

Tema 21: El TAD de los polinomios

Informática (2010–11)

José A. Alonso Jiménez

Grupo de Lógica Computacional
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Sevilla

Tema 21: El TAD de los polinomios

1. Especificación del TAD de los polinomios
 - Signatura del TAD de los polinomios
 - Propiedades del TAD de los polinomios
2. Implementación del TAD de los polinomios
 - Los polinomios como tipo de dato algebraico
 - Los polinomios como listas dispersas
 - Los polinomios como listas densas
3. Comprobación de las implementaciones con QuickCheck
 - Librerías auxiliares
 - Generador de polinomios
 - Especificación de las propiedades de los polinomios
 - Comprobación de las propiedades
4. Operaciones con polinomios
 - Operaciones con polinomios

Tema 21: El TAD de los polinomios

1. Especificación del TAD de los polinomios
 - Signatura del TAD de los polinomios
 - Propiedades del TAD de los polinomios
2. Implementación del TAD de los polinomios
3. Comprobación de las implementaciones con QuickCheck
4. Operaciones con polinomios

Signatura del TAD de los polinomios

Signatura:

```
polCero    :: Polinomio a
esPolCero  :: Num a => Polinomio a -> Bool
consPol    :: Num a => Int -> a -> Polinomio a -> Polinomio a
grado      :: Polinomio a -> Int
coefLider  :: Num a => Polinomio a -> a
restoPol   :: Polinomio a -> Polinomio a
```

Descripción de las operaciones:

- ▶ `polCero` es el polinomio cero.
- ▶ `(esPolCero p)` se verifica si `p` es el polinomio cero.
- ▶ `(consPol n b p)` es el polinomio $bx^n + p$.
- ▶ `(grado p)` es el grado del polinomio `p`.
- ▶ `(coefLider p)` es el coeficiente líder del polinomio `p`.
- ▶ `(restoPol p)` es el resto del polinomio `p`.

Ejemplos de polinomios

Ejemplos de polinomios que se usarán en lo sucesivo.

► Definición:

```

ejPol1, ejPol2, ejPol3, ejTerm:: Polinomio Int
ejPol1 = consPol 4 3 (consPol 2 (-5) (consPol 0 3 polCero))
ejPol2 = consPol 5 1 (consPol 2 5 (consPol 1 4 polCero))
ejPol3 = consPol 4 6 (consPol 1 2 polCero)
ejTerm = consPol 1 4 polCero

```

► Evaluación:

ejPol1	↔	$3x^4 + -5x^2 + 3$
ejPol2	↔	$x^5 + 5x^2 + 4x$
ejPol3	↔	$6x^4 + 2x$
ejTerm	↔	$4x$

Tema 21: El TAD de los polinomios

1. Especificación del TAD de los polinomios
 - Signatura del TAD de los polinomios
 - Propiedades del TAD de los polinomios
2. Implementación del TAD de los polinomios
3. Comprobación de las implementaciones con QuickCheck
4. Operaciones con polinomios

Propiedades del TAD de los polinomios

1. `esPolCero polCero`
2. `n > grado p && b /= 0 ==>`
`not (esPolCero (consPol n b p))`
3. `consPol (grado p) (coefLider p) (restoPol p) == p`
4. `n > grado p && b /= 0 ==>`
`grado (consPol n b p) == n`
5. `n > grado p && b /= 0 ==>`
`coefLider (consPol n b p) == b`
6. `n > grado p && b /= 0 ==>`
`restoPol (consPol n b p) == p`

Tema 21: El TAD de los polinomios

1. Especificación del TAD de los polinomios
2. Implementación del TAD de los polinomios
 - Los polinomios como tipo de dato algebraico
 - Los polinomios como listas dispersas
 - Los polinomios como listas densas
3. Comprobación de las implementaciones con QuickCheck
4. Operaciones con polinomios

Los polinomios como tipo de dato algebraico

Cabecera del módulo:

```
module PolRepTDA
  ( Polinomio,
    polCero,    -- Polinomio a
    esPolCero, -- Num a => Polinomio a -> Bool
    consPol,    -- (Num a) => Int -> a -> Polinomio a
                --                -> Polinomio a
    grado,     -- Polinomio a -> Int
    coefLider, -- Num a => Polinomio a -> a
    restoPol   -- Polinomio a -> Polinomio a
  ) where
```

Los polinomios como tipo de dato algebraico

- ▶ Representamos un polinomio mediante los constructores `ConsPol` y `PolCero`.

