentos se definen en forma currificada, salvo que explícitamente se diga que los argumentos tienen que ser tuplas.

3.5. Polimorfismo y sobrecarga

3.5.1. Tipos polimórficos

- Un tipo es **polimórfico** ("tiene muchas formas") si contiene una variable de tipo.
- Una función es **polimórfica** si su tipo es polimórfico.
- La función `length` es polimófica:
  - Comprobación:

```
Prelude> :type length
length :: [a] -> Int
```

  - Significa que que para cualquier tipo `a`, `length` toma una lista de elementos de tipo `a` y devuelve un entero.

- `a` es una variable de tipos.
- Las variables de tipos tienen que empezar por minúscula.
- Ejemplos:

```
length [1, 4, 7, 1]                    ⇝  4
length ["Lunes", "Martes", "Jueves"]    ⇝  3
length [reverse, tail]                  ⇝  2
```

Ejemplos de funciones polimórficas

- `fst :: (a, b) -> a`

```
fst (1,'x')       ⇝  1
fst (True,"Hoy")  ⇝  True
```

- `head :: [a] -> a`

```
head [2,1,4]    ⇝  2
head ['b','c']  ⇝  'b'
```

- `take :: Int -> [a] -> [a]`

```
take 3 [3,5,7,9,4]        ⇝  [3,5,7]
take 2 ['l','o','l','a']  ⇝  "lo"
take 2 "lola"             ⇝  "lo"
```

- `zip :: [a] -> [b] -> [(a, b)]`

```
zip [3,5] "lo"  ⇝  [(3,'l'),(5,'o')]
```

- `id :: a -> a`

```
id 3    ⇝  3
id 'x'  ⇝  'x'
```

3.5.2. Tipos sobrecargados

- Un tipo está **sobrecargado** si contiene una restricción de clases.
- Una función está **sobregargada** si su tipo está sobrecargado.
- La función `sum` está sobrecargada:
  - Comprobación:

```
Prelude> :type sum
sum :: (Num a) => [a] -> a
```

- Significa que que para cualquier tipo numérico `a`, `sumlength` toma una lista de elementos de tipo `a` y devuelve un valor de tipo `a`.
- `Num a` es una restricción de clases.
- Las restricciones de clases son expresiones de la forma `C a`, donde `C` es el nombre de una clase y `a` es una variable de tipo.
- Ejemplos:

```
sum [2, 3, 5]           ⇝  10
sum [2.1, 3.23, 5.345]  ⇝  10.675
```

Ejemplos de tipos sobrecargados

- Ejemplos de funciones sobrecargadas:
  - `(-)    :: (Num a) => a -> a -> a`
  - `(*)    :: (Num a) => a -> a -> a`
  - `negate :: (Num a) => a -> a`
  - `abs    :: (Num a) => a -> a`
  - `signum :: (Num a) => a -> a`
- Ejemplos de números sobrecargados:
  - `5   :: (Num t) => t`
  - `5.2 :: (Fractional t) => t`

3.6. Clases básicas

- Una **clase** es una colección de tipos junto con ciertas operaciones sobrecargadas llamadas **métodos**.
- Clases básicas:

`Eq`	tipos comparables por igualdad
`Ord`	tipos ordenados
`Show`	tipos mostrables
`Read`	tipos legibles
`Num`	tipos numéricos
`Integral`	tipos enteros
`Fractional`	tipos fraccionarios

La clase `Eq` (tipos comparables por igualdad)

- `Eq` contiene los tipos cuyos valores con comparables por igualdad.
- Métodos:

```
(==) :: a -> a -> Bool
(/=) :: a -> a -> Bool
```

- Instancias:
  - `Bool`, `Char`, `String`, `Int`, `Integer`, `Float` y `Double`.
  - tipos compuestos: listas y tuplas.
- Ejemplos:

```
False == True       ⇝  False
False /= True       ⇝  True
'a' == 'b'          ⇝  False
"aei" == "aei"      ⇝  True
[2,3] == [2,3,2]    ⇝  False
('a',5) == ('a',5)  ⇝  True
```

La clase `Ord` (tipos ordenados)

- `Ord` es la subclase de `Eq` de tipos cuyos valores están ordenados.
- Métodos:

```
(<), (<=), (>), (>=) :: a -> a -> Bool
min, man             :: a -> a -> a
```

- Instancias:
  - `Bool`, `Char`, `String`, `Int`, `Integer`, `Float` y `Double`.
  - tipos compuestos: listas y tuplas.
- Ejemplos:

```
False < True             ⇝  True
min 'a' 'b'              ⇝  'a'
"elegante" < "elefante"  ⇝  False
[1,2,3] < [1,2]          ⇝  False
('a',2) < ('a',1)        ⇝  False
('a',2) < ('b',1)        ⇝  True
```

La clase `Show` (tipos mostrables)

- `Show` contiene los tipos cuyos valores se pueden convertir en cadenas de caracteres.
- Método:

```
show :: a -> String
```

- Instancias:
  - `Bool`, `Char`, `String`, `Int`, `Integer`, `Float` y `Double`.
  - tipos compuestos: listas y tuplas.
- Ejemplos:

```
show False       ⇝  "False"
show 'a'         ⇝  "'a'"
show 123         ⇝  "123"
show [1,2,3]     ⇝  "[1,2,3]"
show ('a',True)  ⇝  "('a',True)"
```

La clase `Read` (tipos legibles)

- `Read` contiene los tipos cuyos valores se pueden obtener a partir de cadenas de caracteres.
- Método:

```
read :: String -> a
```

- Instancias:
  - `Bool`, `Char`, `String`, `Int`, `Integer`, `Float` y `Double`.
  - tipos compuestos: listas y tuplas.
- Ejemplos:

```
read "False" :: Bool                ⇝  False
read "'a'" :: Char                  ⇝  'a'
read "123" :: Int                   ⇝  123
read "[1,2,3]" :: [Int]             ⇝  [1,2,3]
read "('a',True)" :: (Char,Bool)    ⇝  ('a',True)
```

La clase `Num` (tipos numéricos)

- `Num` es la subclase de `Eq` y `Ord` de tipos cuyos valores son números
- Métodos:

```
(+), (*), (-)       :: a -> a -> a
negate, abs, signum :: a -> a
```

- Instancias: `Int`, `Integer`, `Float` y `Double`.
- Ejemplos:

```
2+3          ⇝  5
2.3+4.2      ⇝  6.5
negate 2.7   ⇝  -2.7
abs (-5)     ⇝  5
signum (-5)  ⇝  -1
```

La clase `Integral` (tipos enteros)

- `Integral` es la subclase de `Num` cuyo tipos tienen valores enteros.
- Métodos:

```
div :: a -> a -> a
mod :: a -> a -> a
```

- Instancias: `Int` e `Integer`.
- Ejemplos:

```
11 `div` 4  ⇝  2
11 `mod` 4  ⇝  3
```

La clase `Fractional` (tipos fraccionarios)

- `Fractional` es la subclase de `Num` cuyo tipos tienen valores no son enteros.
- Métodos:

```
(/)   :: a -> a -> a
recip :: a -> a
```

- Instancias: `Float` y `Double`.

- Ejemplos:

```
7.0 / 2.0  ⇝  3.5
recip 0.2  ⇝  5.0
```

Bibliografía

1. R. Bird. *Introducción a la programación funcional con Haskell*. Prentice Hall, 2000.
   - Cap. 2: Tipos de datos simples.
2. G. Hutton *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2007.
   - Cap. 3: Types and classes.
3. B. O'Sullivan, D. Stewart y J. Goerzen *Real World Haskell*. O'Reilly, 2008.
   - Cap. 2: Types and Functions.
4. B.C. Ruiz, F. Gutiérrez, P. Guerrero y J.E. Gallardo. *Razonando con Haskell*. Thompson, 2004.
   - Cap. 2: Introducción a Haskell.
   - Cap. 5: El sistema de clases de Haskell.
5. S. Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*, Second Edition. Addison-Wesley, 1999.
   - Cap. 3: Basic types and definitions.

Tema 4

Definición de funciones

Contenido

4.1. Definiciones por composición

- Decidir si un carácter es un dígito:

Prelude
```
isDigit :: Char -> Bool
isDigit c = c >= '0' && c <= '9'
```

- Decidir si un entero es par:

Prelude
```
even :: (Integral a) => a -> Bool
even n =  n `rem` 2 == 0
```

- Dividir una lista en su n–ésimo elemento:

Prelude
```
splitAt :: Int -> [a] -> ([a],[a])
splitAt n xs = (take n xs, drop n xs)
```

4.2. Definiciones con condicionales

- Calcular el valor absoluto (con condicionales):

Prelude
```
abs :: Int -> Int
abs n = if n >= 0 then n else -n
```

- Calcular el signo de un número (con condicionales anidados):

Prelude
```
signum :: Int -> Int
signum n = if n < 0 then (-1) else
              if n == 0 then 0 else 1
```

4.3. Definiciones con ecuaciones con guardas

- Calcular el valor absoluto (con ecuaciones guardadas):

Prelude
```
abs n | n >= 0    = n
      | otherwise = -n
```

- Calcular el signo de un número (con ecuaciones guardadas):

Prelude
```
signum n | n < 0     = -1
         | n == 0    = 0
         | otherwise = 1
```

4.4. Definiciones con equiparación de patrones

4.4.1. Constantes como patrones

- Calcular la negación:

Prelude
```
not :: Bool -> Bool
not True  =  False
not False =  True
```

- Calcular la conjunción (con valores):

Prelude
```
(&&)  :: Bool -> Bool -> Bool
True  && True  = True
True  && False = False
False && True  = False
False && False = False
```

4.4.2. Variables como patrones

- Calcular la conjunción (con variables anónimas):

Prelude
```
(&&) :: Bool -> Bool -> Bool
True  && True =  True
_     && _    =  False
```

- Calcular la conjunción (con variables):

Prelude
```
(&&) :: Bool -> Bool -> Bool
True  && x =  x
False && _ =  False
```

4.4.3. Tuplas como patrones

- Calcular el primer elemento de un par:

Prelude
```
fst :: (a,b) -> a
fst (x,_) = x
```

- Calcular el segundo elemento de un par:

Prelude
```
snd :: (a,b) -> b
snd (_,y) = y
```

4.4.4. Listas como patrones

- `(test1 xs)` se verifica si `xs` es una lista de 3 caracteres que empieza por `'a'`.

```
test1 :: [Char ] -> Bool
test1 ['a',_,_] = True
test1 _         = False
```

- Construcción de listas con `(:)`

```
[1,2,3] = 1:[2,3] = 1:(2:[3]) = 1:(2:(3:[]))
```

- `(test2 xs)` se verifica si `xs` es una lista de caracteres que empieza por `'a'`.

```
test2 :: [Char ] -> Bool
test2 ('a':_) = True
test2 _       = False
```

- Decidir si una lista es vacía:

Prelude
```
null :: [a] -> Bool
null []    = True
null (_:_) = False
```

- Primer elemento de una lista:

Prelude
```
head :: [a] -> a
head (x:_) =  x
```

- Resto de una lista:

Prelude
```
tail :: [a] -> [a]
tail (_:xs) = xs
```

4.4.5. Patrones enteros

- Predecesor de un número entero:

Prelude
```
pred :: Int -> Int
pred 0     = 0
pred (n+1) = n
```

- Comentarios sobre los patrones `n+k`:
  - `n+k` sólo se equipara con números mayores o iguales que `k`
  - Hay que escribirlo entre paréntesis.

4.5. Expresiones lambda

- Las funciones pueden construirse sin nombrarlas mediante las expresiones lambda.
- Ejemplo de evaluación de expresiones lambda:

```
Prelude> (\x -> x+x) 3
6
```

Uso de las expresiones lambda para resaltar la parcialización:

- `(suma x y)` es la suma de `x` e `y`.
- Definición sin lambda:

```
suma x y = x+y
```

- Definición con lambda:

```
suma' = \x -> (\y -> x+y)
```

Uso de las expresiones lambda en funciones como resultados:

- `(const x y)` es `x`.
- Definición sin lambda:

Prelude

```
const :: a -> b -> a
const x = x
```

- Definición con lambda:

```
const' :: a -> (b -> a)
const' x = \_ -> x
```

Uso de las expresiones lambda en funciones con sólo un uso:

- `(impares n)` es la lista de los `n` primeros números impares.

- Definición sin lambda:

```
impares n = map f [0..n-1]
    where f x = 2*x+1
```

- Definición con lambda:

```
impares' n = map (\x -> 2*x+1) [0..n-1]
```

4.6. Secciones

- Los **operadores** son las funciones que se escriben entre sus argumentos.
- Los operadores pueden convertirse en funciones prefijas escribiéndolos entre paréntesis.
- Ejemplo de conversión:

```
Prelude> 2 + 3
5
Prelude> (+) 2 3
5
```

- Ejemplos de secciones:

```
Prelude> (2+) 3
5
Prelude> (+3) 2
5
```

Expresión de secciones mediante lambdas

Sea $*$ un operador. Entonces

- `(*)  = \x -> (\y -> x*y)`
- `(x*) = \y -> x*y`
- `(*y) = \x -> x*y`

Aplicaciones de secciones

- Uso en definiciones de funciones mediante secciones

```
suma'     = (+)
siguiente = (1+)
inverso   = (1/)
doble     = (2*)
mitad     = (/2)
```

- Uso en signatura de operadores:

Prelude
```
(&&) :: Bool -> Bool -> Bool
```

- Uso como argumento:

```
Prelude> map (2*) [1..5]
[2,4,6,8,10]
```

Bibliografía

1. R. Bird. *Introducción a la programación funcional con Haskell*. Prentice Hall, 2000.
   - Cap. 1: Conceptos fundamentales.
2. G. Hutton *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2007.
   - Cap. 4: Defining functions.
3. B. O'Sullivan, D. Stewart y J. Goerzen *Real World Haskell*. O'Reilly, 2008.
   - Cap. 2: Types and Functions.
4. B.C. Ruiz, F. Gutiérrez, P. Guerrero y J.E. Gallardo. *Razonando con Haskell*. Thompson, 2004.
   - Cap. 2: Introducción a Haskell.
5. S. Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*, Second Edition. Addison-Wesley, 1999.
   - Cap. 3: Basic types and definitions.

Tema 5

Definiciones de listas por comprensión

Contenido

5.1. Generadores

Definiciones por comprensión

- Definiciones por comprensión en Matemáticas:
  $\{x^2 : x \in \{2,3,4,5\}\} = \{4,9,16,25\}$
- Definiciones por comprensión en Haskell:

```
Prelude> [x^2 | x <- [2..5]]
[4,9,16,25]
```

- La expresión `x <- [2..5]` se llama un **generador**.
- Ejemplos con más de un generador:

```
Prelude> [(x,y) | x <- [1,2,3], y <- [4,5]]
[(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)]
Prelude> [(x,y) | y <- [4,5], x <- [1,2,3]]
[(1,4),(2,4),(3,4),(1,5),(2,5),(3,5)]
```

Generadores dependientes

- Ejemplo con generadores dependientes:

```
Prelude> [(x,y) | x <- [1..3], y <- [x..3]]
[(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)]
```

- `(concat xss)` es la concatenación de la lista de listas `xss`. Por ejemplo,

```
concat [[1,3],[2,5,6],[4,7]]  ⇝  [1,3,2,5,6,4,7]
```

Prelude

```
concat :: [[a]] -> [a]
concat xss = [x | xs <- xss, x <- xs]
```

Generadores con variables anónimas

- Ejemplo de generador con variable anónima:
  `(primeros ps)` es la lista de los primeros elementos de la lista de pares `ps`. Por ejemplo,

```
primeros [(1,3),(2,5),(6,3)]  ⇝  [1,2,6]
```

```
primeros :: [(a, b)] -> [a]
primeros ps =  [x | (x,_) <- ps]
```

- Definición de la longitud por comprensión

Prelude

```
length :: [a] -> Int
length xs = sum [1 | _ <- xs]
```

5.2. Guardas

- Las listas por comprensión pueden tener **guardas** para restringir los valores.
- Ejemplo de guarda:

```
Prelude> [x | x <- [1..10], even x]
[2,4,6,8,10]
```

  La guarda es `even x`.

- `(factores n)` es la lista de los factores del número `n`. Por ejemplo,

```
factores 30  ⇝  [1,2,3,5,6,10,15,30]
```

```
factores :: Int -> [Int]
factores n = [x | x <- [1..n], n `mod` x == 0]
```

- `(primo n)` se verifica si `n` es primo. Por ejemplo,

```
primo 30  ⇝ False
primo 31  ⇝ True
```

```
primo :: Int -> Bool
primo n = factores n == [1, n]
```

- `(primos n)` es la lista de los primos menores o iguales que `n`. Por ejemplo,

```
primos 31  ⇝ [2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31]
```

```
primos :: Int -> [Int]
primos n = [x | x <- [2..n], primo x]
```

Guarda con igualdad

- Una **lista de asociación** es una lista de pares formado por una clave y un valor. Por ejemplo,

```
[("Juan",7),("Ana",9),("Eva",3)]
```

- `(busca c t)` es la lista de los valores de la lista de asociación `t` cuyas claves valen `c`. Por ejemplo,

```
Prelude> busca 'b' [('a',1),('b',3),('c',5),('b',2)]
[3,2]
```

```
busca :: Eq a => a -> [(a, b)] -> [b]
busca c t = [v | (c', v) <- t, c' == c]
```

5.3. La función `zip`

La función `zip` y elementos adyacentes

- `(zip xs ys)` es la lista obtenida emparejando los elementos de las listas `xs` e `ys`. Por ejemplo,

```
Prelude> zip ['a','b','c'] [2,5,4,7]
[('a',2),('b',5),('c',4)]
```

- `(adyacentes xs)` es la lista de los pares de elementos adyacentes de la lista xs. Por ejemplo,

```
adyacentes [2,5,3,7]  ⇝  [(2,5),(5,3),(3,7)]
```

```
adyacentes :: [a] -> [(a, a)]
adyacentes xs = zip xs (tail xs)
```

Las funciones `zip`, `and` y listas ordenadas

- `(and xs)` se verifica si todos los elementos de `xs` son verdaderos. Por ejemplo,

```
and [2 < 3, 2+3 == 5]         ⇝  True
and [2 < 3, 2+3 == 5, 7 < 7]  ⇝  False
```

- `(ordenada xs)` se verifica si la lista `xs` está ordenada. Por ejemplo,

```
ordenada [1,3,5,6,7]  ⇝  True
ordenada [1,3,6,5,7]  ⇝  False
```

```
ordenada :: Ord a => [a] -> Bool
ordenada xs = and [x <= y | (x,y) <- adyacentes xs]
```

La función `zip` y lista de posiciones

- `(posiciones x xs)` es la lista de las posiciones ocupadas por el elemento `x` en la lista `xs`. Por ejemplo,

```
posiciones 5 [1,5,3,5,5,7]  ⇝  [1,3,4]
```

```
posiciones :: Eq a => a -> [a] -> [Int]
posiciones x xs =
    [i | (x',i) <- zip xs [0..n], x == x']
    where n = length xs - 1
```

5.4. Comprensión de cadenas

Cadenas y listas

- Las cadenas son listas de caracteres. Por ejemplo,

```
*Main> "abc" == ['a','b','c']
True
```

- La expresión

```
"abc" :: String
```

  es equivalente a

```
['a','b','c'] :: [Char]
```

- Las funciones sobre listas se aplican a las cadenas:

```
length "abcde"              ⇝  5
reverse "abcde"             ⇝  "edcba"
"abcde" ++ "fg"             ⇝  "abcdefg"
posiciones 'a' "Salamanca"  ⇝  [1,3,5,8]
```

Definiciones sobre cadenas con comprensión

- `(minusculas c)` es la cadena formada por las letras minúsculas de la cadena `c`. Por ejemplo,

```
minusculas "EstoEsUnaPrueba"  ⇝  "stosnarueba"
```

```
minusculas :: String -> String
minusculas xs = [x | x <- xs, elem x ['a'..'z']]
```

- `(ocurrencias x xs)` es el número de veces que ocurre el carácter `x` en la cadena `xs`. Por ejemplo,

```
ocurrencias 'a' "Salamanca"  ⇝  4
```

```
ocurrencias :: Char -> String -> Int
ocurrencias x xs = length [x' | x' <- xs, x == x']
```

5.5. Cifrado César

- En el cifrado César cada letra en el texto original es reemplazada por otra letra que se encuentra 3 posiciones más adelante en el alfabeto.
- La codificación de

```
"en todo la medida"
```

  es

```
"hq wrgr od phglgd"
```

- Se puede generalizar desplazando cada letra n posiciones.
- La codificación con un desplazamiento 5 de

```
"en todo la medida"
```

  es

```
"js ytit qf rjinif"
```

- La descodificación de un texto codificado con un desplazamiento n se obtiene codificándolo con un desplazamiento $-n$.

