

# Tema 9: Declaraciones de tipos y clases

## Informática (2016–17)

José A. Alonso Jiménez

Grupo de Lógica Computacional  
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.  
Universidad de Sevilla

## Tema 9: Declaraciones de tipos y clases

1. Declaraciones de tipos
2. Definiciones de tipos de datos
3. Definición de tipos recursivos
4. Sistema de decisión de tautologías
5. Máquina abstracta de cálculo aritmético
6. Declaraciones de clases y de instancias

## Declaraciones de tipos como sinónimos

- ▶ Se puede definir un nuevo nombre para un tipo existente mediante una **declaración de tipo**.
- ▶ Ejemplo: Las cadenas son listas de caracteres.

```
_____ Prelude _____  
type String = [Char]
```

- ▶ El nombre del tipo tiene que empezar por mayúscula.

## Declaraciones de tipos nuevos

- ▶ Las declaraciones de tipos pueden usarse para facilitar la lectura de tipos. Por ejemplo,
  - ▶ Las posiciones son pares de enteros.

---

```
type Pos = (Int,Int)
```

---

- ▶ `origen` es la posición (0,0).

---

```
origen :: Pos  
origen = (0,0)
```

---

- ▶ `(izquierda p)` es la posición a la izquierda de la posición `p`. Por ejemplo,

```
| izquierda (3,5)  ~>  (2,5)
```

---

```
izquierda :: Pos -> Pos  
izquierda (x,y) = (x-1,y)
```

---

## Declaraciones de tipos parametrizadas

- ▶ Las declaraciones de tipos pueden tener parámetros. Por ejemplo,
  - ▶ `Par a` es el tipo de pares de elementos de tipo `a`

---

```
type Par a = (a,a)
```

---

- ▶ `(multiplica p)` es el producto del par de enteros `p`. Por ejemplo,  
`| multiplica (2,5) ~> 10`

---

```
multiplica :: Par Int -> Int  
multiplica (x,y) = x*y
```

---

- ▶ `(copia x)` es el par formado con dos copias de `x`. Por ejemplo,  
`| copia 5 ~> (5,5)`

---

```
copia :: a -> Par a  
copia x = (x,x)
```

---

## Declaraciones anidadas de tipos

- ▶ Las declaraciones de tipos pueden anidarse. Por ejemplo,
  - ▶ Las posiciones son pares de enteros.

---

```
type Pos = (Int,Int)
```

---

- ▶ Los movimientos son funciones que va de una posición a otra.

---

```
type Movimiento = Pos -> Pos
```

---

- ▶ Las declaraciones de tipo no pueden ser recursivas. Por ejemplo, el siguiente código es erróneo.

---

```
type Arbol = (Int, [Arbol])
```

---

Al intentar cargarlo da el mensaje de error

```
| Cycle in type synonym declarations
```

## Definición de tipos con data

- ▶ En Haskell pueden definirse nuevos tipos mediante `data`.
- ▶ El tipo de los booleanos está formado por dos valores para representar lo falso y lo verdadero.

```
_____ Prelude _____  
data Bool = False | True
```

---

- ▶ El símbolo `|` se lee como “o”.
- ▶ Los valores `False` y `True` se llaman los **constructores** del tipo `Bool`.
- ▶ Los nombres de los constructores tienen que empezar por mayúscula.

## Uso de los valores de los tipos definidos

- ▶ Los valores de los tipos definidos pueden usarse como los de los predefinidos.
- ▶ Definición del tipo de movimientos:

---

```
data Mov = Izquierda | Derecha | Arriba | Abajo
```

---

- ▶ Uso como argumento: `(movimiento m p)` es la posición obtenida aplicando el movimiento `m` a la posición `p`. Por ejemplo,  
`| movimiento Arriba (2,5) ~> (2,6)`

---

```
movimiento :: Mov -> Pos -> Pos
movimiento Izquierda (x,y) = (x-1,y)
movimiento Derecha   (x,y) = (x+1,y)
movimiento Arriba    (x,y) = (x,y+1)
movimiento Abajo     (x,y) = (x,y-1)
```

---



## Uso de los valores de los tipos definidos

- Uso en listas: (`movimientos ms p`) es la posición obtenida aplicando la lista de movimientos `ms` a la posición `p`. Por ejemplo,
   
| `movimientos [Arriba, Izquierda] (2,5)  $\rightsquigarrow$  (1,6)`

---

```

movimientos :: [Mov] -> Pos -> Pos
movimientos []      p = p
movimientos (m:ms) p = movimientos ms (movimiento m p)