- ▶ Por ejemplo, el polinomio

$$6x^4 - 5x^2 + 4x - 7$$

se representa por

```
ConsPol 4 6
  (ConsPol 2 (-5)
    (ConsPol 1 4
      (ConsPol 0 (-7) PolCero)))
```

- ▶ El tipo de los polinomios.

```
data Polinomio a = PolCero
                | ConsPol Int a (Polinomio a)
                deriving Eq
```

Los polinomios como tipo de dato algebraico

Procedimiento de escritura de los polinomios.

```
instance Num a => Show (Polinomio a) where
  show PolCero           = "0"
  show (ConsPol 0 b PolCero) = show b
  show (ConsPol 0 b p)     = concat [show b, " + ", show p]
  show (ConsPol 1 b PolCero) = concat [show b, "*x"]
  show (ConsPol 1 b p)     = concat [show b, "*x + ", show p]
  show (ConsPol n 1 PolCero) = concat ["x^", show n]
  show (ConsPol n b PolCero) = concat [show b, "*x^", show n]
  show (ConsPol n 1 p)     = concat ["x^", show n, " + ", show p]
  show (ConsPol n b p)     = concat [show b, "*x^", show n, " + ", show p]
```

Los polinomios como tipo de dato algebraico

- `polCero` es el polinomio cero. Por ejemplo,

```
ghci> polCero
0
```

```
polCero :: Polinomio a
polCero = PolCero
```

- `(esPolCero p)` se verifica si `p` es el polinomio cero. Por ejemplo,

```
esPolCero polCero  ~>  True
esPolCero ejPol1   ~>  False
```

```
esPolCero :: Polinomio a -> Bool
esPolCero PolCero = True
esPolCero _       = False
```

Los polinomios como tipo de dato algebraico

- `(consPol n b p)` es el polinomio $bx^n + p$. Por ejemplo,

<code>ejPol2</code>	\rightsquigarrow	$x^5 + 5x^2 + 4x$
<code>consPol 3 0 ejPol2</code>	\rightsquigarrow	$x^5 + 5x^2 + 4x$
<code>consPol 3 2 polCero</code>	\rightsquigarrow	$2x^3$
<code>consPol 6 7 ejPol2</code>	\rightsquigarrow	$7x^6 + x^5 + 5x^2 + 4x$
<code>consPol 4 7 ejPol2</code>	\rightsquigarrow	$x^5 + 7x^4 + 5x^2 + 4x$
<code>consPol 5 7 ejPol2</code>	\rightsquigarrow	$8x^5 + 5x^2 + 4x$

```

consPol :: Num a => Int -> a -> Polinomio a -> Polinomio a
consPol _ 0 p = p
consPol n b PolCero = ConsPol n b PolCero
consPol n b (ConsPol m c p)
  | n > m      = ConsPol n b (ConsPol m c p)
  | n < m      = ConsPol m c (consPol n b p)
  | b+c == 0   = p
  | otherwise  = ConsPol n (b+c) p

```

Los polinomios como tipo de dato algebraico

- ▶ (`grado p`) es el grado del polinomio `p`. Por ejemplo,

```
ejPol3      ~> 6*x^4 + 2*x
grado ejPol3 ~> 4
```

```
grado :: Polinomio a -> Int
grado PolCero          = 0
grado (ConsPol n _ _) = n
```

- ▶ (`coefLider p`) es el coeficiente líder del polinomio `p`. Por ejemplo,

```
coefLider ejPol3 ~> 6
```

```
coefLider :: Num t => Polinomio t -> t
coefLider PolCero          = 0
coefLider (ConsPol _ b _) = b
```