5.5.1. Codificación y descodificación

Las funciones `ord` y `char`

- `(ord c)` es el código del carácter `c`. Por ejemplo,

```
ord 'a'  ⇝  97
ord 'b'  ⇝  98
ord 'A'  ⇝  65
```

- `(char n)` es el carácter de código `n`. Por ejemplo,

```
chr 97  ⇝  'a'
chr 98  ⇝  'b'
chr 65  ⇝  'A'
```

Codificación y descodificación: Código de letra

- Simplificación: Sólo se codificarán las letras minúsculas dejando los restantes caracteres sin modificar.
- `(let2int c)` es el entero correspondiente a la letra minúscula `c`. Por ejemplo,

```
let2int 'a'  ⇝  0
let2int 'd'  ⇝  3
let2int 'z'  ⇝  25
```

```
let2int :: Char -> Int
let2int c = ord c - ord 'a'
```

Codificación y descodificación: Letra de código

- `(int2let n)` es la letra minúscula correspondiente al entero `n`. Por ejemplo,

```
int2let 0   ⇝  'a'
int2let 3   ⇝  'd'
int2let 25  ⇝  'z'
```

```
int2let :: Int -> Char
int2let n = chr (ord 'a' + n)
```

Codificación y descodificación: Desplazamiento

- `(desplaza n c)` es el carácter obtenido desplazando `n` caracteres el carácter `c`. Por ejemplo,

```
desplaza   3  'a'  ⇝  'd'
desplaza   3  'y'  ⇝  'b'
desplaza (-3) 'd'  ⇝  'a'
desplaza (-3) 'b'  ⇝  'y'
```

```
desplaza :: Int -> Char -> Char
desplaza n c
    | elem c ['a'..'z'] = int2let ((let2int c+n) `mod` 26)
    | otherwise         = c
```

Codificación y descodificación

- `(codifica n xs)` es el resultado de codificar el texto `xs` con un desplazamiento `n`. Por ejemplo,

```
Prelude> codifica   3  "En todo la medida"
"Eq wrgr od phglgd"
Prelude> codifica (-3) "Eq wrgr od phglgd"
"En todo la medida"
```

```
codifica :: Int -> String -> String
codifica n xs = [desplaza n x | x <- xs]
```

Propiedades de la codificación con QuickCheck

- Propiedad: Al desplazar $-n$ un carácter desplazado n, se obtiene el carácter inicial.

```
prop_desplaza n xs =
    desplaza (-n) (desplaza n xs) == xs
```

```
*Main> quickCheck prop_desplaza
+++ OK, passed 100 tests.
```

- Propiedad: Al codificar con $-n$ una cadena codificada con n, se obtiene la cadena inicial.

```
prop_codifica n xs =
    codifica (-n) (codifica n xs) == xs
```

```
*Main> quickCheck prop_codifica
+++ OK, passed 100 tests.
```

5.5.2. Análisis de frecuencias

Tabla de frecuencias

- Para descifrar mensajes se parte de la frecuencia de aparición de letras.
- `tabla` es la lista de la frecuencias de las letras en castellano, Por ejemplo, la frecuencia de la `'a'` es del 12.53 %, la de la `'b'` es 1.42 %.

```
tabla :: [Float]
tabla = [12.53, 1.42, 4.68, 5.86, 13.68, 0.69, 1.01,
          0.70, 6.25, 0.44, 0.01,  4.97, 3.15, 6.71,
          8.68, 2.51, 0.88, 6.87,  7.98, 4.63, 3.93,
          0.90, 0.02, 0.22, 0.90,  0.52]
```

Frecuencias

- `(porcentaje n m)` es el porcentaje de `n` sobre `m`. Por ejemplo,

```
porcentaje 2 5  ⇝  40.0
```

```
porcentaje :: Int -> Int -> Float
porcentaje n m = (fromIntegral n / fromIntegral m) * 100
```

- `(frecuencias xs)` es la frecuencia de cada una de las minúsculas de la cadena `xs`. Por ejemplo,

```
Prelude> frecuencias "en todo la medida"
[14.3,0,0,21.4,14.3,0,0,0,7.1,0,0,7.1,
 7.1,7.1,14.3,0,0,0,0,7.1,0,0,0,0,0,0]
```

```
frecuencias :: String -> [Float]
frecuencias xs =
    [porcentaje (ocurrencias x xs) n | x <- ['a'..'z']]
    where n = length (minusculas xs)
```

5.5.3. Descifrado

Descifrado: Ajuste chi cuadrado

- Una medida de la discrepancia entre la distribución observada os_i y la esperada es_i es

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(os_i - es_i)^2}{es_i}$$

  Los menores valores corresponden a menores discrepancias.

- `(chiCuad os es)` es la medida chi cuadrado de las distribuciones `os` y `es`. Por ejemplo,

```
chiCuad [3,5,6] [3,5,6]  ⇝  0.0
chiCuad [3,5,6] [5,6,3]  ⇝  3.9666667
```

```
chiCuad :: [Float] -> [Float] -> Float
chiCuad os es =
    sum [((o-e)^2)/e | (o,e) <- zip os es]
```

Descifrado: Rotación

- `(rota n xs)` es la lista obtenida rotando `n` posiciones los elementos de la lista `xs`. Por ejemplo,

```
rota 2 "manolo"  ⇝  "noloma"
```

```
rota :: Int -> [a] -> [a]
rota n xs = drop n xs ++ take n xs
```

Descifrado

- (descifra xs) es la cadena obtenida descodificando la cadena `xs` por el anti-desplazamiento que produce una distribución de minúsculas con la menor deviación chi cuadrado respecto de la tabla de distribución de las letras en castellano. Por ejemplo,

```
*Main> codifica 5 "Todo para nada"
"Ttit ufwf sfif"
*Main> descifra "Ttit ufwf sfif"
"Todo para nada"
```

```
descifra :: String -> String
descifra xs =  codifica (-factor) xs
 where
  factor = head (posiciones (minimum tabChi) tabChi)
  tabChi = [chiCuad (rota n tabla') tabla | n <- [0..25]]
  tabla' = frecuencias xs
```

Bibliografía

1. R. Bird. *Introducción a la programación funcional con Haskell*. Prentice Hall, 2000.
   - Cap. 4: Listas.
2. G. Hutton *Programming in Haskell*. Cambridge University Press.
   - Cap. 5: List comprehensions.
3. B. O'Sullivan, D. Stewart y J. Goerzen *Real World Haskell*. O'Reilly, 2008.
   - Cap. 12: Barcode Recognition.
4. B.C. Ruiz, F. Gutiérrez, P. Guerrero y J.E. Gallardo. *Razonando con Haskell*. Thompson, 2004.
   - Cap. 6: Programación con listas.
5. S. Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*, Second Edition. Addison-Wesley, 1999.
   - Cap. 5: Data types: tuples and lists.

Tema 6

Funciones recursivas

Contenido

6.1. Recursión numérica

Recursión numérica: El factorial

- La función factorial:

```
factorial :: Integer -> Integer
factorial 0       = 1
factorial (n + 1) = (n + 1) * factorial n
```

- Cálculo:

```
factorial 3 = 3 * (factorial 2)
            = 3 * (2 * (factorial 1))
            = 3 * (2 * (1 * (factorial 0)))
            = 3 * (2 * (1 * 1))
            = 3 * (2 * 1)
            = 3 * 2
            = 6
```

Recursión numérica: El producto

- Definición recursiva del producto:

```
por :: Int -> Int -> Int
m `por` 0       = 0
m `por` (n + 1) = m + (m `por` n)
```

- Cálculo:

```
3 `por` 2 = 3 + (3 `por` 1)
          = 3 + (3 + (3 `por` 0))
          = 3 + (3 + 0)
          = 3 + 3
          = 6
```

6.2. Recusión sobre lista

Recursión sobre listas: La función `product`

- Producto de una lista de números:

Prelude

```
product :: Num a => [a] -> a
product []     = 1
product (n:ns) = n * product ns
```

- Cálculo:

```
product [7,5,2] = 7 * (product [5,2])
                = 7 * (5 * (product [2]))
                = 7 * (5 * (2 * (product [])))
                = 7 * (5 * (2 * 1))
                = 7 * (5 * 2)
                = 7 * 10
                = 70
```

Recursión sobre listas: La función `length`

- Longitud de una lista:

Prelude
```
length :: [a] -> Int
length []     = 0
length (_:xs) = 1 + length xs
```

- Cálculo:

```
length [2,3,5] = 1 + (length [3,5])
               = 1 + (1 + (length [5]))
               = 1 + (1 + (1 + (length [])))
               = 1 + (1 + (1 + 0))
               = 1 + (1 + 1)
               = 1 + 2
               = 3
```

Recursión sobre listas: La función `reverse`

- Inversa de una lista:

Prelude
```
reverse :: [a] -> [a]
reverse []     = []
reverse (x:xs) = reverse xs ++ [x]
```

- Cálculo:

```
reverse [2,5,3] = (reverse [5,3]) ++ [2]
                = ((reverse [3]) ++ [5]) ++ [2]
                = (((reverse []) ++ [3]) ++ [5]) ++ [2]
                = (([] ++ [3]) ++ [5]) ++ [2]
                = ([3] ++ [5]) ++ [2]
                = [3,5] ++ [2]
                = [3,5,2]
```

Recursión sobre listas: `++`

- Concatenación de listas:

Prelude
```
(++) :: [a] -> [a] -> [a]
[]     ++ ys = ys
(x:xs) ++ ys = x : (xs ++ ys)
```

- Cálculo:

```
[1,3,5] ++ [2,4] = 1:([3,5] ++ [2,4])
                 = 1:(3:([5] ++ [2,4]))
                 = 1:(3:(5:([] ++ [2,4])))
                 = 1:(3:(5:[2,4]))
                 = 1:(3:[5,2,4])
                 = 1:[3,5,2,4]
                 = [1,3,5,2,4]
```

Recursión sobre listas: Inserción ordenada

- `(inserta e xs)` inserta el elemento `e` en la lista `xs` delante del primer elemento de `xs` mayor o igual que `e`. Por ejemplo,

```
inserta 5 [2,4,7,3,6,8,10] ⇝ [2,4,5,7,3,6,8,10]
```

```
inserta :: Ord a => a -> [a] -> [a]
inserta e []                 = [e]
inserta e (x:xs) | e <= x    = e : (x:xs)
                 | otherwise = x : inserta e xs
```

- Cálculo:

```
inserta 4 [1,3,5,7] = 1:(inserta 4 [3,5,7])
                    = 1:(3:(inserta 4 [5,7]))
                    = 1:(3:(4:(5:[7])))
                    = 1:(3:(4:[5,7]))
                    = [1,3,4,5,7]
```

Recursión sobre listas: Ordenación por inserción

- `(ordena_por_insercion xs)` es la lista `xs` ordenada mediante inserción, Por ejemplo,

```
ordena_por_insercion [2,4,3,6,3] ⇝ [2,3,3,4,6]
```

```
ordena_por_insercion :: Ord a => [a] -> [a]
ordena_por_insercion []     = []
ordena_por_insercion (x:xs) =
    inserta x (ordena_por_insercion xs)
```

- Cálculo:

```
  ordena_por_insercion [7,9,6] =
= inserta 7 (inserta 9 (inserta 6 []))
= inserta 7 (inserta 9 [6])
= inserta 7 [6,9]
= [6,7,9]
```

6.3. Recursión sobre varios argumentos

Recursión sobre varios argumentos: La función `zip`

- Emparejamiento de elementos:

Prelude
```
zip :: [a] -> [b] -> [(a, b)]
zip []     _      = []
zip _      []     = []
zip (x:xs) (y:ys) = (x,y) : zip xs ys
```

- Cálculo:

```
  zip [1,3,5] [2,4,6,8]
= (1,2) : (zip [3,5] [4,6,8])
= (1,2) : ((3,4) : (zip [5] [6,8]))
= (1,2) : ((3,4) : ((5,6) : (zip [] [8])))
= (1,2) : ((3,4) : ((5,6) : []))
= [(1,2),(3,4),(5,6)]
```

Recursión sobre varios argumentos: La función `drop`

- Eliminación de elementos iniciales:

Prelude
```
drop :: Int -> [a] -> [a]
drop 0 xs         = xs
drop (n+1) []     = []
drop (n+1) (x:xs) = drop n xs
```

- Cálculo:

```
  drop 2 [5,7,9,4]     |          drop 5 [1,4]
= drop 1 [7,9,4]       |        = drop 4 [4]
= drop 0 [9,4]         |        = drop 1 []
= [9,4]                |        = []
```

6.4. Recursión múltiple

Recursión múltiple: La función de Fibonacci

- La sucesión de Fibonacci es: 0,1,1,2,3,5,8,13,21,.... Sus dos primeros términos son 0 y 1 y los restantes se obtienen sumando los dos anteriores.
- `(fibonacci n)` es el `n`–ésimo término de la sucesión de Fibonacci. Por ejemplo,

```
fibonacci 8  ⇝  21
```

```
fibonacci :: Int -> Int
fibonacci 0     = 0
fibonacci 1     = 1
fibonacci (n+2) = fibonacci n + fibonacci (n+1)
```

Recursión múltiple: Ordenación rápida

- Algoritmo de ordenación rápida:

```
ordena :: (Ord a) => [a] -> [a]
ordena [] = []
ordena (x:xs) =
    (ordena menores) ++ [x] ++ (ordena mayores)
    where menores = [a | a <- xs, a <= x]
          mayores = [b | b <- xs, b > x]
```

6.5. Recursión mutua

Recursión mutua: Par e impar

- Par e impar por recursión mutua:

```
par :: Int -> Bool
par 0     = True
par (n+1) = impar n

impar :: Int -> Bool
impar 0     = False
impar (n+1)  = par n
```

- Cálculo:

```
  impar 3             |           par 3
= par 2               |         = impar 2
= impar 1             |         = par 1
= par 0               |         = impar 0
= True                |         = False
```

Recursión mutua: Posiciones pares e impares

- `(pares xs)` son los elementos de `xs` que ocupan posiciones pares.
- `(impares xs)` son los elementos de `xs` que ocupan posiciones impares.

```
pares :: [a] -> [a]
pares []     = []
pares (x:xs) = x : impares xs

impares :: [a] -> [a]
impares []     = []
impares (_:xs) = pares xs
```

- Cálculo:

```
  pares [1,3,5,7]
= 1:(impares [3,5,7])
= 1:(pares [5,7])
= 1:(5:(impares [7]))
= 1:(5:[])
= [1,5]
```

6.6. Heurísticas para las definiciones recursivas

Aplicación del método: La función `product`

- Paso 1: Definir el tipo:

```
product :: [Int] -> Int
```

- Paso 2: Enumerar los casos:

```
product :: [Int] -> Int
product []     =
product (n:ns) =
```

- Paso 3: Definir los casos simples:

```
product :: [Int] -> Int
product []     = 1
product (n:ns) =
```

- Paso 4: Definir los otros casos:

```
product :: [Int] -> Int
product []     = 1
product (n:ns) = n * product ns
```

- Paso 5: Generalizar y simplificar:

```
product :: Num a => [a] -> a
product = foldr (*) 1
```

donde `(foldr op e l)` pliega por la derecha la lista `l` colocando el operador `op` entre sus elementos y el elemento `e` al final. Por ejemplo,

```
foldr (+) 6 [2,3,5] ⇝ 2+(3+(5+6)) ⇝ 16
foldr (-) 6 [2,3,5] ⇝ 2-(3-(5-6)) ⇝ -2
```

Aplicación del método: La función `drop`

- Paso 1: Definir el tipo:

```
drop :: Int -> [a] -> [a]
```

- Paso 2: Enumerar los casos:

```
drop :: Int -> [a] -> [a]
drop 0 []         =
drop 0 (x:xs)     =
drop (n+1) []     =
drop (n+1) (x:xs) =
```

- Paso 3: Definir los casos simples:

```
drop :: Int -> [a] -> [a]
drop 0 []         = []
drop 0 (x:xs)     = x:xs
drop (n+1) []     = []
drop (n+1) (x:xs) =
```

- Paso 4: Definir los otros casos:

```
drop :: Int -> [a] -> [a]
drop 0 []         = []
drop 0 (x:xs)     = x:xs
drop (n+1) []     = []
drop (n+1) (x:xs) = drop n xs
```

- Paso 5: Generalizar y simplificar:

```
drop :: Integral b => b -> [a] -> [a]
drop 0 xs         = xs
drop (n+1) []     = []
drop (n+1) (_:xs) = drop n xs
```

Aplicación del método: La función `init`

- `init` elimina el último elemento de una lista no vacía.

- Paso 1: Definir el tipo:

```
init :: [a] -> [a]
```

- Paso 2: Enumerar los casos:

```
init :: [a] -> [a]
init (x:xs) =
```

- Paso 3: Definir los casos simples:

```
init :: [a] -> [a]
init (x:xs) | null xs   = []
            | otherwise =
```

- Paso 4: Definir los otros casos:

```
init :: [a] -> [a]
init (x:xs) | null xs   = []
            | otherwise = x : init xs
```

- Paso 5: Generalizar y simplificar:

```
init :: [a] -> [a]
init [_]    = []
init (x:xs) = x : init xs
```

Bibliografía

1. R. Bird. *Introducción a la programación funcional con Haskell*. Prentice Hall, 2000.
   - Cap. 3: Números.
   - Cap. 4: Listas.
2. G. Hutton *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2007.
   - Cap. 6: Recursive functions.
3. B. O'Sullivan, D. Stewart y J. Goerzen *Real World Haskell*. O'Reilly, 2008.
   - Cap. 2: Types and Functions.

4. B.C. Ruiz, F. Gutiérrez, P. Guerrero y J.E. Gallardo. *Razonando con Haskell*. Thompson, 2004.

   - Cap. 2: Introducción a Haskell.
   - Cap. 6: Programación con listas.

5. S. Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*, Second Edition. Addison-Wesley, 1999.

   - Cap. 4: Designing and writing programs.

Tema 7

Razonamiento sobre programas

Contenido

7.1. Razonamiento ecuacional

7.1.1. Cálculo con `longitud`

- Programa:

```
longitud []     = 0                 -- longitud.1
longitud (_:xs) = 1 + longitud xs   -- longitud.2
```

- Propiedad: `longitud [2,3,1] = 3`
- Demostración:
  `longitud [2,3,1]`
  = 1 + `longitud [2,3]` [por `longitud.2`]
  = 1 + (1 + `longitud [3]`) [por `longitud.2`]
  = 1 + (1 + (1 + `longitud []`)) [por `longitud.2`]
  = 1 + (1 + (1 + 0) [por `longitud.1`]
  = 3

7.1.2. Propiedad de `intercambia`

- Programa:

```
intercambia :: (a,b) -> (b,a)
intercambia (x,y) = (y,x)       -- intercambia
```

- Propiedad: `intercambia (intercambia (x,y)) = (x,y)`.
- Demostración:
  `intercambia (intercambia (x,y))`
  = `intercambia (y,x)` [por `intercambia`]
  = `(x,y)` [por `intercambia`]

Comprobación con QuickCheck

- Propiedad:

```
prop_intercambia :: Eq a => a -> a -> Bool
prop_intercambia x y =
    intercambia (intercambia (x,y)) == (x,y)
```

- Comprobación:

```
*Main> quickCheck prop_intercambia
+++ OK, passed 100 tests.
```

7.1.3. Inversa de listas unitarias

- Inversa de una lista:

```
inversa :: [a] -> [a]
inversa []     = []                    -- inversa.1
inversa (x:xs) = inversa xs ++ [x]     -- inversa.2
```

- Prop.: `inversa [x] = [x]`

  `inversa [x]`
  `= inversa (x:[])` [notación de lista]
  `= (inversa []) ++ [x]` [inversa.2]
  `= [] ++ [x]` [inversa.1]
  `= [x]` [def. de ++]

Comprobación con QuickCheck

- Propiedad:

```
prop_inversa_unitaria :: (Eq a) => a -> Bool
prop_inversa_unitaria x =
    inversa [x] == [x]
```

- Comprobación:

```
*Main> quickCheck prop_inversa_unitaria
+++ OK, passed 100 tests.
```

7.1.4. Razonamiento ecuacional con análisis de casos

- Negación lógica:

Prelude

```
not :: Bool -> Bool
not False = True
not True  = False
```

- Prop.: `not (not x) = x`
- Demostración por casos:
  - Caso 1: `x = True`:

    `not (not True)` `= not False` [not.2]
    `= True` [not.1]

- Caso 2: `x = False`:
  ```
  not (not False)  = not True  [not.1]
                   = False     [not.2]
  ```

Comprobación con QuickCheck

- Propiedad:

```
prop_doble_negacion :: Bool -> Bool
prop_doble_negacion x =
  not (not x) == x
```

- Comprobación:

```
*Main> quickCheck prop_doble_negacion
+++ OK, passed 100 tests.
```

7.2. Razonamiento por inducción sobre los naturales

7.2.1. Esquema de inducción sobre los naturales

Para demostrar que todos los números naturales tienen una propiedad `P` basta probar:

1. Caso base `n=0`:
   `P(0)`.
2. Caso inductivo `n=(m+1)`:
   Suponiendo `P(m)` demostrar `P(m+1)`.

En el caso inductivo, la propiedad `P(n)` se llama la hipótesis de inducción.