```

---

- Uso como valor: (`opuesto m`) es el movimiento opuesto de `m`.
   
| `movimiento (opuesto Arriba) (2,5)  $\rightsquigarrow$  (2,4)`

---

```

opuesto :: Mov -> Mov
opuesto Izquierda = Derecha
opuesto Derecha   = Izquierda
opuesto Arriba    = Abajo
opuesto Abajo     = Arriba

```

## Uso de los valores de los tipos definidos

- Uso en listas: (`movimientos ms p`) es la posición obtenida aplicando la lista de movimientos `ms` a la posición `p`. Por ejemplo,
   
| `movimientos [Arriba, Izquierda] (2,5)  $\rightsquigarrow$  (1,6)`

---

```

movimientos :: [Mov] -> Pos -> Pos
movimientos []      p = p
movimientos (m:ms) p = movimientos ms (movimiento m p)

```

---

- Uso como valor: (`opuesto m`) es el movimiento opuesto de `m`.
   
| `movimiento (opuesto Arriba) (2,5)  $\rightsquigarrow$  (2,4)`

---

```

opuesto :: Mov -> Mov
opuesto Izquierda = Derecha
opuesto Derecha   = Izquierda
opuesto Arriba    = Abajo
opuesto Abajo     = Arriba

```

## Uso de los valores de los tipos definidos

- Uso en listas: (`movimientos ms p`) es la posición obtenida aplicando la lista de movimientos `ms` a la posición `p`. Por ejemplo,
   
`| movimientos [Arriba, Izquierda] (2,5) ~> (1,6)`

---

```

movimientos :: [Mov] -> Pos -> Pos
movimientos []      p = p
movimientos (m:ms) p = movimientos ms (movimiento m p)

```

---

- Uso como valor: (`opuesto m`) es el movimiento opuesto de `m`.
   
`| movimiento (opuesto Arriba) (2,5) ~> (2,4)`

---

```

opuesto :: Mov -> Mov
opuesto Izquierda = Derecha
opuesto Derecha   = Izquierda
opuesto Arriba    = Abajo
opuesto Abajo     = Arriba

```

## Definición de tipo con constructores con parámetros

- ▶ Los constructores en las definiciones de tipos pueden tener parámetros.
- ▶ Ejemplo de definición

---

```
data Figura = Circulo Float | Rect Float Float
```

---

- ▶ Tipos de los constructores:

```
*Main> :type Circulo
Circulo :: Float -> Figura
*Main> :type Rect
Rect :: Float -> Float -> Figura
```

- ▶ Uso del tipo como valor: `(cuadrado n)` es el cuadrado de lado n.

---

```
cuadrado :: Float -> Figura
cuadrado n = Rect n n
```

---

## Definición de tipo con constructores con parámetros

- Uso del tipo como argumento: `(area f)` es el área de la figura `f`. Por ejemplo,

```
area (Circulo 1)    ~> 3.1415927
area (Circulo 2)    ~> 12.566371
area (Rect 2 5)     ~> 10.0
area (cuadrado 3)   ~> 9.0
```

---

```
area :: Figura -> Float
area (Circulo r) = pi*r^2
area (Rect x y)  = x*y
```

---

## Definición de tipos con parámetros

- ▶ Los tipos definidos pueden tener parámetros.
- ▶ Ejemplo de tipo con parámetro

---

```
Prelude
data Maybe a = Nothing | Just a
```

---

- ▶ (`divisionSegura m n`) es la división de `m` entre `n` si `n` no es cero y nada en caso contrario. Por ejemplo,

```
divisionSegura 6 3  ~>  Just 2
divisionSegura 6 0  ~>  Nothing
```

---

```
divisionSegura :: Int -> Int -> Maybe Int
divisionSegura _ 0 = Nothing
divisionSegura m n = Just (m `div` n)
```

---

## Definición de tipos con parámetros

- ▶ `(headSegura xs)` es la cabeza de `xs` si `xs` es no vacía y nada en caso contrario. Por ejemplo,

```
headSegura [2,3,5]  ~>  Just 2  
headSegura []      ~>  Nothing
```

---

```
headSegura :: [a] -> Maybe a  
headSegura [] = Nothing  
headSegura xs = Just (head xs)
```

---

## Definición de tipos recursivos: Los naturales

- ▶ Los tipos definidos con data pueden ser recursivos.
- ▶ Los naturales se construyen con el cero y la función sucesor.