Los polinomios como tipo de dato algebraico

- `(restoPol p)` es el resto del polinomio `p`. Por ejemplo,

<code>ejPol3</code>	\rightsquigarrow	$6*x^4 + 2*x$
<code>restoPol ejPol3</code>	\rightsquigarrow	$2*x$
<code>ejPol2</code>	\rightsquigarrow	$x^5 + 5*x^2 + 4*x$
<code>restoPol ejPol2</code>	\rightsquigarrow	$5*x^2 + 4*x$

```

restoPol :: Polinomio t -> Polinomio t
restoPol PolCero          = PolCero
restoPol (ConsPol _ _ p) = p

```

Tema 21: El TAD de los polinomios

1. Especificación del TAD de los polinomios
2. **Implementación del TAD de los polinomios**
 - Los polinomios como tipo de dato algebraico
 - Los polinomios como listas dispersas**
 - Los polinomios como listas densas
3. Comprobación de las implementaciones con QuickCheck
4. Operaciones con polinomios

Los polinomios como listas dispersas

Cabecera del módulo

```
module PolRepDispersa
  ( Polinomio,
    polCero,    -- Polinomio a
    esPolCero,  -- Num a => Polinomio a -> Bool
    consPol,    -- (Num a) => Int -> a -> Polinomio a
                --                -> Polinomio a
    grado,      -- Polinomio a -> Int
    coefLider,  -- Num a => Polinomio a -> a
    restoPol    -- Polinomio a -> Polinomio a
  ) where
```

Los polinomios como tipo listas dispersas

- ▶ Representaremos un polinomio por la lista de sus coeficientes ordenados en orden decreciente según el grado.

- ▶ Por ejemplo, el polinomio

$$| 6x^4 - 5x^2 + 4x - 7$$

se representa por la lista

$$| [6, 0, -2, 4, -7]$$

- ▶ Los polinomios como listas dispersas.

```
data Polinomio a = Pol [a]
                    deriving Eq
```

Los polinomios como listas dispersas

Procedimiento de escritura de los polinomios.

```
instance Num t => Show (Polinomio t) where
  show pol
    | esPolCero pol           = "0"
    | n == 0 && esPolCero p = show a
    | n == 0                 = concat [show a, " + ", show p]
    | n == 1 && esPolCero p = concat [show a, "*x"]
    | n == 1                 = concat [show a, "*x + ", show p]
    | a == 1 && esPolCero p = concat ["x^", show n]
    | esPolCero p           = concat [show a, "*x^", show n]
    | a == 1                 = concat ["x^", show n, " + ", show p]
    | otherwise             = concat [show a, "*x^", show n, " + ", show p]
  where n = grado pol
        a = coefLider pol
        p = restoPol pol
```

Los polinomios como tipo listas dispersas

- ▶ `polCero` es el polinomio cero. Por ejemplo,

```
ghci> polCero  
0
```

```
polCero :: Polinomio a  
polCero = Pol []
```

- ▶ `(esPolCero p)` se verifica si `p` es el polinomio cero. Por ejemplo,

```
esPolCero polCero  ~>  True  
esPolCero ejPol1   ~>  False
```

```
esPolCero :: Polinomio a -> Bool  
esPolCero (Pol []) = True  
esPolCero _         = False
```

Los polinomios como tipo listas dispersas

- `(consPol n b p)` es el polinomio $bx^n + p$. Por ejemplo,

```

ejPol2           ~> x^5 + 5*x^2 + 4*x
consPol 3 0 ejPol2 ~> x^5 + 5*x^2 + 4*x
consPol 3 2 polCero ~> 2*x^3
consPol 6 7 ejPol2 ~> 7*x^6 + x^5 + 5*x^2 + 4*x
consPol 4 7 ejPol2 ~> x^5 + 7*x^4 + 5*x^2 + 4*x
consPol 5 7 ejPol2 ~> 8*x^5 + 5*x^2 + 4*x