7.2.2. Ejemplo de inducción sobre los naturales

Ejemplo de inducción sobre los naturales: Propiedad

- `(replicate n x)` es la lista formda por `n` elementos iguales a `x`. Por ejemplo,

```
replicate 3 5  ⇝  [5,5,5]
```

Prelude

```
replicate :: Int -> a -> [a]
replicate 0     _ = []
replicate (n+1) x = x : replicate n x
```

- Prop.: `length (replicate n xs) = n`

Ejemplo de inducción sobre los naturales: Demostración

- Caso base (`n=0`):
  ```
  length (replicate 0 xs)
  = length []                [por replicate.1]
  = 0                        [por def. length]
  ```

- Caso inductivo (`n=m+1`):
  ```
  length (replicate (m+1) xs)
  = length (x:(replicate m xs))  [por replicate.2]
  = 1 + length (replicate m xs)  [por def. length]
  = 1 + m                        [por hip. ind.]
  = m + 1                        [por conmutativa de +]
  ```

Ejemplo de inducción sobre los naturales: Verificación

Verificación con QuickCheck:

- Especificación de la propiedad:

```
prop_length_replicate :: Int -> Int -> Bool
prop_length_replicate n xs =
    length (replicate m xs) == m
    where m = abs n
```

- Comprobación de la propiedad:

```
*Main> quickCheck prop_length_replicate
OK, passed 100 tests.
```

7.3. Razonamiento por inducción sobre listas

7.3.1. Esquema de inducción sobre listas

Para demostrar que todas las listas finitas tienen una propiedad `P` basta probar:

1. Caso base `xs=[]`:
   `P([])`.
2. Caso inductivo `xs=(y:ys)`:
   Suponiendo `P(ys)` demostrar `P(y:ys)`.

En el caso inductivo, la propiedad `P(ys)` se llama la hipótesis de inducción.

7.3.2. Asociatividad de ++

- Programa:

Prelude
```
(++) :: [a] -> [a] -> [a]
[]     ++ ys = ys              -- ++.1
(x:xs) ++ ys = x : (xs ++ ys) -- ++.2
```

- Propiedad: `xs++(ys++zs)=(xs++ys)++zs`
- Comprobación con QuickCheck:

```
prop_asociativa_conc :: [Int] -> [Int] -> [Int] -> Bool
prop_asociativa_conc xs ys zs =
    xs++(ys++zs)==(xs++ys)++zs
```

```
Main> quickCheck prop_asociatividad_conc
OK, passed 100 tests.
```

- Demostración por inducción en `xs`:
  - Caso base `xs=[]`: Reduciendo el lado izquierdo

    `xs++(ys++zs)`
    = `[]++(ys++zs)` [por hipótesis]
    = `ys++zs` [por `++.1`]

    y reduciendo el lado derecho

    `(xs++ys)++zs`
    `([]++ys)++zs` [por hipótesis]
    `ys++zs` [por `++.1`]

    Luego, `xs++(ys++zs)=(xs++ys)++zs`

- Demostración por inducción en `xs`:
  - Caso inductivo `xs=a:as`: Suponiendo la hipótesis de inducción
    `as++(ys++zs)=(as++ys)++zs` hay que demostrar que
    `(a:as)++(ys++zs)=((a:as)++ys)++zs`

    `(a:as)++(ys++zs)`
    = `a:(as++(ys++zs))` [por `++.2`]
    = `a:((as++ys)++zs)` [por hip. ind.]
    = `(a:(as++ys))++zs` [por `++.2`]
    = `((a:as)++ys)++zs` [por `++.2`]

7.3.3. `[]` es la identidad para `++` por la derecha

- Propiedad: `xs++[]=xs`
- Comprobación con QuickCheck:

```
prop_identidad_concatenacion :: [Int] -> Bool
prop_identidad_concatenacion xs = xs++[] == xs
```

```
Main> quickCheck prop_identidad_concatenacion
OK, passed 100 tests.
```

- Demostración por inducción en `xs`:
  - Caso base `xs=[]`:
    `= []++[]`
    `= []` [por `++.1`]
  - Caso inductivo `xs=(a:as)`: Suponiendo la hipótesis de inducción `as++[]=as` hay que demostrar que `(a:as)++[]=(a:as)`
    `(a:as)++[]`
    `= a:(as++[])` [por `++.2`]
    `= a:as` [por hip. ind.]

7.3.4. Relación entre `length` y `++`

- Programas:

```
length :: [a] -> Int
length []     = 0                 -- length.1
length (x:xs) = 1 + n_length xs   -- length.2

(++) :: [a] -> [a] -> [a]
[]     ++ ys = ys                 -- ++.1
(x:xs) ++ ys = x : (xs ++ ys)     -- ++.2
```

- Propiedad: `length(xs++ys)=(length xs)+(length ys)`
- Comprobación con QuickCheck:

```
prop_length_append :: [Int] -> [Int] -> Bool
prop_length_append xs ys = length(xs++ys)==(length xs)+(length ys)
```

```
Main> quickCheck prop_length_append
OK, passed 100 tests.
```

- Demostración por inducción en `xs`:
  - Caso base `xs=[]`:
    `length([]++ys)`
    = `length ys` [por `++.1`]
    = `0+(length ys)` [por aritmética]
    = `(length [])+(length ys)` [por `length.1`]

- Demostración por inducción en `xs`:
  - Caso inductivo `xs=(a:as)`: Suponiendo la hipótesis de inducción
    `length(as++ys) = (length as)+(length ys)`
    hay que demostrar que
    `length((a:as)++ys) = (length (a:as))+(length ys)`
    `length((a:as)++ys)`
    = `length(a:(as++ys))` [por `++.2`]
    = `1 + length(as++ys)` [por `length.2`]
    = `1 + ((length as) + (length ys))` [por hip. ind.]
    = `(1 + (length as)) + (length ys)` [por aritmética]
    = `(length (a:as)) + (length ys)` [por `length.2`]

7.3.5. Relación entre `take` y `drop`

- Programas:

```
take :: Int -> [a] -> [a]
take 0 _       = []                  -- take.1
take _ []      = []                  -- take.2
take n (x:xs)  = x : take (n-1) xs   -- take.3

drop :: Int -> [a] -> [a]
drop 0 xs      = xs                  -- drop.1
drop _ []      = []                  -- drop,2
drop n (_:xs)  = drop (n-1) xs       -- drop.3

(++) :: [a] -> [a] -> [a]
[]     ++ ys = ys                    -- ++.1
(x:xs) ++ ys = x : (xs ++ ys)        -- ++.2
```

- Propiedad: `take n xs ++ drop n xs = xs`
- Comprobación con QuickCheck:

```
prop_take_drop :: Int -> [Int] -> Property
prop_take_drop n xs =
    n >= 0 ==> take n xs ++ drop n xs == xs
```

```
Main> quickCheck prop_take_drop
OK, passed 100 tests.
```

- Demostración por inducción en `n`:
  - Caso base `n=0`:
    `take 0 xs ++ drop 0 xs`
    `= [] ++ xs` [por `take.1` y `drop.1`]
    `= xs` [por `++.1`]
  - Caso inductivo `n=m+1`: Suponiendo la hipótesis de inducción 1
    $(\forall xs :: [a])$`take m xs ++ drop m xs = xs`
    hay que demostrar que
    $(\forall xs :: [a])$`take (m+1) xs ++ drop (m+1) xs = xs`

Lo demostraremos por inducción en `xs`:

- Caso base `xs=[]`:
  `take (m+1) [] ++ drop (m+1) []`
  `= [] ++ []` [por `take.2` y `drop.2`]
  `= []` [por `++.1`]

- Caso inductivo `xs=(a:as)`: Suponiendo la hip. de inducción 2
  `take (m+1) as ++ drop (m+1) as = as`
  hay que demostrar que
  `take (m+1) (a:as) ++ drop (m+1) (a:as) = (a:as)`
  `take (m+1) (a:as) ++ drop (m+1) (a:as)`
  `= (a:(take m as)) ++ (drop m as)` [`take.3` y `drop.3`]
  `= (a:((take m as) ++ (drop m as))` [por `++.2`]
  `= a:as` [por hip. de ind. 1]

7.3.6. La concatenación de listas vacías es vacía

- Programas:

Prelude
```
null :: [a] -> Bool
null []           = True            -- null.1
null (_:_)        = False           -- null.2

(++) :: [a] -> [a] -> [a]
[]     ++ ys      = ys              -- (++).1
(x:xs) ++ ys      = x : (xs ++ ys)  -- (++).2
```

- Propiedad: `null xs = null (xs ++ xs)`.
- Demostración por inducción en `xs`:
  - Caso 1: `xs = []`: Reduciendo el lado izquierdo

    ```
    null xs
    = null []        [por hipótesis]
    = True           [por null.1]
    ```

    y reduciendo el lado derecho

    ```
    null (xs ++ xs)
    = null ([] ++ [])       [por hipótesis]
    = null []               [por (++).1]
    = True                  [por null.1]
    ```

    Luego, `null xs = null (xs ++ xs)`.

- Demostración por inducción en `xs`:
  - Caso `xs = (y:ys)`: Reduciendo el lado izquierdo

    ```
    null xs
    = null (y:ys)       [por hipótesis]
    = False             [por null.2
    ```

    y reduciendo el lado derecho

    ```
    null (xs ++ xs)
    = null ((y:ys) ++ (y:ys))       [por hipótesis]
    = null (y:(ys ++ (y:ys))        [por (++).2]
    = False                         [por null.2
    ```

    Luego, `null xs = null (xs ++ xs)`.

7.4. Equivalencia de funciones

- Programas:

```
inversa1, inversa2 :: [a] -> [a]
inversa1 []     = []                                    -- inversa1.1
inversa1 (x:xs) = inversa1 xs ++ [x]                    -- inversa1.2

inversa2 xs = inversa2Aux xs []                         -- inversa2.1
    where inversa2Aux []     ys = ys                    -- inversa2Aux.1
          inversa2Aux (x:xs) ys = inversa2Aux xs (x:ys)  -- inversa2Aux.2
```

- Propiedad: `inversa1 xs = inversa2 xs`
- Comprobación con QuickCheck:

```
prop_equiv_inversa :: [Int] -> Bool
prop_equiv_inversa xs = inversa1 xs == inversa2 xs
```

- Demostración: Es consecuencia del siguiente lema:
  `inversa1 xs ++ ys = inversa2Aux xs ys`

  En efecto,

  `inversa1 xs`
  = `inversa1 xs ++ []` [por identidad de ++]
  = `inversa2Aux xs ++ []` [por el lema]
  = `inversa2 xs` [por el `inversa2.1`]

- Demostración del lema: Por inducción en `xs`:
  - Caso base `xs=[]`:
    `inversa1 [] ++ ys`
    = `[] ++ ys` [por `inversa1.1`]
    = `ys` [por `++.1`]
    = `inversa2Aux [] ++ ys` [por `inversa2Aux.1`]
  - Caso inductivo `xs=(a:as)`: La hipótesis de inducción es
    $(\forall ys :: [a])$`inversa1 as ++ ys = inversa2Aux as ys`

    Por tanto,

```
inversa1 (a:as) ++ ys
= (inversa1 as ++ [a]) ++ ys          [por inversa1.2]
= (inversa1 as) ++ ([a] ++ ys)        [por asociativa de ++]
= (inversa1 as) ++ (a:ys)             [por ley unitaria]
= (inversa2Aux as (a:ys)              [por hip. de inducción]
= (inversa2Aux (a:as) ys              [por inversa2Aux.2]
```

Bibliografía

1. H. C. Cunningham (2007) *Notes on Functional Programming with Haskell*.
2. J. Fokker (1996) *Programación funcional*.
3. G. Hutton *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2007.
   - Cap. 13: Reasoning about programs.
4. B.C. Ruiz, F. Gutiérrez, P. Guerrero y J.E. Gallardo. *Razonando con Haskell*. Thompson, 2004.
   - Cap. 6: Programación con listas.
5. S. Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*, Second Edition. Addison-Wesley, 1999.
   - Cap. 8: Reasoning about programs.
6. E.P. Wentworth (1994) *Introduction to Funcional Programming*.

Tema 8

Funciones de orden superior

Contenido

8.1. Funciones de orden superior

Funciones de orden superior

- Una función es **de orden superior** si toma una función como argumento o devuelve una función como resultado.
- `(dosVeces f x)` es el resultado de aplicar `f` a `f x`. Por ejemplo,

```
dosVeces (*3) 2           ⇝  18
dosVeces reverse [2,5,7]  ⇝  [2,5,7]
```

```
dosVeces :: (a -> a) -> a -> a
dosVeces f x = f (f x)
```

- Prop: `dosVeces reverse = id`
  donde `id` es la función identidad.

Prelude
```
id :: a -> a
id x =  x
```

Usos de las funciones de orden superior

- Definición de patrones de programación.
  - Aplicación de una función a todos los elementos de una lista.
  - Filtrado de listas por propiedades.
  - Patrones de recursión sobre listas.
- Diseño de lenguajes de dominio específico:
  - Lenguajes para procesamiento de mensajes.
  - Analizadores sintácticos.
  - Procedimientos de entrad/salida.
- Uso de las propiedades algebraicas de las funciones de orden superior para razonar sobre programas.

8.2. Procesamiento de listas

8.2.1. La función `map`

La función `map`: Definición

- `(map f xs)` es la lista obtenida aplicando `f` a cada elemento de `xs`. Por ejemplo,

```
map (*2) [3,4,7]     ⇝ [6,8,14]
map sqrt [1,2,4]     ⇝ [1.0,1.4142135623731,2.0]
map even [1..5]      ⇝ [False,True,False,True,False]
```

- Definición de `map` por comprensión:

```
map :: (a -> b) -> [a] -> [b]
map f xs =  [f x | x <- xs]
```

- Definición de `map` por recursión:

Prelude
```
map :: (a -> b) -> [a] -> [b]
map _ []     = []
map f (x:xs) = f x : map f xs
```

Relación entre `sum` y `map`

- La función `sum`:

Prelude
```
sum :: [Int] -> Int
sum []     = 0
sum (x:xs) = x + sum xs
```

- Propiedad: `sum (map (2*) xs) = 2 * sum xs`
- Comprobación con QuickCheck:

```
prop_sum_map :: [Int] -> Bool
prop_sum_map xs = sum (map (2*) xs) == 2 * sum xs
```

```
*Main> quickCheck prop_sum_map
+++ OK, passed 100 tests.
```

Demostración de la propiedad por inducción en `xs`

- Caso `[]`:

`sum (map (2*) xs)`	
= `sum (map (2*) [])`	[por hipótesis]
= `sum []`	[por `map.1`]
= `0`	[por `sum.1`]
= `2 * 0`	[por aritmética]
= `2 * sum []`	[por `sum.1`]
= `2 * sum xs`	[por hipótesis]

- Caso `xs=(y:ys)`: Entonces,

```
sum (map (2*) xs)
= sum (map (2*) (y:ys))          [por hipótesis]
= sum (2*) y : (map (2*) ys)     [por map.2]
= (2*) y + (sum (map (2*) ys))   [por sum.2]
= (2*) y + (2 * sum ys)          [por hip. de inducción]
= (2 * y) + (2 * sum ys)         [por (2*)]
= 2 * (y + sum ys)               [por aritmética]
= 2 * sum (y:ys)                 [por sum.2]
= 2 * sum xs                     [por hipótesis]
```

Comprobación de propiedades con argumentos funcionales

- La aplicación de una función a los elemntos de una lista conserva su longitud:

```
prop_map_length (Function _ f) xs =
    length (map f xs) == length xs
```

- En el inicio del fichero hay que escribir

```
import Test.QuickCheck.Function
```

- Comprobación

```
*Main> quickCheck prop_map_length
+++ OK, passed 100 tests.
```

8.2.2. La función `filter`

La función `filter`

- `filter p xs` es la lista de los elementos de `xs` que cumplen la propiedad `p`. Por ejemplo,

```
filter even [1,3,5,4,2,6,1] ⇝ [4,2,6]
filter (>3) [1,3,5,4,2,6,1] ⇝ [5,4,6]
```

- Definición de `filter` por comprensión:

```
filter :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
filter p xs =  [x | x <- xs, p x]
```

- Definición de `filter` por recursión:

Prelude
```
filter :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
filter _ []                 = []
filter p (x:xs) | p x       = x : filter p xs
                | otherwise = filter p xs
```

Uso conjunto de `map` y `filter`

- `sumaCuadradosPares xs` es la suma de los cuadrados de los números pares de la lista `xs`. Por ejemplo,

```
sumaCuadradosPares [1..5]  ⇝  20
```

```
sumaCuadradosPares :: [Int] -> Int
sumaCuadradosPares xs = sum (map (^2) (filter even xs))
```

- Definición por comprensión:

```
sumaCuadradosPares' :: [Int] -> Int
sumaCuadradosPares' xs = sum [x^2 | x <- xs, even x]
```

Predefinidas de orden superior para procesar listas

- `all p xs` se verifica si todos los elementos de `xs` cumplen la propiedad `p`. Por ejemplo,

```
all odd [1,3,5]  ⇝  True
all odd [1,3,6]  ⇝  False
```

- `any p xs` se verifica si algún elemento de `xs` cumple la propiedad `p`. Por ejemplo,

```
any odd [1,3,5]  ⇝  True
any odd [2,4,6]  ⇝  False
```

- `takeWhile p xs` es la lista de los elementos iniciales de `xs` que verifican el predicado `p`. Por ejemplo,

```
takeWhile even [2,4,6,7,8,9] ⇝ [2,4,6]
```

- `dropWhile p xs` es la lista `xs` sin los elementos iniciales que verifican el predicado `p`. Por ejemplo,

```
dropWhile even [2,4,6,7,8,9] ⇝ [7,8,9]
```

8.3. Función de plegado por la derecha: `foldr`

Esquema básico de recursión sobre listas

- Ejemplos de definiciones recursivas:

Prelude
```
sum []         = 0
sum (x:xs)     = x + sum xs
product []     = 1
product (x:xs) = x * product xs
or []          = False
or (x:xs)      = x || or xs
and []         = True
and (x:xs)     = x && and xs
```

- Esquema básico de recursión sobre listas:

```
f []     = v
f (x:xs) = x `op` (f xs)
```

El patrón `foldr`

- Redefiniciones con el patrón `foldr`

```
sum     = foldr (+) 0
product = foldr (*) 1
or      = foldr (||) False
and     = foldr (&&) True
```

- Definición del patrón `foldr`

Prelude
```
foldr :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b
foldr f v []     =  v
foldr f v (x:xs) =  f x (foldr f v xs)
```

Visión no recursiva de `foldr`

- Cálculo con `sum`:

```
sum [2,3,5]
= foldr (+) 0 [2,3,5]          [def. de sum]
= foldr (+) 0 2:(3:(5:[]))     [notación de lista]
=             2+(3+(5+0))      [sustituir (:) por (+) y [] por 0]
= 10                           [aritmética]
```

- Cálculo con `sum`:

```
product [2,3,5]
= foldr (*) 1 [2,3,5]          [def. de sum]
= foldr (*) 1 2:(3:(5:[]))     [notación de lista]
=             2*(3*(5*1))      [sustituir (:) por (*) y [] por 1]
= 30                           [aritmética]
```

- Cálculo de `foldr f v xs`
  Sustituir en `xs` los `(:)` por `f` y `[]` por `v`.