---

```
data Nat = Cero | Suc Nat
        deriving Show
```

---

- ▶ Tipos de los constructores:

```
*Main> :type Cero
Cero :: Nat
*Main> :type Suc
Suc  :: Nat -> Nat
```

- ▶ Ejemplos de naturales:

```
Cero
Suc Cero
Suc (Suc Cero)
Suc (Suc (Suc Cero))
```



## Definiciones con tipos recursivos

- ▶ `(nat2int n)` es el número entero correspondiente al número natural `n`. Por ejemplo,

$$\text{nat2int (Suc (Suc (Suc Cero)))} \rightsquigarrow 3$$


---

```
nat2int :: Nat -> Int
nat2int Cero      = 0
nat2int (Suc n)  = 1 + nat2int n
```

---

- ▶ `(int2nat n)` es el número natural correspondiente al número entero `n`. Por ejemplo,

$$\text{int2nat 3} \rightsquigarrow \text{Suc (Suc (Suc Cero))}$$


---

```
int2nat :: Int -> Nat
int2nat 0 = Cero
int2nat n = Suc (int2nat (n-1))
```

---

## Definiciones con tipos recursivos

- ▶ `(nat2int n)` es el número entero correspondiente al número natural `n`. Por ejemplo,

$$\text{nat2int (Suc (Suc (Suc Cero)))} \rightsquigarrow 3$$


---

```
nat2int :: Nat -> Int
nat2int Cero      = 0
nat2int (Suc n)  = 1 + nat2int n
```

---

- ▶ `(int2nat n)` es el número natural correspondiente al número entero `n`. Por ejemplo,

$$\text{int2nat 3} \rightsquigarrow \text{Suc (Suc (Suc Cero))}$$


---

```
int2nat :: Int -> Nat
int2nat 0 = Cero
int2nat n = Suc (int2nat (n-1))
```

---

## Definiciones con tipos recursivos

- ▶ `(nat2int n)` es el número entero correspondiente al número natural `n`. Por ejemplo,

$$\text{nat2int (Suc (Suc (Suc Cero)))} \rightsquigarrow 3$$

---

```
nat2int :: Nat -> Int
nat2int Cero      = 0
nat2int (Suc n)  = 1 + nat2int n
```

---

- ▶ `(int2nat n)` es el número natural correspondiente al número entero `n`. Por ejemplo,

$$\text{int2nat 3} \rightsquigarrow \text{Suc (Suc (Suc Cero))}$$

---

```
int2nat :: Int -> Nat
int2nat 0 = Cero
int2nat n = Suc (int2nat (n-1))
```

---

## Definiciones con tipos recursivos

- ▶ `(suma m n)` es la suma de los número naturales `m` y `n`. Por ejemplo,

```
*Main> suma (Suc (Suc Cero)) (Suc Cero)
Suc (Suc (Suc Cero))
```

---

```
suma :: Nat -> Nat -> Nat
suma Cero    n = n
suma (Suc m) n = Suc (suma m n)
```

---

- ▶ Ejemplo de cálculo:

```
  suma (Suc (Suc Cero)) (Suc Cero)
= Suc (suma (Suc Cero) (Suc Cero))
= Suc (Suc (suma Cero (Suc Cero)))
= Suc (Suc (Suc Cero))
```

## Definiciones con tipos recursivos

- `(suma m n)` es la suma de los número naturales `m` y `n`. Por ejemplo,

```
*Main> suma (Suc (Suc Cero)) (Suc Cero)
Suc (Suc (Suc Cero))
```

---

```
suma :: Nat -> Nat -> Nat
suma Cero    n = n
suma (Suc m) n = Suc (suma m n)
```

---

- Ejemplo de cálculo:

```
suma (Suc (Suc Cero)) (Suc Cero)
= Suc (suma (Suc Cero) (Suc Cero))
= Suc (Suc (suma Cero (Suc Cero)))
= Suc (Suc (Suc Cero))
```

## Tipo recursivo con parámetro: Las listas

- ▶ Definición del tipo lista:

---

```
data Lista a = Nil | Cons a (Lista a)
```

---

- ▶ `(longitud xs)` es la longitud de la lista `xs`. Por ejemplo,  
`| longitud (Cons 2 (Cons 3 (Cons 5 Nil))) ~⇨ 3`

---

```
longitud :: Lista a -> Int  
longitud Nil           = 0  
longitud (Cons _ xs) = 1 + longitud xs
```

---

## Tipo recursivo con parámetro: Las listas

- ▶ Definición del tipo lista:

---

```
data Lista a = Nil | Cons a (Lista a)
```

---

- ▶ `(longitud xs)` es la longitud de la lista `xs`. Por ejemplo,  
`| longitud (Cons 2 (Cons 3 (Cons 5 Nil))) ~> 3`

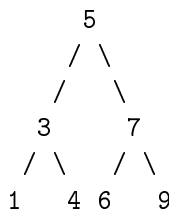
---

```
longitud :: Lista a -> Int  
longitud Nil           = 0  
longitud (Cons _ xs) = 1 + longitud xs
```

---

## Definición de tipos recursivos: Los árboles binarios

- ▶ Ejemplo de árbol binario:



- ▶ Definición del tipo de árboles binarios:

---

```
data Arbol = Hoja Int | Nodo Arbol Int Arbol
```

---

- ▶ Representación del ejemplo

---

```
ejArbol = Nodo (Nodo (Hoja 1) 3 (Hoja 4))
          5
          (Nodo (Hoja 6) 7 (Hoja 9))
```



## Definiciones sobre árboles binarios

- `(ocurre m a)` se verifica si `m` ocurre en el árbol `a`. Por ejemplo,

```

| ocurre 4  ejArbol  ~>  True
| ocurre 10 ejArbol  ~>  False

```

---

```

ocurre :: Int -> Arbol -> Bool
ocurre m (Hoja n)      = m == n
ocurre m (Nodo i n d) = m == n || ocurre m i || ocurre m d

```

- `(aplana a)` es la lista obtenida aplanando el árbol `a`. Por ejemplo,

```

| aplana ejArbol  ~>  [1,3,4,5,6,7,9]

```

---

```

aplana :: Arbol -> [Int]
aplana (Hoja n)      = [n]
aplana (Nodo i n d) = aplana i ++ [n] ++ aplana d

```

## Definiciones sobre árboles binarios

- `(ocurre m a)` se verifica si `m` ocurre en el árbol `a`. Por ejemplo,

```

| ocurre 4  ejArbol  ~>  True
| ocurre 10 ejArbol  ~>  False

```

---

```

ocurre :: Int -> Arbol -> Bool

```

```

ocurre m (Hoja n)      = m == n

```

```

ocurre m (Nodo i n d) = m == n || ocurre m i || ocurre m d

```

- `(aplana a)` es la lista obtenida aplanando el árbol `a`. Por ejemplo,

```

| aplana ejArbol  ~>  [1,3,4,5,6,7,9]

```

---

```

aplana :: Arbol -> [Int]

```

```

aplana (Hoja n)      = [n]

```

```

aplana (Nodo i n d) = aplana i ++ [n] ++ aplana d

```

## Definiciones sobre árboles binarios

- `(ocurre m a)` se verifica si `m` ocurre en el árbol `a`. Por ejemplo,

```

| ocurre 4  ejArbol  ~>  True
| ocurre 10 ejArbol  ~>  False

```

---

```

ocurre :: Int -> Arbol -> Bool

```

```

ocurre m (Hoja n)      = m == n

```

```

ocurre m (Nodo i n d) = m == n || ocurre m i || ocurre m d

```

- `(aplana a)` es la lista obtenida aplanando el árbol `a`. Por ejemplo,

```

| aplana ejArbol  ~>  [1,3,4,5,6,7,9]

```

---

```

aplana :: Arbol -> [Int]

```

```

aplana (Hoja n)      = [n]

```

```

aplana (Nodo i n d) = aplana i ++ [n] ++ aplana d

```

## Definiciones sobre árboles binarios

- ▶ Un árbol es ordenado si el valor de cada nodo es mayor que los de su subárbol izquierdo y menor que los de su subárbol derecho.
- ▶ El árbol del ejemplo es ordenado.
- ▶ (`ocurreEnArbolOrdenado m a`) se verifica si `m` ocurre en el árbol ordenado `a`. Por ejemplo,

```

| ocurreEnArbolOrdenado 4  ejArbol  ~>  True
| ocurreEnArbolOrdenado 10 ejArbol  ~>  False

```

---

```

ocurreEnArbolOrdenado :: Int -> Arbol -> Bool
ocurreEnArbolOrdenado m (Hoja n)  = m == n
ocurreEnArbolOrdenado m (Nodo i n d)
  | m == n      = True
  | m < n      = ocurreEnArbolOrdenado m i
  | otherwise  = ocurreEnArbolOrdenado m d