```

```
consPol :: Num a => Int -> a -> Polinomio a -> Polinomio a
```

```
consPol _ 0 p = p
```

```
consPol n b p@(Pol xs)
```

```
  | esPolCero p = Pol (b:replicate n 0)
```

```
  | n > m      = Pol (b:(replicate (n-m-1) 0)+xs)
```

```
  | n < m      = consPol m c (consPol n b (restoPol p))
```

```
  | b+c == 0   = Pol (dropWhile (==0) (tail xs))
```

```
  | otherwise  = Pol ((b+c):tail xs)
```

```
where
```

```
  c = coefLider p
```

```
  m = grado p
```

Los polinomios como tipo listas dispersas

- ▶ `(grado p)` es el grado del polinomio `p`. Por ejemplo,

```
ejPol3      ~> 6*x^4 + 2*x
grado ejPol3 ~> 4
```

```
grado :: Polinomio a -> Int
grado (Pol []) = 0
grado (Pol xs) = length xs - 1
```

- ▶ `(coefLider p)` es el coeficiente líder del polinomio `p`. Por ejemplo,

```
coefLider ejPol3 ~> 6
```

```
coefLider :: Num t => Polinomio t -> t
coefLider (Pol []) = 0
coefLider (Pol (a:_)) = a
```

Los polinomios como tipo listas dispersas

- `(restoPol p)` es el resto del polinomio `p`. Por ejemplo,

<code>ejPol3</code>	\rightsquigarrow	$6*x^4 + 2*x$
<code>restoPol ejPol3</code>	\rightsquigarrow	$2*x$
<code>ejPol2</code>	\rightsquigarrow	$x^5 + 5*x^2 + 4*x$
<code>restoPol ejPol2</code>	\rightsquigarrow	$5*x^2 + 4*x$

```

restoPol :: Num t => Polinomio t -> Polinomio t
restoPol (Pol [])      = polCero
restoPol (Pol [_])    = polCero
restoPol (Pol (_:b:as))
  | b == 0      = Pol (dropWhile (==0) as)
  | otherwise = Pol (b:as)

```

Tema 21: El TAD de los polinomios

1. Especificación del TAD de los polinomios
2. **Implementación del TAD de los polinomios**
 - Los polinomios como tipo de dato algebraico
 - Los polinomios como listas dispersas
 - Los polinomios como listas densas**
3. Comprobación de las implementaciones con QuickCheck
4. Operaciones con polinomios

Los polinomios como tipo listas densas

Cabecera del módulo.

```
module PolRepDensa
  ( Polinomio,
    polCero,    -- Polinomio a
    esPolCero, -- Num a => Polinomio a -> Bool
    consPol,    -- Num a => Int -> a -> Polinomio a
                --                -> Polinomio a
    grado,     -- Polinomio a -> Int
    coefLider, -- Num a => Polinomio a -> a
    restoPol   -- Polinomio a -> Polinomio a
  ) where
```

Los polinomios como tipo listas densas

- ▶ Representaremos un polinomio mediante una lista de pares (grado,coef), ordenados en orden decreciente según el grado. Por ejemplo, el polinomio

$$| 6x^4 - 5x^2 + 4x - 7$$

se representa por la lista de pares

$$| [(4, 6), (2, -5), (1, 4), (0, -7)].$$

- ▶ Los polinomios como listas densas.

```
data Polinomio a = Pol [(Int,a)]  
                  deriving Eq
```

Los polinomios como tipo listas densas

Procedimiento de escritura de polinomios

```
instance Num t => Show (Polinomio t) where
  show pol
    | esPolCero pol           = "0"
    | n == 0 && esPolCero p   = show a
    | n == 0                  = concat [show a, " + ", show p]
    | n == 1 && esPolCero p   = concat [show a, "*x"]
    | n == 1                  = concat [show a, "*x + ", show p]
    | a == 1 && esPolCero p   = concat ["x^", show n]
    | esPolCero p             = concat [show a, "*x^", show n]
    | a == 1                  = concat ["x^", show n, " + ", show p]
    | otherwise               = concat [show a, "*x^", show n, " + ", show p]
  where n = grado pol
        a = coefLider pol
        p = restoPol pol
```