Definición de la longitud mediante `foldr`

- Ejemplo de cálculo de la longitud:

```
  longitud [2,3,5]
= longitud 2:(3:(5:[]))
=          1+(1+(1+0))      [Sustituciones]
= 3
```

- Sustituciones:
  - los `(:)` por `(\ _ n -> 1+n)`
  - la `[]` por `0`
- Definición de `length` usando `foldr`

```
longitud :: [a] -> Int
longitud = foldr (\ _ n -> 1+n) 0
```

Definición de la inversa mediante `foldr`

- Ejemplo de cálculo de la inversa:

```
  inversa [2,3,5]
= inversa 2:(3:(5:[]))
=         (([] ++ [5]) ++ [3]) ++ [2]  [Sustituciones]
= [5,3,2]
```

- Sustituciones:
  - los `(:)` por `(\ x xs -> xs ++ [x])`
  - la `[]` por `[]`
- Definición de `inversa` usando `foldr`

```
inversa :: [a] -> [a]
inversa = foldr (\ x xs -> xs ++ [x]) []

conc xs ys = (foldr (:) ys) xs
```

Definición de la concatenación mediante `foldr`

- Ejemplo de cálculo de la concatenación:

```
  conc [2,3,5] [7,9]
= conc 2:(3:(5:[])) [7,9]
=      2:(3:(5:[7,9]))       [Sustituciones]
= [2,3,5,7,9]
```

- Sustituciones:
  - los `(:)` por `(:)`
  - la `[]` por `ys`
- Definición de `conc` usando `foldr`

```
conc xs ys = (foldr (:) ys) xs
```

8.4. Función de plegado por la izquierda: `foldl`

Definición de suma de lista con acumuladores

- Definición de `suma` con acumuladores:

```
suma :: [Integer] -> Integer
suma = sumaAux 0
    where sumaAux v []     = v
          sumaAux v (x:xs) = sumaAux (v+x) xs
```

- Cálculo con `suma`:

```
suma [2,3,7] = sumaAux 0 [2,3,7]
             = sumaAux (0+2) [3,7]
             = sumaAux 2 [3,7]
             = sumaAux (2+3) [7]
             = sumaAux 5 [7]
             = sumaAux (5+7) []
             = sumaAux 12 []
             = 12
```

Patrón de definición de recursión con acumulador

- Patrón de definición (generalización de `sumaAux`):

```
f v []     = v
f v (x:xs) = f (v*x) xs
```

- Definición con el patrón `foldl`:

```
suma    = foldl (+) 0
product = foldl (*) 1
or      = foldl (||) False
and     = foldl (&&) True
```

Definición de `foldl`

- Definición de `foldl`:

Prelude

```
foldl :: (a -> b -> a) -> a -> [b ] -> a
foldl f v []     =  v
foldl f v (x:xs) =  foldl f (f v x ) xs
```

8.5. Composición de funciones

Composición de funciones

- Definición de la composición de dos funciones:

Prelude

```
(.) :: (b -> c) -> (a -> b) -> a -> c
f . g  = \x -> f (g x)
```

- Uso de composición para simplificar definiciones:
  - Definiciones sin composición:

```
par n                 = not (impar n)
doVeces f x           = f (f x )
sumaCuadradosPares ns = sum (map (^2) (filter even ns))
```

  - Definiciones con composición:

```
par                = not . impar
dosVeces f         = f . f
sumaCuadradosPares = sum . map (^2) . filter even
```

Composición de una lista de funciones

- La función identidad:

Prelude

```
id :: a -> a
id =  \x -> x
```

- `(composicionLista fs)` es la composición de la lista de funciones `fs`. Por ejemplo,

```
composicionLista [(*2),(^2)] 3       ⇝  18
composicionLista [(^2),(*2)] 3       ⇝  36
composicionLista [(/9),(^2),(*2)] 3  ⇝  4.0
```

```
composicionLista :: [a -> a] -> (a -> a)
composicionLista =  foldr (.) id
```

8.6. Caso de estudio: Codificación binaria y transmisión de cadenas

- Objetivos:
  1. Definir una función que convierta una cadena en una lista de ceros y unos junto con otra función que realize la conversión opuesta.
  2. Simular la transmisión de cadenas mediante ceros y unos.
- Los números binarios se representan mediante listas de bits en orden inverso. Un bit es cero o uno. Por ejemplo, el número 1101 se representa por [1,0,1,1].

- El tipo `Bit` es el de los bits.

```
type Bit = Int
```

8.6.1. Cambio de bases

Cambio de bases: De binario a decimal

- `(bin2int x)` es el número decimal correspondiente al número binario `x`. Por ejemplo,

```
bin2int [1,0,1,1]  ⇝  13
```

```
bin2int :: [Bit] -> Int
bin2int =  foldr (\x y -> x + 2*y) 0
```

Por ejemplo,

```
  bin2int [1,0,1,1]
= bin2int 1:(0:(1:(1:[])))
=         1+2*(0+2*(1+2*(1+2*0)))
= 13
```

Cambio de base: De decimal a binario

- `(int2bin x)` es el número binario correspondiente al número decimal `x`. Por ejemplo,

```
int2bin 13  ⇝  [1,0,1,1]
```

```
int2bin :: Int -> [Bit]
int2bin 0 =  []
int2bin n =  n `mod` 2 : int2bin (n `div` 2)
```

Por ejemplo,

```
  int2bin 13
= 13 `mod` 2 : int2bin (13 `div` 2)
= 1 : int2bin (6 `div` 2)
= 1 : (6 `mod` 2 : int2bin (6 `div` 2))
= 1 : (0 : int2bin 3)
```

```
= 1 : (0 : (3 `mod` 2 : int2bin (3 `div` 2)))
= 1 : (0 : (1 : int2bin 1))
= 1 : (0 : (1 : (1 : int2bin 0)))
= 1 : (0 : (1 : (1 : [])))
= [1,0,1,1]
```

Cambio de base: Comprobación de propiedades

- Propiedad: Al pasar un número natural a binario con `int2bin` y el resultado a decimal con `bin2int` se obtiene el número inicial.

```
prop_int_bin :: Int -> Bool
prop_int_bin x =
    bin2int (int2bin y) == y
    where y = abs x
```

- Comprobación:

```
*Main> quickCheck prop_int_bin
+++ OK, passed 100 tests.
```

8.6.2. Codificación y descodificación

Creación de octetos

- Un octeto es un grupo de ocho bits.
- `(creaOcteto bs)` es el octeto correspondiente a la lista de bits `bs`; es decir, los 8 primeros elementos de `bs` si su longitud es mayor o igual que 8 y la lista de 8 elemento añadiendo ceros al final de `bs` en caso contrario. Por ejemplo,

```
Main*> creaOcteto [1,0,1,1,0,0,1,1,1,0,0,0]
[1,0,1,1,0,0,1,1]
Main*> creaOcteto [1,0,1,1]
[1,0,1,1,0,0,0,0]
```

```
creaOcteto :: [Bit] -> [Bit]
creaOcteto bs =  take 8 (bs ++ repeat 0)
```

donde `(repeat x)` es una lista infinita cuyo único elemento es `x`.

Codificación

- `(codifica c)` es la codificación de la cadena `c` como una lista de bits obtenida convirtiendo cada carácter en un número Unicode, convirtiendo cada uno de dichos números en un octeto y concatenando los octetos para obtener una lista de bits. Por ejemplo,

```
*Main> codifica "abc"
[1,0,0,0,0,1,1,0,0,1,0,0,0,1,1,0,1,1,0,0,0,1,1,0]
```

```
codifica :: String -> [Bit]
codifica =  concat . map (creaOcteto . int2bin . ord)
```

  donde `(concat xss)` es la lista obtenida concatenando la lista de listas `xss`.

Codificación

- Ejemplo de codificación,

```
  codifica "abc"
= concat . map (creaOcteto . int2bin . ord) "abc"
= concat . map (creaOcteto . int2bin . ord) ['a','b','c']
= concat [creaOcteto . int2bin . ord 'a',
          creaOcteto . int2bin . ord 'b',
          creaOcteto . int2bin . ord 'c']
= concat [creaOcteto [1,0,0,0,0,1,1],
          creaOcteto [0,1,0,0,0,1,1],
          creaOcteto [1,1,0,0,0,1,1]]
= concat [[1,0,0,0,0,1,1,0],
          [0,1,0,0,0,1,1,0],
          [1,1,0,0,0,1,1,0]]
= [1,0,0,0,0,1,1,0,0,1,0,0,0,1,1,0,1,1,0,0,0,1,1,0]
```

Separación de octetos

- `(separaOctetos bs)` es la lista obtenida separando la lista de bits `bs` en listas de 8 elementos. Por ejemplo,

```
*Main> separaOctetos [1,0,0,0,0,1,1,0,0,1,0,0,0,1,1,0]
[[1,0,0,0,0,1,1,0],[0,1,0,0,0,1,1,0]]
```

```
separaOctetos :: [Bit] -> [[Bit]]
separaOctetos [] = []
separaOctetos bs =
    take 8 bs : separaOctetos (drop 8 bs)
```

Descodificación

- `(descodifica bs)` es la cadena correspondiente a la lista de bits `bs`. Por ejemplo,

```
*Main> descodifica [1,0,0,0,0,1,1,0,0,1,0,0,0,1,1,0,1,1,0,0,0,1,1,0]
"abc"
```

```
descodifica :: [Bit] -> String
descodifica =  map (chr . bin2int) . separaOctetos
```

Por ejemplo,

```
  descodifica [1,0,0,0,0,1,1,0,0,1,0,0,0,1,1,0,1,1,0,0,0,1,1,0]
= (map (chr . bin2int) . separaOctetos)
  [1,0,0,0,0,1,1,0,0,1,0,0,0,1,1,0,1,1,0,0,0,1,1,0]
= map (chr . bin2int) [[1,0,0,0,0,1,1,0],[0,1,0,0,0,1,1,0],[1,1,0,0,0,1,1,0]]
= [(chr . bin2int) [1,0,0,0,0,1,1,0],
   (chr . bin2int) [0,1,0,0,0,1,1,0],
   (chr . bin2int) [1,1,0,0,0,1,1,0]]
= [chr 97, chr 98, chr 99]
= "abc"
```

Transmisión

- Los canales de transmisión pueden representarse mediante funciones que transforman cadenas de bits en cadenas de bits.
- `(transmite c t)` es la cadena obtenida transmitiendo la cadena `t` a través del canal `c`. Por ejemplo,

```
*Main> transmite id "Texto por canal correcto"
"Texto por canal correcto"
```

```
transmite :: ([Bit] -> [Bit]) -> String -> String
transmite canal =  descodifica . canal . codifica
```

Corrección de la transmisión

- Propiedad: Al trasmitir cualquier cadena por el canal identidad se obtiene la cadena.

```
prop_transmite :: String -> Bool
prop_transmite cs =
    transmite id cs == cs
```

- Comprobación de la corrección:

```
*Main> quickCheck prop_transmite
+++ OK, passed 100 tests.
```

Bibliografía

1. R. Bird. *Introducción a la programación funcional con Haskell*. Prentice Hall, 2000.
   - Cap. 4: Listas.
2. G. Hutton *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2007.
   - Cap. 7: Higher-order functions.
3. B.C. Ruiz, F. Gutiérrez, P. Guerrero y J.E. Gallardo. *Razonando con Haskell*. Thompson, 2004.
   - Cap. 8: Funciones de orden superior y polimorfismo.
4. S. Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*, Second Edition. Addison-Wesley, 1999.
   - Cap. 9: Generalization: patterns of computation.
   - Cap. 10: Functions as values.

Tema 9

Declaraciones de tipos y clases

Contenido

9.1. Declaraciones de tipos

Declaraciones de tipos como sinónimos

- Se puede definir un nuevo nombre para un tipo existente mediante una **declaración de tipo**.
- Ejemplo: Las cadenas son listas de caracteres.

Prelude

```
type String = [Char]
```

- El nombre del tipo tiene que empezar por mayúscula.

Declaraciones de tipos nuevos

- Las declaraciones de tipos pueden usarse para facilitar la lectura de tipos. Por ejemplo,

- Las posiciones son pares de enteros.

```
type Pos = (Int,Int)
```

- `origen` es la posición (0,0).

```
origen :: Pos
origen = (0,0)
```

- `(izquierda p)` es la posición a la izquierda de la posición `p`. Por ejemplo,

```
izquierda (3,5)  ⇝  (2,5)
```

```
izquierda :: Pos -> Pos
izquierda (x,y) = (x-1,y)
```

Declaraciones de tipos parametrizadas

- Las declaraciones de tipos pueden tener parámetros. Por ejemplo,
  - `Par a` es el tipo de pares de elementos de tipo `a`

```
type Par a = (a,a)
```

  - `(multiplica p)` es el producto del par de enteros `p`. Por ejemplo,

```
multiplica (2,5)  ⇝  10
```

```
multiplica :: Par Int -> Int
multiplica (x,y) = x*y
```

  - `(copia x)` es el par formado con dos copias de `x`. Por ejemplo,

```
copia 5  ⇝  (5,5)
```

```
copia :: a -> Par a
copia x = (x,x)
```

Declaraciones anidadas de tipos

- Las declaraciones de tipos pueden anidarse. Por ejemplo,
  - Las posiciones son pares de enteros.

```
type Pos = (Int,Int)
```

  - Los movimientos son funciones que va de una posición a otra.

```
type Movimiento = Pos -> Pos
```

- Las declaraciones de tipo no pueden ser recursivas. Por ejemplo, el siguiente código es erróneo.

```
type Arbol = (Int,[Arbol])
```

Al intentar cargarlo da el mensaje de error

```
Cycle in type synonym declarations
```

9.2. Definiciones de tipos de datos

Definición de tipos con `data`

- En Haskell pueden definirse nuevos tipos mediante `data`.
- El tipo de los booleanos está formado por dos valores para representar lo falso y lo verdadero.

Prelude

```
data Bool = False | True
```

- El símbolo `|` se lee como "o".
- Los valores `False` y `True` se llaman los **constructores** del tipo `Bool`.
- Los nombres de los constructores tienen que empezar por mayúscula.

Uso de los valores de los tipos definidos

- Los valores de los tipos definidos pueden usarse como los de los predefinidos.
- Definición del tipo de movimientos:

```
data Mov = Izquierda | Derecha | Arriba | Abajo
```

- Uso como argumento: `(movimiento m p)` es la posición obtenida aplicando el movimiento `m` a la posición `p`. Por ejemplo,

```
movimiento Arriba (2,5)  ⇝ (2,6)
```

```
movimiento :: Mov -> Pos -> Pos
movimiento Izquierda (x,y) = (x-1,y)
movimiento Derecha   (x,y) = (x+1,y)
movimiento Arriba    (x,y) = (x,y+1)
movimiento Abajo     (x,y) = (x,y-1)
```

- Uso en listas: `(movimientos ms p)` es la posición obtenida aplicando la lista de movimientos `ms` a la posición `p`. Por ejemplo,

```
movimientos [Arriba, Izquierda] (2,5)  ⇝  (1,6)
```

```
movimientos :: [Mov] -> Pos -> Pos
movimientos []     p = p
movimientos (m:ms) p = movimientos ms (movimiento m p)
```

- Uso como valor: `(opuesto m)` es el movimiento opuesto de `m`.

```
movimiento (opuesto Arriba) (2,5)  ⇝ (2,4)
```

```
opuesto :: Mov -> Mov
opuesto Izquierda = Derecha
opuesto Derecha   = Izquierda
opuesto Arriba    = Abajo
opuesto Abajo     = Arriba
```

Definición de tipo con constructores con parámetros

- Los constructores en las definiciones de tipos pueden tener parámetros.
- Ejemplo de definición

```
data Figura = Circulo Float | Rect Float Float
```

- Tipos de los constructores:

```
*Main> :type Circulo
Circulo :: Float -> Figura
*Main> :type Rect
Rect :: Float -> Float -> Figura
```

- Uso del tipo como valor: `(cuadrado n)` es el cuadrado de lado `n`.

```
cuadrado :: Float -> Figura
cuadrado n = Rect n n
```

- Uso del tipo como argumento: `(area f)` es el área de la figura `f`. Por ejemplo,

```
area (Circulo 1)   ⇝  3.1415927
area (Circulo 2)   ⇝  12.566371
area (Rect 2 5)    ⇝  10.0
area (cuadrado 3)  ⇝  9.0
```

```
area :: Figura -> Float
area (Circulo r) = pi*r^2
area (Rect x y)  = x*y
```

Definición de tipos con parámetros

- Los tipos definidos pueden tener parámetros.
- Ejemplo de tipo con parámetro

Prelude

```
data Maybe a = Nothing | Just a
```

- `(divisionSegura m n)` es la división de `m` entre `n` si `n` no es cero y nada en caso contrario. Por ejemplo,

```
divisionSegura 6 3  ⇝  Just 2
divisionSegura 6 0  ⇝  Nothing
```

```
divisionSegura :: Int -> Int -> Maybe Int
divisionSegura _ 0 = Nothing
divisionSegura m n = Just (m `div` n)
```

- `(headSegura xs)` es la cabeza de `xs` si `xs` es no vacía y nada en caso contrario. Por ejemplo,

```
headSegura [2,3,5]  ⇝  Just 2
headSegura []       ⇝  Nothing
```

```
headSegura :: [a] -> Maybe a
headSegura [] = Nothing
headSegura xs = Just (head xs)
```

9.3. Definición de tipos recursivos

Definición de tipos recursivos: Los naturales

- Los tipos definidos con `data` pueden ser recursivos.
- Los naturales se construyen con el cero y la función sucesor.

```
data Nat = Cero | Suc Nat
           deriving Show
```

- Tipos de los constructores:

```
*Main> :type Cero
Cero :: Nat
*Main> :type Suc
Suc :: Nat -> Nat
```

- Ejemplos de naturales:

```
Cero
Suc Cero
Suc (Suc Cero)
Suc (Suc (Suc Cero))
```

Definiciones con tipos recursivos

- `(nat2int n)` es el número entero correspondiente al número natural `n`. Por ejemplo,

```
nat2int (Suc (Suc (Suc Cero)))  ⇝  3
```

```
nat2int :: Nat -> Int
nat2int Cero    = 0
nat2int (Suc n) = 1 + nat2int n
```

- `(int2nat n)` es el número natural correspondiente al número entero `n`. Por ejemplo,

```
int2nat 3  ⇝  Suc (Suc (Suc Cero))
```

```
int2nat :: Int -> Nat
int2nat 0     = Cero
int2nat (n+1) = Suc (int2nat n)
```

- `(suma m n)` es la suma de los número naturales `m` y `n`. Por ejemplo,

```
*Main> suma (Suc (Suc Cero)) (Suc Cero)
Suc (Suc (Suc Cero))
```

```
suma :: Nat -> Nat -> Nat
suma Cero    n = n
suma (Suc m) n = Suc (suma m n)
```

- Ejemplo de cálculo:

```
  suma (Suc (Suc Cero)) (Suc Cero)
= Suc (suma (Suc Cero) (Suc Cero))
= Suc (Suc (suma Cero (Suc Cero)))
= Suc (Suc (Suc Cero))
```

Tipo recursivo con parámetro: Las listas

- Definicón del tipo lista:

```
data Lista a = Nil | Cons a (Lista a)
```

- `(longitud xs)` es la longitud de la lista `xs`. Por ejemplo,

```
longitud (Cons 2 (Cons 3 (Cons 5 Nil)))  ⇝  3
```

```
longitud :: Lista a -> Int
longitud Nil         = 0
longitud (Cons _ xs) = 1 + longitud xs
```

Definición de tipos recursivos: Los árboles binarios

- Ejemplo de árbol binario:

```
     5
    / \
   /   \
  3     7
 / \   / \
1   4 6   9
```

- Definición del tipo de árboles binarios:

```
data Arbol = Hoja Int | Nodo Arbol Int Arbol
```

- Representación del ejemplo

```
ejArbol = Nodo (Nodo (Hoja 1) 3 (Hoja 4))
               5
               (Nodo (Hoja 6) 7 (Hoja 9))
```