Los polinomios como tipo listas densas

- ▶ `polCero` es el polinomio cero. Por ejemplo,

```
ghci> polCero
0
```

```
polCero :: Num a => Polinomio a
polCero = Pol []
```

- ▶ `(esPolCero p)` se verifica si `p` es el polinomio cero. Por ejemplo,

```
esPolCero polCero  ~>  True
esPolCero ejPol1   ~>  False
```

```
esPolCero :: Num a => Polinomio a -> Bool
esPolCero (Pol []) = True
esPolCero _       = False
```

Los polinomios como tipo listas densas

- `(consPol n b p)` es el polinomio $bx^n + p$. Por ejemplo,

```

ejPol2           ~> x^5 + 5*x^2 + 4*x
consPol 3 0 ejPol2 ~> x^5 + 5*x^2 + 4*x
consPol 3 2 polCero ~> 2*x^3
consPol 6 7 ejPol2 ~> 7*x^6 + x^5 + 5*x^2 + 4*x
consPol 4 7 ejPol2 ~> x^5 + 7*x^4 + 5*x^2 + 4*x
consPol 5 7 ejPol2 ~> 8*x^5 + 5*x^2 + 4*x

```

```
consPol :: Num a => Int -> a -> Polinomio a -> Polinomio a
```

```
consPol _ 0 p = p
```

```
consPol n b p@(Pol xs)
```

```
  | esPolCero p = Pol [(n,b)]
```

```
  | n > m      = Pol ((n,b):xs)
```

```
  | n < m      = consPol m c (consPol n b (Pol (tail xs)))
```

```
  | b+c == 0   = Pol (tail xs)
```

```
  | otherwise  = Pol ((n,b+c):(tail xs))
```

```
where
```

```
  c = coefLider p
```

```
  m = grado p
```

Los polinomios como tipo listas densas

- ▶ **(grado p)** es el grado del polinomio p. Por ejemplo,

```
ejPol3      ~> 6*x^4 + 2*x
grado ejPol3 ~> 4
```

```
grado :: Polinomio a -> Int
grado (Pol [])          = 0
grado (Pol ((n,_):_)) = n
```

- ▶ **(coefLider p)** es el coeficiente líder del polinomio p. Por ejemplo,

```
coefLider ejPol3 ~> 6
```

```
coefLider :: Num t => Polinomio t -> t
coefLider (Pol [])          = 0
coefLider (Pol ((_,b):_)) = b
```

Los polinomios como tipo listas densas

- ▶ `(restoPol p)` es el resto del polinomio `p`. Por ejemplo,

<code>ejPol3</code>	\rightsquigarrow	$6*x^4 + 2*x$
<code>restoPol ejPol3</code>	\rightsquigarrow	$2*x$
<code>ejPol2</code>	\rightsquigarrow	$x^5 + 5*x^2 + 4*x$
<code>restoPol ejPol2</code>	\rightsquigarrow	$5*x^2 + 4*x$

```

restoPol :: Num t => Polinomio t -> Polinomio t
restoPol (Pol [])      = polCero
restoPol (Pol [_])    = polCero
restoPol (Pol (_:xs)) = Pol xs

```

Tema 21: El TAD de los polinomios

1. Especificación del TAD de los polinomios
2. Implementación del TAD de los polinomios
3. Comprobación de las implementaciones con QuickCheck
 - Librerías auxiliares
 - Generador de polinomios
 - Especificación de las propiedades de los polinomios
 - Comprobación de las propiedades
4. Operaciones con polinomios

Comprobación de las propiedades del TAD de los polinomios

- ▶ Importación de la implementación a verificar.

```
import PolRepTDA
-- import PolRepDispersa
-- import PolRepDensa
```

- ▶ Librerías auxiliares.

```
import Test.QuickCheck
import Test.Framework
import Test.Framework.Providers.QuickCheck2
```

Tema 21: El TAD de los polinomios

1. Especificación del TAD de los polinomios
2. Implementación del TAD de los polinomios
3. Comprobación de las implementaciones con QuickCheck
 - Librerías auxiliares
 - Generador de polinomios**
 - Especificación de las propiedades de los polinomios
 - Comprobación de las propiedades
4. Operaciones con polinomios

Generador de polinomios

- `(genPol n)` es un generador de polinomios. Por ejemplo,

```
ghci> sample (genPol 1)
7*x^9 + 9*x^8 + 10*x^7 + -14*x^5 + -15*x^2 + -10
-4*x^8 + 2*x
```

```
genPol :: Int -> Gen (Polinomio Int)
```

```
genPol 0 = return polCero
```

```
genPol n = do n <- choose (0,10)
              b <- choose (-10,10)
              p <- genPol (div n 2)
              return (consPol n b p)
```

```
instance Arbitrary (Polinomio Int) where
  arbitrary = sized genPol
```

Tema 21: El TAD de los polinomios

1. Especificación del TAD de los polinomios
2. Implementación del TAD de los polinomios
3. Comprobación de las implementaciones con QuickCheck
 - Librerías auxiliares
 - Generador de polinomios
 - Especificación de las propiedades de los polinomios
 - Comprobación de las propiedades
4. Operaciones con polinomios

Especificación de las propiedades de los polinomios

- ▶ `polCero` es el polinomio cero.

```
prop_polCero_es_cero :: Bool
prop_polCero_es_cero =
    esPolCero polCero
```

- ▶ Si `n` es mayor que el grado de `p` y `b` no es cero, entonces `(consPol n b p)` es un polinomio distinto del cero.

```
prop_consPol_no_cero :: Int -> Int -> Polinomio Int
                    -> Property
prop_consPol_no_cero n b p =
    n > grado p && b /= 0 ==>
    not (esPolCero (consPol n b p))
```

Especificación de las propiedades de los polinomios

- `(consPol (grado p) (coefLider p) (restoPol p))` es igual a `p`.

```
prop_consPol :: Polinomio Int -> Bool
prop_consPol p =
    consPol (grado p) (coefLider p) (restoPol p) == p
```

- Si `n` es mayor que el grado de `p` y `b` no es cero, entonces el grado de `(consPol n b p)` es `n`.

```
prop_grado :: Int -> Int -> Polinomio Int -> Property
prop_grado n b p =
    n > grado p && b /= 0 ==>
        grado (consPol n b p) == n
```

Especificación de las propiedades de los polinomios

- ▶ Si n es mayor que el grado de p y b no es cero, entonces el coeficiente líder de $(\text{consPol } n \ b \ p)$ es b .

```
prop_coefLider :: Int -> Int -> Polinomio Int -> Property
prop_coefLider n b p =
  n > grado p && b /= 0 ==>
    coefLider (consPol n b p) == b
```

- ▶ Si n es mayor que el grado de p y b no es cero, entonces el resto de $(\text{consPol } n \ b \ p)$ es p .

```
prop_restoPol :: Int -> Int -> Polinomio Int -> Property
prop_restoPol n b p =
  n > grado p && b /= 0 ==>
    restoPol (consPol n b p) == p
```

Tema 21: El TAD de los polinomios

1. Especificación del TAD de los polinomios
2. Implementación del TAD de los polinomios
3. Comprobación de las implementaciones con QuickCheck
 - Librerías auxiliares
 - Generador de polinomios
 - Especificación de las propiedades de los polinomios
 - Comprobación de las propiedades
4. Operaciones con polinomios

Procedimiento de comprobación

- ▶ `compruebaPropiedades` comprueba todas las propiedades con la plataforma de verificación. Por ejemplo,

```
compruebaPropiedades =  
  defaultMain  
    [testGroup "Propiedades del TAD polinomio:"  
      [testProperty "P1" prop_polCero_es_cero,  
        testProperty "P2" prop_consPol_no_cero,  
        testProperty "P3" prop_consPol,  
        testProperty "P4" prop_grado,  
        testProperty "P5" prop_coefLider,  
        testProperty "P6" prop_restoPol]]
```