Definiciones sobre árboles binarios

- `(ocurre m a)` se verifica si `m` ocurre en el árbol `a`. Por ejemplo,

```
ocurre 4  ejArbol  ⇝  True
ocurre 10 ejArbol  ⇝  False
```

```
ocurre :: Int -> Arbol -> Bool
ocurre m (Hoja n)     = m == n
ocurre m (Nodo i n d) = m == n || ocurre m i || ocurre m d
```

- `(aplana a)` es la lista obtenida aplanando el árbol `a`. Por ejemplo,

```
aplana ejArbol  ⇝  [1,3,4,5,6,7,9]
```

```
aplana :: Arbol -> [Int]
aplana (Hoja n)     = [n]
aplana (Nodo i n d) = aplana i ++ [n] ++ aplana d
```

Definiciones sobre árboles binarios

- Un árbol es ordenado si el valor de cada nodo es mayos que los de su subárbol izquierdo y mayor que los de su subárbol derecho.
- El árbol del ejemplo es ordenado.
- `(ocurreEnArbolOrdenado m a)` se verifica si `m` ocurre en el árbol ordenado `a`. Por ejemplo,

```
ocurreEnArbolOrdenado 4  ejArbol  ⇝  True
ocurreEnArbolOrdenado 10 ejArbol  ⇝  False
```

```
ocurreEnArbolOrdenado :: Int -> Arbol -> Bool
ocurreEnArbolOrdenado m (Hoja n)  =  m == n
ocurreEnArbolOrdenado m (Nodo i n d)
    | m == n      =  True
    | m < n       =  ocurreEnArbolOrdenado m i
    | otherwise   =  ocurreEnArbolOrdenado m d
```

Definiciones de distintos tipos de árboles

- Árboles binarios con valores en las hojas:

```
data Arbol a = Hoja a | Nodo (Arbol a) (Arbol a)
```

- Árboles binarios con valores en los nodos:

```
data Arbol a = Hoja | Nodo (Arbol a) a (Arbol a)
```

- Árboles binarios con valores en las hojas y en los nodos:

```
data Arbol a b = Hoja a | Nodo (Arbol a b) b (Arbol a b)
```

- Árboles con un número variable de sucesores:

```
data Arbol a = Nodo a [Arbol a]
```

9.4. Sistema de decisión de tautologías

Sintaxis de la lógica proposicional

- Definición de fórmula proposicional:
  - Las variables proposicionales son fórmulas.
  - Si F es una fórmula, entonces $\neg F$ también lo es.
  - Si F y G son fórmulas, entonces $F \wedge G$ y $F \to G$ también lo son.
- Tipo de dato de fórmulas proposicionales:

```
data FProp = Const Bool
           | Var Char
           | Neg FProp
           | Conj FProp FProp
           | Impl FProp FProp
           deriving Show
```

- Ejemplos de fórmulas proposicionales:
  1. $A \wedge \neg A$
  2. $(A \wedge B) \to A$
  3. $A \to (A \wedge B)$
  4. $(A \to (A \to B)) \to B$

```
p1, p2, p3, p4 :: FProp
p1 = Conj (Var 'A') (Neg (Var 'A'))
p2 = Impl (Conj (Var 'A') (Var 'B')) (Var 'A')
p3 = Impl (Var 'A') (Conj (Var 'A') (Var 'B'))
p4 = Impl (Conj (Var 'A') (Impl (Var 'A') (Var 'B'))) (Var 'B')
```

Semántica de la lógica proposicional

- Tablas de verdad de las conectivas:

i	$\neg i$
T	F
F	T

i	j	$i \wedge j$	$i \to j$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	T
F	F	F	T

- Tabla de verdad para $(A \to B) \vee (B \to A)$:

A	B	$(A \to B)$	$(B \to A)$	$(A \to B) \vee (B \to A)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

- Las interpretaciones son listas formadas por el nombre de una variable proposicional y un valor de verdad.

```
type Interpretacion = [(Char, Bool)]
```

- `(valor i p)` es el valor de la fórmula `p` en la interpretación `i`. Por ejemplo,

```
valor [('A',False),('B',True)] p3  ⇝  True
valor [('A',True),('B',False)] p3  ⇝  False
```

```
valor :: Interpretacion -> FProp -> Bool
valor _ (Const b)  = b
valor i (Var x)    = busca x i
valor i (Neg p)    = not (valor i p)
valor i (Conj p q) = valor i p && valor i q
valor i (Impl p q) = valor i p <= valor i q
```

- `(busca c t)` es el valor del primer elemento de la lista de asociación `t` cuya clave es `c`. Por ejemplo,

```
busca 2 [(1,'a'),(3,'d'),(2,'c')]  ⇝  'c'
```

```
busca :: Eq c => c -> [(c,v)] -> v
busca c t = head [v | (c',v) <- t, c == c']
```

- `(variables p)` es la lista de los nombres de las variables de `p`.

```
variables p3  ⇝  "AAB"
```

```
variables :: FProp -> [Char]
variables (Const _)  = []
variables (Var x)    = [x]
variables (Neg p)    = variables p
variables (Conj p q) = variables p ++ variables q
variables (Impl p q) = variables p ++ variables q
```

- `(interpretacionesVar n)` es la lista de las interpretaciones con `n` variables. Por ejemplo,

```
*Main> interpretacionesVar 2
[[False,False],
 [False,True],
 [True,False],
 [True,True]]
```

```
interpretacionesVar :: Int -> [[Bool]]
interpretacionesVar 0     = [[]]
interpretacionesVar (n+1) =
    map (False:) bss ++ map (True:) bss
    where bss = interpretacionesVar n
```

- `(interpretaciones p)` es la lista de las interpretaciones de la fórmula `p`. Por ejemplo,

```
*Main> interpretaciones p3
[[('A',False),('B',False)],
 [('A',False),('B',True)],
 [('A',True),('B',False)],
 [('A',True),('B',True)]]
```

```
interpretaciones :: FProp -> [Interpretacion]
interpretaciones p =
    map (zip vs) (interpretacionesVar (length vs))
    where vs = nub (variables p)
```

Decisión de tautología

- `(esTautologia p)` se verifica si la fórmula `p` es una tautología. Por ejemplo,

```
esTautologia p1  ⇝  False
esTautologia p2  ⇝  True
esTautologia p3  ⇝  False
esTautologia p4  ⇝  True
```

```
esTautologia :: FProp -> Bool
esTautologia p =
    and [valor i p | i <- interpretaciones p]
```

9.5. Máquina abstracta de cálculo aritmético

Evaluación de expresiones aritméticas

- Una expresión aritmética es un número entero o la suma de dos expresiones.

```
data Expr =  Num Int | Suma Expr Expr
```

- `(valorEA x)` es el valor de la expresión aritmética `x`.

```
valorEA (Suma (Suma (Num 2) (Num 3)) (Num 4))  ⇝  9
```

```
valorEA :: Expr -> Int
valorEA (Num n)    = n
valorEA (Suma x y) = valorEA x + valorEA y
```

- Cálculo:

```
  valorEA (Suma (Suma (Num 2) (Num 3)) (Num 4))
= (valorEA (Suma (Num 2) (Num 3))) + (valorEA (Num 4))
= (valorEA (Suma (Num 2) (Num 3))) + 4
= (valorEA (Num 2) + (valorEA (Num 3))) + 4
= (2 + 3) + 4
= 9
```

Máquina de cálculo aritmético

- La pila de control de la máquina abstracta es una lista de operaciones.

```
type PControl = [Op]
```

- Las operaciones son meter una expresión en la pila o sumar un número con el primero de la pila.

```
data Op =  METE Expr | SUMA Int
```

- `(eval x p)` evalúa la expresión `x` con la pila de control `p`. Por ejemplo,

```
eval (Suma (Suma (Num 2) (Num 3)) (Num 4)) []  ⇝  9
eval (Suma (Num 2) (Num 3)) [METE (Num 4)]     ⇝  9
eval (Num 3) [SUMA 2, METE (Num 4)]            ⇝  9
eval (Num 4) [SUMA 5]                          ⇝  9
```

```
eval :: Expr -> PControl -> Int
eval (Num n)    p = ejec p n
eval (Suma x y) p = eval x (METE y : p)
```

- `(ejec p n)` ejecuta la lista de control `p` sobre el entero `n`. Por ejemplo,

```
ejec [METE (Num 3), METE (Num 4)] 2  ⇝  9
ejec [SUMA 2, METE (Num 4)]       3  ⇝  9
ejec [METE (Num 4)]               5  ⇝  9
ejec [SUMA 5]                     4  ⇝  9
ejec []                           9  ⇝  9
```

```
ejec :: PControl -> Int -> Int
ejec []           n = n
ejec (METE y : p) n = eval y (SUMA n : p)
ejec (SUMA n : p) m = ejec p (n+m)
```

- `(evalua e)` evalúa la expresión aritmética `e` con la máquina abstracta. Por ejemplo,

```
evalua (Suma (Suma (Num 2) (Num 3)) (Num 4))  ⇝  9
```

```
evalua :: Expr -> Int
evalua e = eval e []
```

- Evaluación:

```
  eval (Suma (Suma (Num 2) (Num 3)) (Num 4)) []
= eval (Suma (Num 2) (Num 3)) [METE (Num 4)]
= eval (Num 2) [METE (Num 3), METE (Num 4)]
= ejec [METE (Num 3), METE (Num 4)] 2
= eval (Num 3) [SUMA 2, METE (Num 4)]
= ejec [SUMA 2, METE (Num 4)] 3
= ejec [METE (Num 4)] (2+3)
= ejec [METE (Num 4)] 5
= eval (Num 4) [SUMA 5]
= ejec [SUMA 5] 4
= ejec [] (5+4)
= ejec [] 9
= 9
```

9.6. Declaraciones de clases y de instancias

Declaraciones de clases

- Las clases se declaran mediante el mecanismo `class`.
- Ejemplo de declaración de clases:

Prelude
```
class Eq a where
    (==), (/=) :: a -> a -> Bool

    -- Minimal complete definition: (==) or (/=)
    x == y = not (x/=y)
    x /= y = not (x==y)
```

Declaraciones de instancias

- Las instancias se declaran mediante el mecanismo `instance`.
- Ejemplo de declaración de instancia:

Prelude
```
instance Eq Bool where
    False == False = True
    True  == True  = True
    _     == _     = False
```

Extensiones de clases

- Las clases pueden extenderse mediante el mecanismo `class`.
- Ejemplo de extensión de clases:

Prelude
```
class (Eq a) => Ord a where
    compare                :: a -> a -> Ordering
    (<), (<=), (>=), (>)   :: a -> a -> Bool
    max, min               :: a -> a -> a

    -- Minimal complete definition: (<=) or compare
    -- using compare can be more efficient for complex types
    compare x y | x==y      = EQ
                | x<=y      = LT
```

```
                | otherwise = GT

    x <= y                  = compare x y /= GT
    x <  y                  = compare x y == LT
    x >= y                  = compare x y /= LT
    x >  y                  = compare x y == GT

    max x y   | x <= y      = y
              | otherwise   = x
    min x y   | x <= y      = x
              | otherwise   = y
```

Instancias de clases extendidas

- Las instancias de las clases extendidas pueden declararse mediante el mecanismo `instance`.
- Ejemplo de declaración de instancia:

Prelude

```
instance Ord Bool where
     False <= _     = True
     True  <= True  = True
     True  <= False = False
```

Clases derivadas

- Al dedfinir un nuevo tipo con `data` puede declarse como instancia de clases mediante el mecanismo `deriving`.
- Ejemplo de clases derivadas:

Prelude

```
data Bool = False | True
            deriving (Eq, Ord, Read, Show)
```

- Comprobación:

```
False == False        ⇝  True
False < True          ⇝  True
show False            ⇝  "False"
read "False" :: Bool  ⇝  False
```

- Para derivar un tipo cuyos constructores tienen argumentos como derivado, los tipos de los argumentos tienen que ser instancias de las clases derivadas.
- Ejemplo:

```
data Figura = Circulo Float | Rect Float Float
              deriving (Eq, Ord, Show)
```

se cumple que `Float` es instancia de `Eq`, `Ord` y `Show`.

```
*Main> :info Float
...
instance Eq Float
instance Ord Float
instance Show Float
...
```

Bibliografía

1. G. Hutton *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2007.
   - Cap. 10: Declaring types and classes.
2. B.C. Ruiz, F. Gutiérrez, P. Guerrero y J.E. Gallardo. *Razonando con Haskell*. Thompson, 2004.
   - Cap. 4: Definición de tipos.
   - Cap. 5: El sistema de clases de Haskell.
3. S. Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*, Second Edition. Addison-Wesley, 1999.
   - Cap. 12: Overloading and type classes.
   - Cap. 13: Checking types.
   - Cap. 14: Algebraic types.

Tema 10

Evaluación perezosa

Contenido

10.1. Estrategias de evaluación

Estrategias de evaluación

- Para los ejemplos se considera la función

```
mult :: (Int,Int) -> Int
mult (x,y) = x*y
```

- Evaluación mediante paso de parámetros por valor (o por más internos):

	mult (1+2,2+3)	
=	mult (3,5)	[por def. de +]
=	3*5	[por def. de mult]
=	15	[por def. de *]

- Evaluación mediante paso de parámetros por nombre (o por más externos):

```
    mult (1+2,2+3)
=   (1+2)*(3+5)      [por def. de mult]
=   3*5              [por def. de +]
=   15               [por def. de *]
```

Evaluación con lambda expresiones

- Se considera la función

```
mult' :: Int -> Int -> Int
mult' x = \y -> x*y
```

- Evaluación:

```
    mult' (1+2) (2+3)
=   mult' 3 (2+3)        [por def. de +]
=   (λy → 3*y) (2+3)     [por def. de mult']
=   (λy → 3*y) 5         [por def. de +]
=   3*5                  [por def. de +]
=   15                   [por def. de *]
```

10.2. Terminación

Procesamiento con el infinito

- Definición de infinito

```
inf :: Int
inf = 1 + inf
```

- Evaluación de infinito en Haskell:

```
*Main> inf
  C-c C-cInterrupted.
```

- Evaluación de infinito:

```
    inf
=   1 + inf             [por def. inf]
=   1 + (1 + inf)       [por def. inf]
=   1 + (1 + (1 + inf)) [por def. inf]
=   ...
```

Procesamiento con el infinito

- Evaluación mediante paso de parámetros por valor:

```
    fst (0,inf)
=   fst (0,1 + inf)             [por def. inf]
=   fst (0,1 + (1 + inf))       [por def. inf]
=   fst (0,1 + (1 + (1 + inf))) [por def. inf]
=   ...
```

- Evaluación mediante paso de parámetros por nombre:

```
    fst (0,inf)
=   0           [por def. fst]
```

- Evaluación Haskell con infinito:

```
*Main> fst (0,inf)
0
```

10.3. Número de reducciones

Número de reducciones según las estrategias

- Para los ejemplos se considera la función

```
cuadrado :: Int -> Int
cuadrado n = n * n
```

- Evaluación mediante paso de parámetros por valor:

```
    cuadrado (1+2)
=   cuadrado 3      [por def. +]
=   3*3             [por def. cuadrado]
=   9               [por def. de *]
```

- Evaluación mediante paso de parámetros por nombre:

```
    cuadrado (1+2)
=   (1+2)*(1+2)     [por def. cuadrado]
=   3*(1+2)         [por def. de +]
=   3*3             [por def. de +]
=   9               [por def. de *]
```

Evaluación perezosa e impaciente

- En la evaluación mediante paso de parámetros por nombre los argumentos pueden evaluarse más veces que en el paso por valor.
- Se puede usar punteros para compartir valores de expresiones.
- La evaluación mediante paso de parámetros por nombre usando punteros para compartir valores de expresiones se llama **evaluación perezosa**.
- La evaluación mediante paso de parámetros por valor se llama **evaluación impaciente**.
- Evaluación perezosa del ejemplo anterior:

```
    cuadrado (1+2)
=   x*x con x = 1+2   [por def. cuadrado]
=   3*3               [por def. de +]
=   9                 [por def. de *]
```

- Haskell usa evaluación perezosa.

10.4. Estructuras infinitas

Programación con estructuras infinitas

- `unos` es una lista infinita de unos.

```
unos :: [Int]
unos = 1 : unos
```

- Evaluación:

```
    unos
=   1 : unos              [por def. unos]
=   1 : (1 : unos)        [por def. unos]
=   1 : (1 : (1 : unos))  [por def. unos]
=   ...
```

- Evaluación en Haskell:

```
*Main> unos
[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,...
```

Evaluación con estructuras infinitas

- Evaluación impaciente:

```
    head unos
=   head (1 : unos)              [por def. unos]
=   head (1 : (1 : unos))        [por def. unos]
=   head (1 : (1 : (1 : unos)))  [por def. unos]
=   ...
```

- Evaluación perezosa:

```
    head unos
=   head (1 : unos)   [por def. unos]
=   1                 [por def. head]
```

- Evaluación Haskell:

```
*Main> head unos
1
```

10.5. Programación modular

Programación modular

- La evaluación perezosa permite separar el control de los datos.
- Para los ejemplos se considera la función

Prelude

```
take :: Int -> [a] -> [a]
take n _  | n <= 0  = []
take _ []           = []
take n (x:xs)       = x : take (n-1) xs
```

- Ejemplo de separación del control (tomar 2 elementos) de los datos (una lista infinita de unos):

```
    take 2 unos
=   take 2 (1 : unos)          [por def. unos]
=   1 : (take 1 unos)          [por def. take]
=   1 : (take 1 (1 : unos))    [por def. unos]
=   1 : (1 : (take 0 unos))    [por def. take]
=   1 : (1 : [])               [por def. take]
=   [1,1]                      [por notación de listas]
```

Terminación de evaluaciones con estructuras infinitas

- Ejemplo de no terminación:

```
*Main> [1..]
[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,...
```

- Ejemplo de terminación:

```
*Main> take 3 [1..]
[1,2,3]
```

- Ejemplo de no terminación:

```
*Main> filter (<=3) [1..]
[1,2,3  C-c C-c Interrupted.
```

- Ejemplo de no terminación:

```
*Main> takeWhile (<=3) [1..]
[1,2,3]
```

La criba de Erastótenes

- La criba de Erastótenes

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	…
	3		5		7		9		11		13		15	…
			5		7				11		13			…
					7				11		13			…
									11		13			…
											13			…

- Definición

```
primos :: [Int ]
primos = criba [2..]

criba :: [Int] -> [Int]
criba (p:xs) = p : criba [x | x <- xs, x `mod` p /= 0]
```

- Evaluación:

```
take 15 primos ⇝ [2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47]
```

- Cálculo:

```
  primos
= criba [2..]
= criba (2 : [3..])
= 2 : (criba [x | x <- [3..], x `mod` 2 /= 0])
= 2 : (criba (3 : [x | x <- [4..], x `mod` 2 /= 0]))
= 2 : 3 : (criba [x | x <- [4..], x `mod` 2 /= 0,
                                  x `mod` 3 /= 0])
= 2 : 3 : (criba (5 : [x | x <- [6..], x `mod` 2 /= 0,
                                       x `mod` 3 /= 0]))
= 2 : 3 : 5 : (criba ([x | x <- [6..], x `mod` 2 /= 0,
                                       x `mod` 3 /= 0,
                                       x `mod` 5 /= 0]))
= ...
```

10.6. Aplicación estricta

Ejemplo de programa sin aplicación estricta

- `(sumaNE xs)` es la suma de los números de `xs`. Por ejemplo,

  `sumaNE [2,3,5]` $\leadsto$ `10`

```
sumaNE :: [Int] -> Int
sumaNE xs = sumaNE' 0 xs

sumaNE' :: Int -> [Int] -> Int
sumaNE' v []     = v
sumaNE' v (x:xs) = sumaNE' (v+x) xs
```

- Evaluación: :

	sumaNE [2,3,5]	
=	sumaNE′ 0 [2,3,5]	[por def. sumaNE]
=	sumaNE′ (0+2) [3,5]	[por def. sumaNE′]
=	sumaNE′ ((0+2)+3) [5]	[por def. sumaNE′]
=	sumaNE′ (((0+2)+3)+5) []	[por def. sumaNE′]
=	((0+2)+3)+5	[por def. sumaNE′]
=	(2+3)+5	[por def. +]
=	5+5	[por def. +]
=	10	[por def. +]

Ejemplo de programa con aplicación estricta

- `(sumaE xs)` es la suma de los números de `xs`. Por ejemplo,

```
sumaE [2,3,5]  ⇝  10
```

```
sumaE :: [Int] -> Int
sumaE xs = sumaE' 0 xs

sumaE' :: Int -> [Int] -> Int
sumaE' v []     = v
sumaE' v (x:xs) = (sumaE' $! (v+x)) xs
```

- Evaluación: :

```
    sumaE [2,3,5]
=   sumaE' 0 [2,3,5]          [por def. sumaE]
=   (sumaE' $! (0+2)) [3,5]   [por def. sumaE']
=   sumaE' 2 [3,5]            [por aplicación de $!]
=   (sumaE' $! (2+3)) [5]     [por def. sumaE']
=   sumaE' 5 [5]              [por aplicación de $!]
=   (sumaE' $! (5+5)) []      [por def. sumaE']
=   sumaE' 10 []              [por aplicación de $!]
=   10                        [por def. sumaE']
```

Comparación de consumo de memoria

- Comparación de consumo de memoria:

```
*Main> sumaNE [1..1000000]
*** Exception: stack overflow
*Main> sumaE [1..1000000]
1784293664
*Main> :set +s
*Main> sumaE [1..1000000]
1784293664
(2.16 secs, 145435772 bytes)
```

Plegado estricto

- Versión estricta de `foldl` en el `Data.List`

```
foldl' :: (a -> b -> a) -> a -> [b] -> a
foldl' f a []     = a
foldl' f a (x:xs) = (foldl' f $! f a x) xs
```

- Comparación de plegado y plegado estricto:s

```
*Main> foldl (+) 0 [2,3,5]
10
*Main> foldl' (+) 0 [2,3,5]
10
*Main> foldl (+) 0 [1..1000000]
*** Exception: stack overflow
*Main> foldl' (+) 0 [1..1000000]
500000500000
```

Bibliografía

1. R. Bird. *Introducción a la programación funcional con Haskell*. Prentice Hall, 2000.
   - Cap. Cap. 7: Eficiencia.
2. G. Hutton *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2007.
   - Cap. 12: Lazy evaluation.
3. B. O'Sullivan, D. Stewart y J. Goerzen *Real World Haskell*. O'Reilly, 2008.
   - Cap. 2: Types and Functions.
4. B.C. Ruiz, F. Gutiérrez, P. Guerrero y J.E. Gallardo. *Razonando con Haskell*. Thompson, 2004.
   - Cap. 2: Introducción a Haskell.
   - Cap. 8: Evaluación perezosa. Redes de procesos.
5. S. Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*, Second Edition. Addison-Wesley, 1999.
   - Cap. 17: Lazy programming.