Comprobación de las propiedades de los polinomios

```
ghci> compruebaPropiedades
Propiedades del TAD polinomio::
  P1: [OK, passed 100 tests]
  P2: [OK, passed 100 tests]
  P3: [OK, passed 100 tests]
  P4: [OK, passed 100 tests]
  P5: [OK, passed 100 tests]
  P6: [OK, passed 100 tests]
```

	Properties	Total
Passed	6	6
Failed	0	0
Total	6	6

Tema 21: El TAD de los polinomios

1. Especificación del TAD de los polinomios
2. Implementación del TAD de los polinomios
3. Comprobación de las implementaciones con QuickCheck
4. Operaciones con polinomios
Operaciones con polinomios

Operaciones con polinomios

- ▶ Importación de la implementación a utilizar.

```
import PolRepTDA
-- import PolRepDispersa
-- import PolRepDensa
```

- ▶ Importación de librerías auxiliares.

```
import Test.QuickCheck
import Test.Framework
import Test.Framework.Providers.QuickCheck2
```

Funciones sobre términos

- `(creaTermino n a)` es el término ax^n . Por ejemplo,

```
| creaTermino 2 5  ~>  5*x^2
```

```
creaTermino :: Num t => Int -> t -> Polinomio t
```

```
creaTermino n a = consPol n a polCero
```

- `(termLider p)` es el término líder del polinomio `p`. Por ejemplo,

```
| ejPol12           ~>  x^5 + 5*x^2 + 4*x
```

```
| termLider ejPol12 ~>  x^5
```

```
termLider :: Num t => Polinomio t -> Polinomio t
```

```
termLider p = creaTermino (grado p) (coefLider p)
```

Suma de polinomios

- `(sumaPol p q)` es la suma de los polinomios `p` y `q`. Por ejemplo,

<code>ejPol1</code>	\rightsquigarrow	$3x^4 + -5x^2 + 3$
<code>ejPol2</code>	\rightsquigarrow	$x^5 + 5x^2 + 4x$
<code>sumaPol ejPol1 ejPol2</code>	\rightsquigarrow	$x^5 + 3x^4 + 4x + 3$

```
sumaPol :: Num a => Polinomio a -> Polinomio a -> Polinomio a
```

```
sumaPol p q
```

```
  | esPolCero p = q
```

```
  | esPolCero q = p
```

```
  | n1 > n2      = consPol n1 a1 (sumaPol r1 q)
```

```
  | n1 < n2      = consPol n2 a2 (sumaPol p r2)
```

```
  | a1+a2 /= 0    = consPol n1 (a1+a2) (sumaPol r1 r2)
```

```
  | otherwise     = sumaPol r1 r2
```

```
  where n1 = grado p
```

```
        a1 = coefLider p
```

```
        r1 = restoPol p
```

```
        n2 = grado q
```

```
        a2 = coefLider q
```

```
        r2 = restoPol q
```

Propiedades de la suma de polinomios

- ▶ El polinomio cero es el elemento neutro de la suma.

```
prop_neutroSumaPol :: Polinomio Int -> Bool
prop_neutroSumaPol p =
    sumaPol polCero p == p
```

- ▶ La suma es conmutativa.

```
prop_conmutativaSuma :: Polinomio Int -> Polinomio Int
                        -> Bool
prop_conmutativaSuma p q =
    sumaPol p q == sumaPol q p
```

Producto de polinomios

- `(multPorTerm t p)` es el producto del término `t` por el polinomio `p`. Por ejemplo,

<code>ejTerm</code>	\rightsquigarrow	<code>4*x</code>
<code>ejPol2</code>	\rightsquigarrow	<code>x^5 + 5*x^2 + 4*x</code>
<code>multPorTerm ejTerm ejPol2</code>	\rightsquigarrow	<code>4*x^6 + 20*x^3 + 16*x^2</code>

```
multPorTerm :: Num t => Polinomio t -> Polinomio t -> Polinomio t
```

```
multPorTerm term pol
```

```
  | esPolCero pol = polCero
```

```
  | otherwise     = consPol (n+m) (a*b) (multPorTerm term r)
```

```
  where n = grado term
```

```
        a = coefLider term
```

```
        m = grado pol
```

```
        b = coefLider pol
```

```
        r = restoPol pol
```

Producto de polinomios

- `(multPol p q)` es el producto de los polinomios `p` y `q`. Por ejemplo,

```
ghci> ejPol1
3*x^4 + -5*x^2 + 3
ghci> ejPol2
x^5 + 5*x^2 + 4*x
ghci> multPol ejPol1 ejPol2
3*x^9 + -5*x^7 + 15*x^6 + 15*x^5 + -25*x^4 + -20*x^3
      + 15*x^2 + 12*x
```

```
multPol :: Num a => Polinomio a -> Polinomio a -> Polinomio a
multPol p q
  | esPolCero p = polCero
  | otherwise   = sumaPol (multPorTerm (termLider p) q)
                        (multPol (restoPol p) q)
```

Propiedades del producto polinomios

- ▶ El producto de polinomios es conmutativo.

```
prop_conmutativaProducto :: Polinomio Int
                           -> Polinomio Int -> Bool
prop_conmutativaProducto p q =
    multPol p q == multPol q p
```

- ▶ El producto es distributivo respecto de la suma.

```
prop_distributiva :: Polinomio Int -> Polinomio Int
                  -> Polinomio Int -> Bool
prop_distributiva p q r =
    multPol p (sumaPol q r) ==
    sumaPol (multPol p q) (multPol p r)
```

Polinomio unidad

- ▶ `polUnidad` es el polinomio unidad. Por ejemplo,

```
| ghci> polUnidad  
| 1
```

```
polUnidad :: Num t => Polinomio t  
polUnidad = consPol 0 1 polCero
```

- ▶ El polinomio unidad es el elemento neutro del producto.

```
prop_polUnidad :: Polinomio Int -> Bool  
prop_polUnidad p =  
  multPol p polUnidad == p
```

Valor de un polinomio en un punto

- **(valor p c)** es el valor del polinomio p al sustituir su variable por c. Por ejemplo,

```
ejPol1           ~> 3*x^4 + -5*x^2 + 3
valor ejPol1 0   ~> 3
valor ejPol1 1   ~> 1
valor ejPol1 (-2) ~> 31
```

```
valor :: Num a => Polinomio a -> a -> a
```

```
valor p c
```

```
  | esPolCero p = 0
```

```
  | otherwise   = b*c^n + valor r c
```

```
  where n = grado p
```

```
        b = coefLider p
```

```
        r = restoPol p
```

Verificación de raíces de polinomios

- ▶ `(esRaiz c p)` se verifica si `c` es una raíz del polinomio `p`. por ejemplo,

```
ejPol3           ~> 6*x^4 + 2*x  
esRaiz 1 ejPol3 ~> False  
esRaiz 0 ejPol3 ~> True
```

```
esRaiz:: Num a => a -> Polinomio a -> Bool
```

```
esRaiz c p = valor p c == 0
```

Derivación de polinomios

- `(derivada p)` es la derivada del polinomio `p`. Por ejemplo,

ejPol2	\rightsquigarrow	$x^5 + 5x^2 + 4x$
derivada ejPol2	\rightsquigarrow	$5x^4 + 10x + 4$

```
derivada :: Polinomio Int -> Polinomio Int
```

```
derivada p
```

```
  | n == 0      = polCero
```

```
  | otherwise = consPol (n-1) (n*b) (derivada r)
```

```
  where n = grado p
```

```
        b = coefLider p
```

```
        r = restoPol p
```

Propiedades de las derivadas de polinomios

- ▶ La derivada de la suma es la suma de las derivadas.

```
prop_derivada :: Polinomio Int -> Polinomio Int -> Bool
prop_derivada p q =
    derivada (sumaPol p q) ==
    sumaPol (derivada p) (derivada q)
```