Tema 11

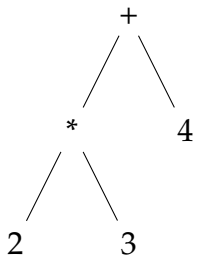
Analizadores sintácticos funcionales

Contenido

11.1. Analizadores sintácticos

Analizadores sintácticos

- Un **analizador sintáctico** es un programa que analiza textos para determinar su **estructura sintáctica**.
- Ejemplo de análisis sintáctico aritmético: La estructura sintáctica de la cadena `"2*3+4"` es el árbol



- El análisis sintáctico forma parte del preprocesamiento en la mayoría de las aplicaciones reales.

11.2. El tipo de los analizadores sintácticos

Opciones para el tipo de los analizadores sintácticos

- Opción inicial:

```
type Analizador = String -> Tree
```

- Con la parte no analizada:

```
type Analizador = String -> (Tree,String)
```

- Con todos los análisis:

```
type Analizador = String -> [(Tree,String)]
```

- Con estructuras arbitrarias:

```
type Analizador a = String -> [(a,String)]
```

- Simplificación: analizadores que fallan o sólo dan un análisis.

11.3. Analizadores sintácticos básicos

Analizadores sintácticos básicos: resultado

- `(analiza a cs)` analiza la cadena `cs` mediante el analizador `a`. Por ejemplo,

```
analiza :: Analizador a -> String -> [(a,String)]
analiza a cs = a cs
```

- El analizador `resultado v` siempre tiene éxito, devuelve `v` y no consume nada. Por ejemplo,

```
*Main> analiza (resultado 1) "abc"
[(1,"abc")]
```

```
resultado :: a -> Analizador a
resultado v =  \xs -> [(v,xs)]
```

Analizadores sintácticos básicos: fallo

- El analizador `fallo` siempre falla. Por ejemplo,

```
*Main> analiza fallo "abc"
[]
```

```
fallo :: Analizador a
fallo =  \xs -> []
```

Analizadores sintácticos básicos: elemento

- El analizador `elemento` falla si la cadena es vacía y consume el primer elemento en caso contrario. Por ejemplo,

```
*Main> analiza elemento ""
[]
*Main> analiza elemento "abc"
[('a',"bc")]
```

```
elemento :: Analizador Char
elemento =  \xs -> case xs of
                     [] -> []
                     (x:xs) -> [(x , xs)]
```

11.4. Composición de analizadores sintácticos

11.4.1. Secuenciación de analizadores sintácticos

- `((p ‘liga‘ f) e)` falla si el análisis de `e` por `p` falla, en caso contrario, se obtiene un valor (`v`) y una salida (`s`), se aplica la función `f` al valor `v` obteniéndose un nuevo analizador con el que se analiza la salida `s`.

```
liga :: Analizador a ->
        (a -> Analizador b) ->
        Analizador b
p `liga` f = \ent -> case analiza p ent of
                       []        -> []
                       [(v,sal)] -> analiza (f v) sal
```

- `primeroTercero` es un analizador que devuelve los caracteres primero y tercero de la cadena. Por ejemplo,

```
primeroTercero "abel"  ⇝  [(('a','e'),"l")]
primeroTercero "ab"    ⇝  []
```

```
primeroTercero :: Analizador (Char,Char)
primeroTercero =
    elemento `liga` \x ->
    elemento `liga` \_ ->
    elemento `liga` \y ->
    resultado (x,y)
```

11.4.2. Elección de analizadores sintácticos

- `((p +++ q) e)` analiza `e` con `p` y si falla analiza `e` con `q`. Por ejemplo,

```
Main*> analiza (elemento +++ resultado 'd') "abc"
[('a',"bc")]
Main*> analiza (fallo +++ resultado 'd') "abc"
[('d',"abc")]
Main*> analiza (fallo +++ fallo) "abc"
[]
```

```
(+++) :: Analizador a -> Analizador a -> Analizador a
p +++ q = \ent -> case analiza p ent of
                    []        -> analiza q ent
                    [(v,sal)] -> [(v,sal)]
```

11.5. Primitivas derivadas

- `(sat p)` es el analizador que consume un elemento si dicho elemento cumple la propiedad `p` y falla en caso contrario. Por ejemplo,

```
analiza (sat isLower) "hola"  ⇝  [('h',"ola")]
analiza (sat isLower) "Hola"  ⇝  []
```

```
sat :: (Char -> Bool) -> Analizador Char
sat p = elemento `liga` \x ->
        if p x then resultado x else fallo
```

- `digito` analiza si el primer carácter es un dígito. Por ejemplo,

```
analiza digito "123"  ⇝  [('1',"23")]
analiza digito "uno"  ⇝  []
```

```
digito :: Analizador Char
digito = sat isDigit
```

- `minuscula` analiza si el primer carácter es una letra minúscula. Por ejemplo,

```
analiza minuscula "eva"  ⇝  [('e',"va")]
analiza minuscula "Eva"  ⇝  []
```

```
minuscula :: Analizador Char
minuscula = sat isLower
```

- `mayuscula` analiza si el primer carácter es una letra mayúscula. Por ejemplo,

```
analiza mayuscula "Eva"  ⇝  [('E',"va")]
analiza mayuscula "eva"  ⇝  []
```

```
mayuscula :: Analizador Char
mayuscula = sat isUpper
```

- `letra` analiza si el primer carácter es una letra. Por ejemplo,

```
analiza letra "Eva"  ⇝  [('E',"va")]
analiza letra "eva"  ⇝  [('e',"va")]
analiza letra "123"  ⇝  []
```

```
letra :: Analizador Char
letra = sat isAlpha
```

- `alfanumerico` analiza si el primer carácter es una letra o un número. Por ejemplo,

```
analiza alfanumerico "Eva"   ⇝  [('E',"va")]
analiza alfanumerico "eva"   ⇝  [('e',"va")]
analiza alfanumerico "123"   ⇝  [('1',"23")]
analiza alfanumerico " 123"  ⇝  []
```

```
alfanumerico :: Analizador Char
alfanumerico = sat isAlphaNum
```

- `(caracter x)` analiza si el primer carácter es igual al carácter `x`. Por ejemplo,

```
analiza (caracter 'E') "Eva"  ⇝  [('E',"va")]
analiza (caracter 'E') "eva"  ⇝  []
```

```
caracter :: Char -> Analizador Char
caracter x = sat (== x)
```

- `(cadena c)` analiza si empieza con la cadena `c`. Por ejemplo,

```
analiza (cadena "abc") "abcdef"  ⇝  [("abc","def")]
analiza (cadena "abc") "abdcef"  ⇝  []
```

```
cadena :: String -> Analizador String
cadena []     = resultado []
cadena (x:xs) = caracter x `liga` \x  ->
                cadena xs  `liga` \xs ->
                resultado (x:xs)
```

- `varios p` aplica el analizador `p` cero o más veces. Por ejemplo,

```
analiza (varios digito) "235abc"  ⇝  [("235","abc")]
analiza (varios digito) "abc235"  ⇝  [("","abc235")]
```

```
varios :: Analizador a -> Analizador [a]
varios p  = varios1 p +++ resultado []
```

- `varios1 p` aplica el analizador `p` una o más veces. Por ejemplo,

```
analiza (varios1 digito) "235abc"  ⇝  [("235","abc")]
analiza (varios1 digito) "abc235"  ⇝  []
```

```
varios1 :: Analizador a -> Analizador [a]
varios1 p = p        `liga` \v  ->
            varios p `liga` \vs ->
            resultado (v:vs)
```

- `ident` analiza si comienza con un identificador (i.e. una cadena que comienza con una letra minúscula seguida por caracteres alfanuméricos). Por ejemplo,

```
Main*> analiza ident "lunes12 de Ene"
[("lunes12"," de Ene")]
Main*> analiza ident "Lunes12 de Ene"
[]
```

```
ident :: Analizador String
ident =  minuscula           `liga` \x  ->
         varios alfanumerico `liga` \xs ->
         resultado (x:xs)
```

- `nat` analiza si comienza con un número natural. Por ejemplo,

```
analiza nat "14DeAbril"   ⇝  [(14,"DeAbril")]
analiza nat " 14DeAbril"  ⇝  []
```

```
nat :: Analizador Int
nat = varios1 digito `liga` \xs ->
      resultado (read xs)
```

- `espacio` analiza si comienza con espacios en blanco. Por ejemplo,

```
analiza espacio "    a b c"  ⇝  [((),"a b c")]
```

```
espacio :: Analizador ()
espacio = varios (sat isSpace) `liga` \_ ->
          resultado ()
```

11.6. Tratamiento de los espacios

- `unidad p` ignora los espacios en blanco y aplica el analizador `p`. Por ejemplo,

```
Main*> analiza (unidad nat) " 14DeAbril"
[(14,"DeAbril")]
Main*> analiza (unidad nat) " 14   DeAbril"
[(14,"DeAbril")]
```

```
unidad :: Analizador a -> Analizador a
unidad p = espacio `liga` \_ ->
           p       `liga` \v ->
           espacio `liga` \_ ->
           resultado v
```

- `identificador` analiza un identificador ignorando los espacios delante y detrás. Por ejemplo,

```
Main*> analiza identificador "  lunes12  de Ene"
[("lunes12","de Ene")]
```

```
identificador :: Analizador String
identificador = unidad ident
```

- `natural` analiza un número natural ignorando los espacios delante y detrás. Por ejemplo,

```
analiza natural "  14DeAbril"  ⇝  [(14,"DeAbril")]
```

```
natural :: Analizador Int
natural =  unidad nat
```

- `(simbolo xs)` analiza la cadena `xs` ignorando los espacios delante y detrás. Por ejemplo,

```
Main*> analiza (simbolo "abc") "  abcdef"
[("abc","def")]
```

```
simbolo :: String -> Analizador String
simbolo xs =  unidad (cadena xs)
```

- `listaNat` analiza una lista de naturales ignorando los espacios. Por ejemplo,

```
Main*> analiza listaNat " [  2,  3, 5   ]"
[([2,3,5],"")]
Main*> analiza listaNat " [  2,  3,]"
[]
```

```
listaNat :: Analizador [Int]
listaNat = simbolo "["          `liga` \_ ->
           natural              `liga` \n ->
           varios (simbolo ","  `liga` \_ ->
                   natural)     `liga` \ns ->
           simbolo "]"          `liga` \_ ->
           resultado (n:ns)
```

11.7. Analizador de expresiones aritméticas

Expresiones aritméticas

- Consideramos expresiones aritméticas:
  - construidas con números, operaciones ($+$ y $*$) y paréntesis.
  - $+$ y $*$ asocian por la derecha.
  - $*$ tiene más prioridad que +.
- Ejemplos:
  - $2+3+5$ representa a $2+(3+5)$.
  - $2*3+5$ representa a $(2*3)+5$.

Gramáticas de las expresiones aritméticas: Gramática 1

- Gramática 1 de las expresiones aritméticas:
  $$\begin{array}{lcl} expr & ::= & expr + expr \mid expr * expr \mid (expr) \mid nat \\ nat & ::= & 0 \mid 1 \mid 2 \mid \ldots \end{array}$$
- La gramática 1 no considera prioridad:
  acepta $2+3*5$ como $(2+3)*5$ y como $2+(3*5)$
- La gramática 1 no considera asociatividad:
  acepta $2+3+5$ como $(2+3)+5$ y como $2+(3+5)$
- La gramática 1 es ambigua.

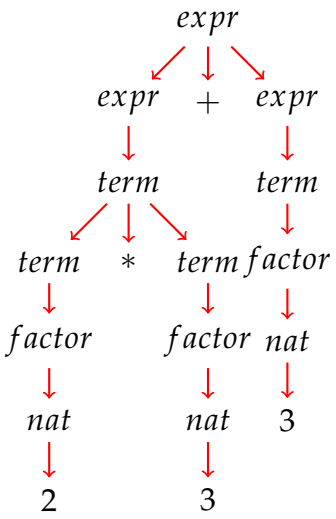
Gramáticas de las expresiones aritméticas: Gramática 2

- Gramática 2 de las expresiones aritméticas (con prioridad):

$$\begin{array}{lll} expr & ::= & expr + expr \mid term \\ term & ::= & term * term \mid factor \\ factor & ::= & (expr) \mid nat \\ nat & ::= & 0 \mid 1 \mid 2 \mid \ldots \end{array}$$

- La gramática 2 sí considera prioridad:
  acepta $2 + 3 * 5$ sólo como $2 + (3 * 5)$
- La gramática 2 no considera asociatividad:
  acepta $2 + 3 + 5$ como $(2 + 3) + 5$ y como $2 + (3 + 5)$
- La gramática 2 es ambigua.

Árbol de análisis sintáctico de $2 * 3 + 5$ con la gramática 2



Gramáticas de las expresiones aritméticas: Gramática 3

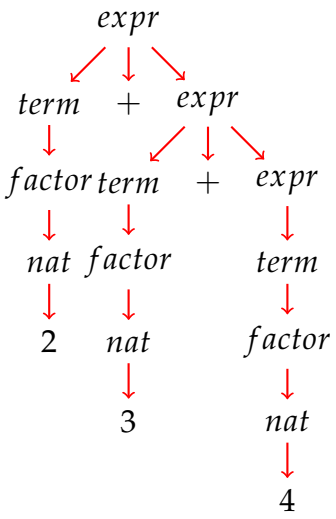
- Gramática 3 de las expresiones aritméticas:

$$\begin{array}{lll} expr & ::= & term + expr \mid term \\ term & ::= & factor * term \mid factor \\ factor & ::= & (expr) \mid nat \\ nat & ::= & 0 \mid 1 \mid 2 \mid \ldots \end{array}$$

- La gramática 3 sí considera prioridad:
  acepta $2 + 3 * 5$ sólo como $2 + (3 * 5)$

- La gramática 3 sí considera asociatividad:
  acepta $2+3+5$ como $2+(3+5)$
- La gramática 3 no es ambigua (i.e. es libre de contexto).

Árbol de análisis sintáctico de $2+3+5$ con la gramática 3



Gramáticas de las expresiones aritméticas: Gramática 4

- La gramática 4 se obtiene simplificando la gramática 3:

$$\begin{array}{lcl} expr & ::= & term\ (+\ expr \mid \epsilon) \\ term & ::= & factor\ (*\ term \mid \epsilon) \\ factor & ::= & (expr) \mid nat \\ nat & ::= & 0 \mid 1 \mid 2 \mid \ldots \end{array}$$

  donde ϵ es la cadena vacía.
- La gramática 4 no es ambigua.
- La gramática 4 es la que se usará para escribir el analizador de expresiones aritméticas.

Analizador de expresiones aritméticas

- `expr` analiza una expresión aritmética devolviendo su valor. Por ejemplo,

```
analiza expr "2*3+5"     ⇝  [(11,"")]
analiza expr "2*(3+5)"   ⇝  [(16,"")]
analiza expr "2+3*5"     ⇝  [(17,"")]
analiza expr "2*3+5abc"  ⇝  [(11,"abc")]
```

```
expr :: Analizador Int
expr = term              `liga` \t ->
       (simbolo "+"      `liga` \_ ->
        expr             `liga` \e ->
        resultado (t+e))
       +++ resultado t
```

- averbterm analiza un término de una expresión aritmética devolviendo su valor. Por ejemplo,

```
analiza term "2*3+5"      ⇝  [(6,"+5")]
analiza term "2+3*5"      ⇝  [(2,"+3*5")]
analiza term "(2+3)*5+7"  ⇝  [(25,"+7")]
```

```
term :: Analizador Int
term =  factor           `liga` \f ->
        (simbolo "*"     `liga` \_ ->
         term            `liga` \t ->
         resultado (f*t))
        +++ resultado f
```

- averbfactor analiza un factor de una expresión aritmética devolviendo su valor. Por ejemplo,

```
analiza factor "2*3+5"      ⇝  [(2,"*3+5")]
analiza factor "(2+3)*5"    ⇝  [(5,"*5")]
analiza factor "(2+3*7)*5"  ⇝  [(23,"*5")]
```

```
factor :: Analizador Int
factor =  (simbolo "("  `liga` \_ ->
           expr         `liga` \e ->
           simbolo ")"  `liga` \_ ->
           resultado e)
          +++ natural
```

- `(valor cs)` analiza la cadena `cs` devolviendo su valor si es una expresión aritmética y un mensaje de error en caso contrario. Por ejemplo,

```
valor "2*3+5"      ⇝  11
valor "2*(3+5)"    ⇝  16
```

```
valor "2 * 3 + 5"  ⇝  11
valor "2*3x"       ⇝  *** Exception: sin usar x
valor "-1"         ⇝  *** Exception: entrada no valida
```

```
valor :: String -> Int
valor xs = case (analiza expr xs) of
             [(n,[])]  -> n
             [(_,sal)] -> error ("sin usar " ++ sal)
             []        -> error "entrada no valida"
```

Bibliografía

1. R. Bird. *Introducción a la programación funcional con Haskell*. Prentice Hall, 2000.
   - Cap. 11: Análisis sintáctico.
2. G. Hutton *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2007.
   - Cap. 8: Functional parsers.
3. G. Hutton y E. Meijer. Monadic Parser Combinators. Technical Report NOTTCS–TR–96–4, Department of Computer Science, University of Nottingham, 1996.
4. G. Hutton y E. Meijer. Monadic Parsing in Haskell. Journal of Functional Programming, 8(4): 437—444, 1998.
5. B.C. Ruiz, F. Gutiérrez, P. Guerrero y J.E. Gallardo. *Razonando con Haskell*. Thompson, 2004.
   - Cap. 14: Analizadores.

Tema 12

Programas interactivos

Contenido

12.1. Programas interactivos

- Los programas por lote no interactúan con los usuarios durante su ejecución.
- Los programas interactivos durante su ejecución pueden leer datos del teclado y escribir resultados en la pantalla.
- Problema:
  - Los programas interactivos tienen efectos laterales.
  - Los programa Haskell no tiene efectos laterales.

Ejemplo de programa interactivo

- Especificación: El programa pide una cadena y dice el número de caracteres que tiene.
- Ejemplo de sesión:

```
-- *Main> longitudCadena
-- Escribe una cadena: "Hoy es lunes"
-- La cadena tiene 14 caracteres
```

- Programa:

```
longitudCadena :: IO ()
longitudCadena = do putStr "Escribe una cadena: "
                    xs <- getLine
                    putStr "La cadena tiene "
                    putStr (show (length xs))
                    putStrLn " caracteres"
```

12.2. El tipo de las acciones de entrada/salida

- En Haskell se pueden escribir programas interactivos usando tipos que distingan las expresiones puras de las **acciones** impuras que tienen efectos laterales.
- `IO a` es el tipo de las acciones que devuelven un valor del tipo `a`.
- Ejemplos:
  - `IO Char` es el tipo de las acciones que devuelven un carácter.
  - `IO ()` es el tipo de las acciones que no devuelven ningún valor.

12.3. Acciones básicas

- `getChar :: IO Char`
  La acción `getChar` lee un carácter del teclado, lo muestra en la pantalla y lo devuelve como valor.
- `putChar :: c -> IO ()`
  La acción `putChar c` escribe el carácter `c` en la pantalla y no devuelve ningún valor.

- `return a -> IO a`
  La acción `return c` devuelve el valor `c` sin ninguna interacción.
- Ejemplo:

```
*Main> putChar 'b'
b*Main> it
()
```

12.4. Secuenciación

- Una sucesión de acciones puede combinarse en una acción compuesta mediante expresiones **do**.
- Ejemplo:

```
ejSecuenciacion :: IO (Char,Char)
ejSecuenciacion = do x <- getChar
                     getChar
                     y <- getChar
                     return (x,y)
```

Lee dos caracteres y devuelve el par formado por ellos. Por ejemplo,

```
*Main> ejSecuenciacion
b f
('b','f')
```

12.5. Primitivas derivadas

- Lectura de cadenas del teclado:

Prelude

```
getLine :: IO String
getLine = do x <- getChar
             if x == '\n' then return []
                else do xs <- getLine
                        return (x:xs)
```

- Escritura de cadenas en la pantalla:

Prelude
```
putStr :: String -> IO ()
putStr []     = return ()
putStr (x:xs) = do putChar x
                   putStr xs
```

- Escritura de cadenas en la pantalla y salto de línea:

Prelude
```
putStrLn :: String -> IO ()
putStrLn xs = do putStr xs
                 putChar '\n'
```

- Ejecución de una lista de acciones:

Prelude
```
sequence_ :: [IO a] -> IO ()
sequence_ []     = return ()
sequence_ (a:as) = do a
                      sequence_ as
```

Por ejemplo,

```
*Main> sequence_ [putStrLn "uno", putStrLn "dos"]
uno
dos
*Main> it
()
```

Ejemplo de programa con primitivas derivadas

- Especificación: El programa pide una cadena y dice el número de caracteres que tiene.
- Ejemplo de sesión:

```
-- *Main> longitudCadena
-- Escribe una cadena: "Hoy es lunes"
-- La cadena tiene 14 caracteres
```

- Programa:

```
longitudCadena :: IO ()
longitudCadena = do putStr "Escribe una cadena: "
                    xs <- getLine
                    putStr "La cadena tiene "
                    putStr (show (length xs))
                    putStrLn " caracteres"
```

12.6. Ejemplos de programas interactivos

12.6.1. Juego de adivinación interactivo

- Descripción: El programa le pide al jugador humano que piense un número entre 1 y 100 y trata de adivinar el número que ha pensado planteándole conjeturas a las que el jugador humano responde con mayor, menor o exacto según que el número pensado sea mayor, menor o igual que el número conjeturado por la máquina.
- Ejemplo de sesión:

```
Main> juego
Piensa un numero entre el 1 y el 100.
Es 50? [mayor/menor/exacto] mayor
Es 75? [mayor/menor/exacto] menor
Es 62? [mayor/menor/exacto] mayor
Es 68? [mayor/menor/exacto] exacto
Fin del juego
```

- Programa:

```
juego :: IO ()
juego =
    do putStrLn "Piensa un numero entre el 1 y el 100."
       adivina 1 100
       putStrLn "Fin del juego"

adivina :: Int -> Int -> IO ()
adivina a b =
    do putStr ("Es " ++ show conjetura ++ "? [mayor/menor/exacto] ")
       s <- getLine
       case s of
         "mayor"  -> adivina (conjetura+1) b
```

```
        "menor"  -> adivina a (conjetura-1)
        "exacto" -> return ()
        _        -> adivina a b
    where
      conjetura = (a+b) `div` 2
```

12.6.2. Calculadora aritmética

Acciones auxiliares

- Escritura de caracteres sin eco:

```
getCh :: IO Char
getCh = do hSetEcho stdin False
           c <- getChar
           hSetEcho stdin True
           return c
```

- Limpieza de la pantalla:

```
limpiaPantalla:: IO ()
limpiaPantalla= putStr "\ESC[2J"
```

- Escritura en una posición:

```
type Pos = (Int,Int)

irA :: Pos -> IO ()
irA (x,y) = putStr ("\ESC[" ++
                    show y ++ ";" ++ show x ++
                    "H")

escribeEn :: Pos -> String -> IO ()
escribeEn p xs = do irA p
                    putStr xs
```

Calculadora

```
calculadora :: IO ()
calculadora = do limpiaPantalla
```

```
                escribeCalculadora
                limpiar

escribeCalculadora :: IO ()
escribeCalculadora =
    do limpiaPantalla
       sequence_ [escribeEn (1,y) xs
                  | (y,xs) <- zip [1..13] imagenCalculadora]
       putStrLn ""
```

```
imagenCalculadora :: [String]
imagenCalculadora = ["+---------------+",
                     "|               |",
                     "+---+---+---+---+",
                     "| q | c | d | = |",
                     "+---+---+---+---+",
                     "| 1 | 2 | 3 | + |",
                     "+---+---+---+---+",
                     "| 4 | 5 | 6 | - |",
                     "+---+---+---+---+",
                     "| 7 | 8 | 9 | * |",
                     "+---+---+---+---+",
                     "| 0 | ( | ) | / |",
                     "+---+---+---+---+"]
```

Los primeros cuatro botones permiten escribir las órdenes:

- q para salir ('quit'),
- c para limpiar la agenda ('clear'),
- d para borrar un carácter ('delete') y
- = para evaluar una expresión.

Los restantes botones permiten escribir las expresiones.

```
limpiar :: IO ()
limpiar =  calc ""

calc :: String -> IO ()
```

```
calc xs = do escribeEnPantalla xs
             c <- getCh
             if elem c botones
                then procesa c xs
                else do calc xs

escribeEnPantalla xs =
    do escribeEn (3,2) "             "
       escribeEn (3,2) (reverse (take 13 (reverse xs)))
```

```
botones :: String
botones = standard ++ extra
    where
      standard = "qcd=123+456-789*0()/"
      extra    = "QCD \ESC\BS\DEL\n"

procesa :: Char -> String -> IO ()
procesa c xs
   | elem c "qQ\ESC"    = salir
   | elem c "dD\BS\DEL" = borrar xs
   | elem c "=\n"       = evaluar xs
   | elem c "cC"        = limpiar
   | otherwise          = agregar c xs
```

```
salir :: IO ()
salir = irA (1,14)

borrar :: String -> IO ()
borrar "" = calc ""
borrar xs = calc (init xs)

evaluar :: String -> IO ()
evaluar xs = case analiza expr xs of
             [(n,"")] -> calc (show n)
             _        -> do calc xs

agregar :: Char -> String -> IO ()
agregar c xs = calc (xs ++ [c])
```

12.6.3. El juego de la vida

Descripción del juego de la vida

- El tablero del juego de la vida es una malla formada por cuadrados ("células") que se pliega en todas las direcciones.
- Cada célula tiene 8 células vecinas, que son las que están próximas a ella, incluso en las diagonales.
- Las células tienen dos estados: están "vivas" o "muertas".
- El estado del tablero evoluciona a lo largo de unidades de tiempo discretas.
- Las transiciones dependen del número de células vecinas vivas:
  - Una célula muerta con exactamente 3 células vecinas vivas "nace" (al turno siguiente estará viva).
  - Una célula viva con 2 ó 3 células vecinas vivas sigue viva, en otro caso muere.

El tablero del juego de la vida

- Tablero:

```
type Tablero = [Pos]
```

- Dimensiones:

```
ancho :: Int
ancho = 5

alto :: Int
alto = 5
```

El juego de la vida

- Ejemplo de tablero:

```
ejTablero :: Tablero
ejTablero = [(2,3),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)]
```

- Representación del tablero:

```
 1234
1
2   O
3 O O
4  OO
```

- `(vida n t)` simula el juego de la vida a partir del tablero `t` con un tiempo entre generaciones proporcional a `n`. Por ejemplo,

```
vida 100000 ejTablero
```

```
vida :: Int -> Tablero -> IO ()
vida n t = do limpiaPantalla
              escribeTablero t
              espera n
              vida n (siguienteGeneracion t)
```

- Escritura del tablero:

```
escribeTablero :: Tablero -> IO ()
escribeTablero t = sequence_ [escribeEn p "O" | p <- t]
```

- Espera entre generaciones:

```
espera :: Int -> IO ()
espera n = sequence_ [return () | _ <- [1..n]]
```

- `siguienteGeneracion t)` es el tablero de la siguiente generación al tablero `t`. Por ejemplo,

```
*Main> siguienteGeneracion ejTablero
[(4,3),(3,4),(4,4),(3,2),(5,3)]
```

```
siguienteGeneracion :: Tablero -> Tablero
siguienteGeneracion t = supervivientes t ++ nacimientos t
```

- `(supervivientes t)` es la listas de posiciones de `t` que sobreviven; i.e. posiciones con 2 ó 3 vecinos vivos. Por ejemplo,

```
supervivientes ejTablero  ⇝  [(4,3),(3,4),(4,4)]
```

```
supervivientes :: Tablero -> [Pos]
supervivientes t = [p | p <- t,
                        elem (nVecinosVivos t p) [2,3]]
```

- `(nVecinosVivos t c)` es el número de vecinos vivos de la célula `c` en el tablero `t`. Por ejemplo,

```
nVecinosVivos ejTablero (3,3)  ⇝  5
nVecinosVivos ejTablero (3,4)  ⇝  3
```

```
nVecinosVivos :: Tablero -> Pos -> Int
nVecinosVivos t = length . filter (tieneVida t) . vecinos
```

`(vecinos p)` es la lista de los vecinos de la célula en la posición `p`. Por ejemplo,

```
vecinos (2,3) ⇝ [(1,2),(2,2),(3,2),(1,3),(3,3),(1,4),(2,4),(3,4)]
vecinos (1,2) ⇝ [(5,1),(1,1),(2,1),(5,2),(2,2),(5,3),(1,3),(2,3)]
vecinos (5,2) ⇝ [(4,1),(5,1),(1,1),(4,2),(1,2),(4,3),(5,3),(1,3)]
vecinos (2,1) ⇝ [(1,5),(2,5),(3,5),(1,1),(3,1),(1,2),(2,2),(3,2)]
vecinos (2,5) ⇝ [(1,4),(2,4),(3,4),(1,5),(3,5),(1,1),(2,1),(3,1)]
vecinos (1,1) ⇝ [(5,5),(1,5),(2,5),(5,1),(2,1),(5,2),(1,2),(2,2)]
vecinos (5,5) ⇝ [(4,4),(5,4),(1,4),(4,5),(1,5),(4,1),(5,1),(1,1)]
```

```
vecinos :: Pos -> [Pos]
vecinos (x,y) = map modular [(x-1,y-1), (x,y-1), (x+1,y-1),
                             (x-1,y),            (x+1,y),
                             (x-1,y+1), (x,y+1), (x+1,y+1)]
```

- `(modular p)` es la posición correspondiente a `p` en el tablero considerando los plegados. Por ejemplo,

```
modular (6,3)  ⇝  (1,3)
modular (0,3)  ⇝  (5,3)
modular (3,6)  ⇝  (3,1)
modular (3,0)  ⇝  (3,5)
```

```
modular :: Pos -> Pos
modular (x,y) = (((x-1) `mod` ancho) + 1, ((y-1) `mod` alto + 1))
```

- `(tieneVida t p)` se verifica si la posición `p` del tablero `t` tiene vida. Por ejemplo,

```
tieneVida ejTablero (1,1)  ⇝  False
tieneVida ejTablero (2,3)  ⇝  True
```

```
tieneVida :: Tablero -> Pos -> Bool
tieneVida t p = elem p t
```

- `(noTieneVida t p)` se verifica si la posición `p` del tablero `t` no tiene vida. Por ejemplo,

```
noTieneVida ejTablero (1,1)  ⇝  True
noTieneVida ejTablero (2,3)  ⇝  False
```

```
noTieneVida :: Tablero -> Pos -> Bool
noTieneVida t p = not (tieneVida t p)
```

- `(nacimientos t)` es la lista de los nacimientos de tablero `t`; i.e. las posiciones sin vida con 3 vecinos vivos. Por ejemplo,

```
nacimientos ejTablero  ⇝  [(3,2),(5,3)]
```

```
nacimientos' :: Tablero -> [Pos]
nacimientos' t = [(x,y) | x <- [1..ancho],
                          y <- [1..alto],
                          noTieneVida t (x,y),
                          nVecinosVivos t (x,y) == 3]
```

- Definición más eficiente de `nacimientos`

```
nacimientos :: Tablero -> [Pos]
nacimientos t = [p | p <- nub (concat (map vecinos t)),
                     noTieneVida t p,
                     nVecinosVivos t p == 3]
```

donde `(nub xs)` es la lista obtenida eliminando las repeticiones de `xs`. Por ejemplo,

```
nub [2,3,2,5]  ⇝  [2,3,5]
```

Bibliografía

1. H. Daumé III. Yet Another Haskell Tutorial. 2006.
   - Cap. 5: Basic Input/Output.
2. G. Hutton. *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2007.
   - Cap. 9: Interactive programs.
3. B. O'Sullivan, J. Goerzen y D. Stewart. *Real World Haskell*. O'Reilly, 2009.
   - Cap. 7: I/O.
4. B.C. Ruiz, F. Gutiérrez, P. Guerrero y J.E. Gallardo. *Razonando con Haskell*. Thompson, 2004.
   - Cap. 7: Entrada y salida.
5. S. Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*, Second Edition. Addison-Wesley, 1999.
   - Cap. 18: Programming with actions.

Tema 13

Aplicaciones de programación funcional

Contenido

13.1. El juego de cifras y letras

13.1.1. Introducción

Presentación del juego

- *Cifras y letras* es un programa de Canal Sur que incluye un juego numérico cuya esencia es la siguiente:

  > Dada una sucesión de números naturales y un número objetivo, intentar construir una expresión cuyo valor es el objetivo combinando los números de la sucesión usando suma, resta, multiplicación, división y paréntesis. Cada número de la sucesión puede usarse como máximo una vez. Además, todos los números, incluyendo los resultados intermedios tienen que ser enteros positivos (1,2,3,...).

- Ejemplos

- Dada la sucesión 1, 3, 7, 10, 25, 50 y el objetivo 765, una solución es (1+50)*(25−10).
- Para el problema anterior, existen 780 soluciones.
- Con la sucesión anterior y el objetivo 831, no hay solución.

Formalización del problema: Operaciones

- Las operaciones son sumar, restar, multiplicar o dividir.

```
data Op = Sum | Res | Mul | Div

instance Show Op where
   show Sum = "+"
   show Res = "-"
   show Mul = "*"
   show Div = "/"
```

- `ops` es la lista de las operaciones.

```
ops :: [Op]
ops = [Sum,Res,Mul,Div]
```

Operaciones válidas

- `(valida o x y)` se verifica si la operación `o` aplicada a los números naturales `x` e `y` da un número natural. Por ejemplo,

```
valida Res 5 3  ⇝  True
valida Res 3 5  ⇝  False
valida Div 6 3  ⇝  True
valida Div 6 4  ⇝  False
```

```
valida :: Op -> Int -> Int -> Bool
valida Sum _ _ = True
valida Res x y = x > y
valida Mul _ _ = True
valida Div x y = x `mod` y == 0
```

Aplicación de operaciones

- `(aplica o x y)` es el resultado de aplicar la operación `o` a los números naturales `x` e `y`. Por ejemplo,

```
aplica Sum 2 3  ⇝  5
aplica Div 6 3  ⇝  2
```

```
aplica :: Op -> Int -> Int -> Int
aplica Sum x y = x + y
aplica Res x y = x - y
aplica Mul x y = x * y
aplica Div x y = x `div` y
```

Expresiones

- Las expresiones son números enteros o aplicaciones de operaciones a dos expresiones.

```
data Expr = Num Int | Apl Op Expr Expr

instance Show Expr where
   show (Num n)     = show n
   show (Apl o i d) = parentesis i ++ show o ++ parentesis d
                      where
                         parentesis (Num n) = show n
                         parentesis e       = "(" ++ show e ++ ")"
```

- Ejemplo: Expresión correspondiente a (1+50)*(25−10)

```
ejExpr :: Expr
ejExpr =  Apl Mul e1 e2
    where e1 = Apl Sum (Num 1) (Num 50)
          e2 = Apl Res (Num 25) (Num 10)
```

Números de una expresión

- `(numeros e)` es la lista de los números que aparecen en la expresión `e`. Por ejemplo,

```
*Main> numeros (Apl Mul (Apl Sum (Num 2) (Num 3)) (Num 7))
[2,3,7]
```

```
numeros :: Expr -> [Int]
numeros (Num n)     = [n]
numeros (Apl _ l r) = numeros l ++ numeros r
```

Valor de una expresión

- `(valor e)` es la lista formada por el valor de la expresión `e` si todas las operaciones para calcular el valor de `e` son números positivos y la lista vacía en caso contrario. Por ejemplo,

```
valor (Apl Mul (Apl Sum (Num 2) (Num 3)) (Num 7)) ⇝ [35]
valor (Apl Res (Apl Sum (Num 2) (Num 3)) (Num 7)) ⇝ []
valor (Apl Sum (Apl Res (Num 2) (Num 3)) (Num 7)) ⇝ []
```

```
valor :: Expr -> [Int]
valor (Num n)     = [n | n > 0]
valor (Apl o i d) = [aplica o x y | x <- valor i
                                  , y <- valor d
                                  , valida o x y]
```

Funciones combinatorias: Sublistas

- `(sublistas xs)` es la lista de las sublistas de `xs`. Por ejemplo,

```
*Main> sublistas "bc"
["","c","b","bc"]
*Main> sublistas "abc"
["","c","b","bc","a","ac","ab","abc"]
```

```
sublistas :: [a] -> [[a]]
sublistas []     = [[]]
sublistas (x:xs) = yss ++ map (x:) yss
    where yss = sublistas xs
```

Funciones combinatoria: Intercalado

- `(intercala x ys)` es la lista de las listas obtenidas intercalando `x` entre los elementos de `ys`. Por ejemplo,

```
intercala 'x' "bc"   ⇝  ["xbc","bxc","bcx"]
intercala 'x' "abc"  ⇝  ["xabc","axbc","abxc","abcx"]
```

```
intercala :: a -> [a] -> [[a]]
intercala x []     = [[x]]
intercala x (y:ys) =
    (x:y:ys) : map (y:) (intercala x ys)
```

Funciones combinatoria: Permutaciones

- `(permutaciones xs)` es la lista de las permutaciones de `xs`. Por ejemplo,

```
*Main> permutaciones "bc"
["bc","cb"]
*Main> permutaciones "abc"
["abc","bac","bca","acb","cab","cba"]
```

```
permutaciones :: [a] -> [[a]]
permutaciones []     = [[]]
permutaciones (x:xs) =
    concat (map (intercala x) (permutaciones xs))
```

Funciones combinatoria: Elecciones

- `(elecciones xs)` es la lista formada por todas las sublistas de `xs` en cualquier orden. Por ejemplo,

```
*Main> elecciones "abc"
["","c","b","bc","cb","a","ac","ca","ab","ba",
 "abc","bac","bca","acb","cab","cba"]
```

```
elecciones :: [a] -> [[a]]
elecciones xs =
    concat (map permutaciones (sublistas xs))
```

Reconocimiento de las soluciones

- `(solucion e ns n)` se verifica si la expresión `e` es una solución para la sucesión `ns` y objetivo `n`; es decir. si los números de `e` es una posible elección de `ns` y el valor de `e` es `n`. Por ejemplo,

```
solucion ejExpr [1,3,7,10,25,50] 765  =>  True
```

```
solucion :: Expr -> [Int] -> Int -> Bool
solucion e ns n =
    elem (numeros e) (elecciones ns) && valor e == [n]
```

13.1.2. Búsqueda de la solución por fuerza bruta

Divisiones de una lista

- `(divisiones xs)` es la lista de las divisiones de `xs` en dos listas no vacías. Por ejemplo,

```
*Main> divisiones "bcd"
[("b","cd"),("bc","d")]
*Main> divisiones "abcd"
[("a","bcd"),("ab","cd"),("abc","d")]
```

```
divisiones :: [a] -> [([a],[a])]
divisiones []     = []
divisiones [_]    = []
divisiones (x:xs) =
    ([x],xs) : [(x:is,ds) | (is,ds) <- divisiones xs]
```

Expresiones construibles

- `(expresiones ns)` es la lista de todas las expresiones construibles a partir de la lista de números `ns`. Por ejemplo,

```
*Main> expresiones [2,3,5]
[2+(3+5),2-(3+5),2*(3+5),2/(3+5),2+(3-5),2-(3-5),
 2*(3-5),2/(3-5),2+(3*5),2-(3*5),2*(3*5),2/(3*5),
 2+(3/5),2-(3/5),2*(3/5),2/(3/5),(2+3)+5,(2+3)-5,
 ...
```

```
expresiones :: [Int] -> [Expr]
expresiones []  = []
expresiones [n] = [Num n]
expresiones ns  = [e | (is,ds) <- divisiones ns
                     , i       <- expresiones is
                     , d       <- expresiones ds
                     , e       <- combina i d]
```

Combinación de expresiones

- `(combina e1 e2)` es la lista de las expresiones obtenidas combinando las expresiones `e1` y `e2` con una operación. Por ejemplo,

```
*Main> combina (Num 2) (Num 3)
[2+3,2-3,2*3,2/3]
```

```
combina :: Expr -> Expr -> [Expr]
combina e1 e2 = [Apl o e1 e2 | o <- ops]
```

Búsqueda de las soluciones

- `(soluciones ns n)` es la lista de las soluciones para la sucesión `ns` y objetivo `n` calculadas por fuerza bruta. Por ejemplo,

```
*Main> soluciones [1,3,7,10,25,50] 765
[3*((7*(50-10))-25), ((7*(50-10))-25)*3, ...
*Main> length (soluciones [1,3,7,10,25,50] 765)
780
*Main> length (soluciones [1,3,7,10,25,50] 831)
0
```

```
soluciones :: [Int] -> Int -> [Expr]
soluciones ns n =  [e | ns' <- elecciones ns
                      , e   <- expresiones ns'
                      , valor e == [n]]
```

Estadísticas de la búsqueda por fuerza bruta

- Estadíticas:

```
*Main> :set +s
*Main> head (soluciones [1,3,7,10,25,50] 765)
3*((7*(50-10))-25)
(8.47 secs, 400306836 bytes)
*Main> length (soluciones [1,3,7,10,25,50] 765)
780
(997.76 secs, 47074239120 bytes)
*Main> length (soluciones [1,3,7,10,25,50] 831)
0
(1019.13 secs, 47074535420 bytes)
*Main> :unset +s
```

13.1.3. Búsqueda combinando generación y evaluación

Resultados

- `Resultado` es el tipo de los pares formados por expresiones válidas y su valor.

```
type Resultado = (Expr,Int)
```

- `(resultados ns)` es la lista de todos los resultados construibles a partir de la lista de números `ns`. Por ejemplo,

```
*Main> resultados [2,3,5]
[(2+(3+5),10), (2*(3+5),16), (2+(3*5),17), (2*(3*5),30), ((2+3)+5,10),
 ((2+3)*5,25), ((2+3)/5,1),  ((2*3)+5,11), ((2*3)-5,1),  ((2*3)*5,30)]
```

```
resultados :: [Int] -> [Resultado]
resultados []  = []
resultados [n] = [(Num n,n) | n > 0]
resultados ns  = [res | (is,ds) <- divisiones ns
                      , ix      <- resultados is
                      , dy      <- resultados ds
                      , res     <- combina' ix dy]
```

Combinación de resultados

- `(combina' r1 r2)` es la lista de los resultados obtenidos combinando los resultados `r1` y `r2` con una operación. Por ejemplo,

```
*Main> combina' (Num 2,2) (Num 3,3)
[(2+3,5),(2*3,6)]
*Main> combina' (Num 3,3) (Num 2,2)
[(3+2,5),(3-2,1),(3*2,6)]
*Main> combina' (Num 2,2) (Num 6,6)
[(2+6,8),(2*6,12)]
*Main> combina' (Num 6,6) (Num 2,2)
[(6+2,8),(6-2,4),(6*2,12),(6/2,3)]
```

```
combina' :: Resultado -> Resultado -> [Resultado]
combina' (i,x) (d,y) =
    [(Apl o i d, aplica o x y) | o <- ops
                               , valida o x y]
```

Búsqueda combinando generación y evaluación

- `(soluciones' ns n)` es la lista de las soluciones para la sucesión `ns` y objetivo `n` calculadas intercalando generación y evaluación. Por ejemplo,

```
*Main> head (soluciones' [1,3,7,10,25,50] 765)
3*((7*(50-10))-25)
*Main> length (soluciones' [1,3,7,10,25,50] 765)
780
*Main> length (soluciones' [1,3,7,10,25,50] 831)
0
```

```
soluciones' :: [Int] -> Int -> [Expr]
soluciones' ns n = [e | ns'   <- elecciones ns
                      , (e,m) <- resultados ns'
                      , m == n]
```

Estadísticas de la búsqueda combinada

- Estadísticas:

```
*Main> head (soluciones' [1,3,7,10,25,50] 765)
3*((7*(50-10))-25)
(0.81 secs, 38804220 bytes)
*Main> length (soluciones' [1,3,7,10,25,50] 765)
780
(60.73 secs, 2932314020 bytes)
*Main> length (soluciones' [1,3,7,10,25,50] 831)
0
(61.68 secs, 2932303088 bytes)
```

13.1.4. Búsqueda mejorada mediante propiedades algebraicas

Aplicaciones válidas

- `(valida' o x y)` se verifica si la operación `o` aplicada a los números naturales `x` e `y` da un número natural, teniendo en cuenta las siguientes reducciones algebraicas

```
x + y = y + x
x * y = y * x
x * 1 = x
1 * y = y
x / 1 = x
```

```
valida' :: Op -> Int -> Int -> Bool
valida' Sum x y = x <= y
valida' Res x y = x > y
valida' Mul x y = x /= 1 && y /= 1 && x <= y
valida' Div x y = y /= 1 && x `mod` y == 0
```

Resultados válidos construibles

- `(resultados' ns)` es la lista de todos los resultados válidos construibles a partir de la lista de números `ns`. Por ejemplo,

```
*Main> resultados' [5,3,2]
[(5-(3-2),4),((5-3)+2,4),((5-3)*2,4),((5-3)/2,1)]
```

```
resultados' :: [Int] -> [Resultado]
resultados' []  = []
resultados' [n] = [(Num n,n) | n > 0]
resultados' ns  = [res | (is,ds) <- divisiones ns
                       , ix      <- resultados' is
                       , dy      <- resultados' ds
                       , res     <- combina'' ix dy]
```

Combinación de resultados válidos

- `(combina'' r1 r2)` es la lista de los resultados válidos obtenidos combinando los resultados `r1` y `r2` con una operación. Por ejemplo,

```
combina'' (Num 2,2) (Num 3,3)  =>  [(2+3,5),(2*3,6)]
combina'' (Num 3,3) (Num 2,2)  =>  [(3-2,1)]
combina'' (Num 2,2) (Num 6,6)  =>  [(2+6,8),(2*6,12)]
combina'' (Num 6,6) (Num 2,2)  =>  [(6-2,4),(6/2,3)]
```

```
combina'' :: Resultado -> Resultado -> [Resultado]
combina'' (i,x) (d,y) =
    [(Apl o i d, aplica o x y) | o <- ops
                               , valida' o x y]
```

Búsqueda mejorada mediante propiedades algebraicas

- `(soluciones'' ns n)` es la lista de las soluciones para la sucesión `ns` y objetivo `n` calculadas intercalando generación y evaluación y usando las mejoras aritméticas. Por ejemplo,

```
*Main> head (soluciones'' [1,3,7,10,25,50] 765)
3*((7*(50-10))-25)
*Main> length (soluciones'' [1,3,7,10,25,50] 765)
49
*Main> length (soluciones'' [1,3,7,10,25,50] 831)
0
```

```
soluciones'' :: [Int] -> Int -> [Expr]
soluciones'' ns n = [e | ns'   <- elecciones ns
                       , (e,m) <- resultados' ns'
                       , m == n]
```

Estadísticas de la búsqueda mejorada

- Estadísticas:

```
*Main> head (soluciones'' [1,3,7,10,25,50] 765)
3*((7*(50-10))-25)
(0.40 secs, 16435156 bytes)
*Main> length (soluciones'' [1,3,7,10,25,50] 765)
49
(10.30 secs, 460253716 bytes)
*Main> length (soluciones'' [1,3,7,10,25,50] 831)
0
(10.26 secs, 460253908 bytes)§
```

Comparación de las búsquedas

Comparación de las búsquedad problema de dados [1,3,7,10,25,50] obtener 765.

- Búsqueda de la primera solución:

```
               +---------------------+
               | segs. | bytes       |
+--------------+-------+-------------+
| soluciones   | 8.47  | 400.306.836 |
| soluciones'  | 0.81  |  38.804.220 |
```

```
| soluciones'' | 0.40  |  16.435.156 |
+--------------+-------+-------------+
```

Comparación de las búsquedas

- Búsqueda de todas las soluciones:

```
               +--------+----------------+
               | segs.  | bytes          |
+--------------+--------+----------------+
| soluciones   | 997.76 | 47.074.239.120 |
| soluciones'  |  60.73 |  2.932.314.020 |
| soluciones'' |  10.30 |    460.253.716 |
+--------------+--------+----------------+
```

Comparación de las búsquedas

Comprobación de que dados [1,3,7,10,25,50] no puede obtenerse 831

```
               +---------+----------------+
               | segs.   | bytes          |
+--------------+---------+----------------+
| soluciones   | 1019.13 | 47.074.535.420 |
| soluciones'  |   61.68 |  2.932.303.088 |
| soluciones'' |   10.26 |    460.253.908 |
+--------------+---------+----------------+
```

13.2. El problema de las reinas

El problema de las N reinas

- Enunciado: Colocar N reinas en un tablero rectangular de dimensiones N por N de forma que no se encuentren más de una en la misma línea: horizontal, vertical o diagonal.
- El problema se representa en el módulo `Reinas`. Importa la diferencia de conjuntos `(\\)` del módulo `List`:

```
module Reinas where
import Data.List ((\\))
```

- El tablero se representa por una lista de números que indican las filas donde se han colocado las reinas. Por ejemplo, `[3,5]` indica que se han colocado las reinas `(1,3)` y `(2,5)`.

```
type Tablero = [Int]
```

- `reinas n` es la lista de soluciones del problema de las N reinas. Por ejemplo, `reinas 4` ⇝ `[[3,1,4,2],[2,4,1,3]]`. La primera solución `[3,1,4,2]` se interpreta como

	R		
			R
R			
		R	

```
reinas :: Int -> [Tablero]
reinas n = aux n
    where aux 0     = [[]]
          aux (m+1) = [r:rs | rs <- aux m,
                              r <- ([1..n] \\ rs),
                              noAtaca r rs 1]
```

- `noAtaca r rs d` se verifica si la reina `r` no ataca a niguna de las de la lista `rs` donde la primera de la lista está a una distancia horizontal `d`.

```
noAtaca :: Int -> Tablero -> Int -> Bool
noAtaca _ [] _ = True
noAtaca r (a:rs) distH = abs(r-a) /= distH &&
                         noAtaca r rs (distH+1)
```

13.3. Números de Hamming

Números de Hamming

- Enunciado: Los números de Hamming forman una sucesión estrictamente creciente de números que cumplen las siguientes condiciones:

  1. El número 1 está en la sucesión.
  2. Si x está en la sucesión, entonces $2x$, $3x$ y $5x$ también están.
  3. Ningún otro número está en la sucesión.

- `hamming` es la sucesión de Hamming. Por ejemplo,

```
take 12 hamming ⇝ [1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,16]
```

```
hamming :: [Int]
hamming = 1 : mezcla3 [2*i | i <- hamming]
                      [3*i | i <- hamming]
                      [5*i | i <- hamming]
```

- `mezcla3 xs ys zs` es la lista obtenida mezclando las listas ordenadas `xs`, `ys` y `zs` y eliminando los elementos duplicados. Por ejemplo,

```
Main> mezcla3 [2,4,6,8,10] [3,6,9,12] [5,10]
[2,3,4,5,6,8,9,10,12]
```

```
mezcla3 :: [Int] -> [Int] -> [Int] -> [Int]
mezcla3 xs ys zs = mezcla2 xs (mezcla2 ys zs)
```

- `mezcla2 xs ys zs` es la lista obtenida mezclando las listas ordenadas `xs` e `ys` y eliminando los elementos duplicados. Por ejemplo,

```
Main> mezcla2 [2,4,6,8,10,12] [3,6,9,12]
[2,3,4,6,8,9,10,12]
```

```
mezcla2 :: [Int] -> [Int] -> [Int]
mezcla2 p@(x:xs) q@(y:ys) | x < y     = x:mezcla2 xs q
                          | x > y     = y:mezcla2 p  ys
                          | otherwise = x:mezcla2 xs ys
mezcla2 []       ys                   = ys
mezcla2 xs       []                   = xs
```

Bibliografía

1. G. Hutton *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2007.
   - Cap. 11: The countdown problem.
2. B.C. Ruiz, F. Gutiérrez, P. Guerrero y J.E. Gallardo. *Razonando con Haskell*. Thompson, 2004.
   - Cap. 13: Puzzles y solitarios.

Apéndice A

Resumen de funciones predefinidas de Haskell

1. `x + y` es la suma de `x` e `y`.
2. `x - y` es la resta de `x` e `y`.
3. `x / y` es el cociente de `x` entre `y`.
4. `x ^ y` es `x` elevado a `y`.
5. `x == y` se verifica si `x` es igual a `y`.
6. `x /= y` se verifica si `x` es distinto de `y`.
7. `x < y` se verifica si `x` es menor que `y`.
8. `x <= y` se verifica si `x` es menor o igual que `y`.
9. `x > y` se verifica si `x` es mayor que `y`.
10. `x >= y` se verifica si `x` es mayor o igual que `y`.
11. `x && y` es la conjunción de `x` e `y`.
12. `x || y` es la disyunción de `x` e `y`.
13. `x:ys` es la lista obtenida añadiendo `x` al principio de `ys`.
14. `xs ++ ys` es la concatenación de `xs` e `ys`.
15. `xs !! n` es el elemento `n`–ésimo de `xs`.
16. `f . g` es la composición de `f` y `g`.
17. `abs x` es el valor absoluto de `x`.
18. `and xs` es la conjunción de la lista de booleanos `xs`.
19. `ceiling x` es el menor entero no menor que `x`.
20. `chr n` es el carácter cuyo código ASCII es `n`.
21. `concat xss` es la concatenación de la lista de listas `xss`.
22. `const x y` es `x`.

23. `curry f` es la versión curryficada de la función `f`.
24. `div x y` es la división entera de `x` entre `y`.
25. `drop n xs` borra los `n` primeros elementos de `xs`.
26. `dropWhile p xs` borra el mayor prefijo de `xs` cuyos elementos satisfacen el predicado `p`.
27. `elem x ys` se verifica si `x` pertenece a `ys`.
28. `even x` se verifica si `x` es par.
29. `filter p xs` es la lista de elementos de la lista `xs` que verifican el predicado `p`.
30. `flip f x y` es `f y x`.
31. `floor x` es el mayor entero no mayor que `x`.
32. `foldl f e xs` pliega `xs` de izquierda a derecha usando el operador f y el valor inicial `e`.
33. `foldr f e xs` pliega `xs` de derecha a izquierda usando el operador f y el valor inicial `e`.
34. `fromIntegral x` transforma el número entero `x` al tipo numérico correspondiente.
35. `fst p` es el primer elemento del par `p`.
36. `gcd x y` es el máximo común divisor de de `x` e `y`.
37. `head xs` es el primer elemento de la lista `xs`.
38. `init xs` es la lista obtenida eliminando el último elemento de `xs`.
39. `isSpace x` se verifica si `x` es un espacio.
40. `isUpper x` se verifica si `x` está en mayúscula.
41. `isLower x` se verifica si `x` está en minúscula.
42. `isAlpha x` se verifica si `x` es un carácter alfabético.
43. `isDigit x` se verifica si `x` es un dígito.
44. `isAlphaNum x` se verifica si `x` es un carácter alfanumérico.
45. `iterate f x` es la lista `[x, f(x), f(f(x)), ...]`.
46. `last xs` es el último elemento de la lista `xs`.
47. `length xs` es el número de elementos de la lista `xs`.
48. `map f xs` es la lista obtenida aplicado `f` a cada elemento de `xs`.
49. `max x y` es el máximo de `x` e `y`.
50. `maximum xs` es el máximo elemento de la lista `xs`.
51. `min x y` es el mínimo de `x` e `y`.
52. `minimum xs` es el mínimo elemento de la lista `xs`.
53. `mod x y` es el resto de `x` entre `y`.
54. `not x` es la negación lógica del booleano `x`.

55. `noElem x ys` se verifica si `x` no pertenece a `ys`.
56. `null xs` se verifica si `xs` es la lista vacía.
57. `odd x` se verifica si `x` es impar.
58. `or xs` es la disyunción de la lista de booleanos `xs`.
59. `ord c` es el código ASCII del carácter `c`.
60. `product xs` es el producto de la lista de números `xs`.
61. `rem x y` es el resto de `x` entre `y`.
62. `repeat x` es la lista infinita `[x, x, x, ...]`.
63. `replicate n x` es la lista formada por `n` veces el elemento `x`.
64. `reverse xs` es la inversa de la lista `xs`.
65. `round x` es el redondeo de `x` al entero más cercano.
66. `scanr f e xs` es la lista de los resultados de plegar `xs` por la derecha con `f` y `e`.
67. `show x` es la represantación de `x` como cadena.
68. `signum x` es 1 si `x` es positivo, 0 si `x` es cero y -1 si `x` es negativo.
69. `snd p` es el segundo elemento del par `p`.
70. `splitAt n xs` es `(take n xs, drop n xs)`.
71. `sqrt x` es la raíz cuadrada de `x`.
72. `sum xs` es la suma de la lista numérica `xs`.
73. `tail xs` es la lista obtenida eliminando el primer elemento de `xs`.
74. `take n xs` es la lista de los `n` primeros elementos de `xs`.
75. `takeWhile p xs` es el mayor prefijo de `xs` cuyos elementos satisfacen el predicado `p`.
76. `uncurry f` es la versión cartesiana de la función `f`.
77. `until p f x` aplica `f` a `x` hasta que se verifique `p`.
78. `zip xs ys` es la lista de pares formado por los correspondientes elementos de `xs` e `ys`.
79. `zipWith f xs ys` se obtiene aplicando `f` a los correspondientes elementos de `xs` e `ys`.

Bibliografía

[1] Richard Bird: Introducción a la programación funcional con Haskell. (Prentice Hall, 2000).

[2] Antony Davie: *An Introduction to Functional Programming Systems Using Haskell*. (Cambridge University Press, 1992).

[3] Paul Hudak: *The Haskell School of Expression: Learning Functional Programming through Multimedia*. (Cambridge University Press, 2000).

[4] Graham Hutton: Programming in Haskell. (Cambridge University Press, 2007).

[5] Bryan O'Sullivan, Don Stewart y John Goerzen: Real World Haskell. (O'Reilly, 2008).

[6] Blas C. Ruiz, Francisco Gutiérrez, Pablo Guerrero y José E. Gallardo: *Razonando con Haskell*. (Thompson, 2004).

[7] Simon Thompson: *Haskell: The Craft of Functional Programming*, Second Edition. (Addison-Wesley, 1999).