```

---

## Definiciones sobre árboles binarios

- ▶ Un árbol es ordenado si el valor de cada nodo es mayor que los de su subárbol izquierdo y menor que los de su subárbol derecho.
- ▶ El árbol del ejemplo es ordenado.
- ▶ (`ocurreEnArbolOrdenado m a`) se verifica si `m` ocurre en el árbol ordenado `a`. Por ejemplo,

```

| ocurreEnArbolOrdenado 4  ejArbol  ~>  True
| ocurreEnArbolOrdenado 10 ejArbol  ~>  False

```

---

```

ocurreEnArbolOrdenado :: Int -> Arbol -> Bool
ocurreEnArbolOrdenado m (Hoja n)  = m == n
ocurreEnArbolOrdenado m (Nodo i n d)
  | m == n      = True
  | m < n      = ocurreEnArbolOrdenado m i
  | otherwise   = ocurreEnArbolOrdenado m d

```

---

## Definiciones de distintos tipos de árboles

- ▶ Árboles binarios con valores en las hojas:

```
data Arbol a = Hoja a | Nodo (Arbol a) (Arbol a)
```

- ▶ Árboles binarios con valores en los nodos:

```
data Arbol a = Hoja | Nodo (Arbol a) a (Arbol a)
```

- ▶ Árboles binarios con valores en las hojas y en los nodos:

```
data Arbol a b = Hoja a | Nodo (Arbol a b) b (Arbol a b)
```

- ▶ Árboles con un número variable de sucesores:

```
data Arbol a = Nodo a [Arbol a]
```

## Sintaxis de la lógica proposicional

- ▶ Definición de fórmula proposicional:
  - ▶ Las variables proposicionales son fórmulas.
  - ▶ Si  $F$  es una fórmula, entonces  $\neg F$  también lo es.
  - ▶ Si  $F$  y  $G$  son fórmulas, entonces  $F \wedge G$  y  $F \rightarrow G$  también lo son.
- ▶ Tipo de dato de fórmulas proposicionales:

---

```
data FProp = Const Bool
           | Var Char
           | Neg FProp
           | Conj FProp FProp
           | Impl FProp FProp
           deriving Show
```

---

## Sintaxis de la lógica proposicional

► Ejemplos de fórmulas proposicionales:

1.  $A \wedge \neg A$
2.  $(A \wedge B) \rightarrow A$
3.  $A \rightarrow (A \wedge B)$
4.  $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow B$

---

```
p1, p2, p3, p4 :: FProp
```

```
p1 = Conj (Var 'A') (Neg (Var 'A'))
```

```
p2 = Impl (Conj (Var 'A') (Var 'B')) (Var 'A')
```

```
p3 = Impl (Var 'A') (Conj (Var 'A') (Var 'B'))
```

```
p4 = Impl (Conj (Var 'A') (Impl (Var 'A') (Var 'B')))  
      (Var 'B')
```

---



## Semántica de la lógica proposicional

- ▶ Tablas de verdad de las conectivas:

$i$	$\neg i$
T	F
F	T

$i$	$j$	$i \wedge j$	$i \rightarrow j$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	T
F	F	F	T

- ▶ Tabla de verdad para  $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$ :

$A$	$B$	$(A \rightarrow B)$	$(B \rightarrow A)$	$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

## Semántica de la lógica proposicional

- ▶ Las interpretaciones son listas formadas por el nombre de una variable proposicional y un valor de verdad.

---

```
type Interpretacion = [(Char, Bool)]
```

---

- ▶  $(\text{valor } i \text{ } p)$  es el valor de la fórmula  $p$  en la interpretación  $i$ .

Por ejemplo,

```
valor [( 'A', False), ( 'B', True)] p3  ~>  True
valor [( 'A', True), ( 'B', False)] p3  ~>  False
```

---

```
valor :: Interpretacion -> FProp -> Bool
valor _ (Const b)      = b
valor i (Var x)        = busca x i
valor i (Neg p)        = not (valor i p)
valor i (Conj p q)     = valor i p && valor i q
valor i (Impl p q)     = valor i p <= valor i q
```

## Semántica de la lógica proposicional

- ▶ Las interpretaciones son listas formadas por el nombre de una variable proposicional y un valor de verdad.

---

```
type Interpretacion = [(Char, Bool)]
```

---

- ▶  $(\text{valor } i \text{ } p)$  es el valor de la fórmula  $p$  en la interpretación  $i$ .

Por ejemplo,

```
valor [( 'A', False), ( 'B', True)] p3  ~>  True
valor [( 'A', True), ( 'B', False)] p3  ~>  False
```

---

```
valor :: Interpretacion -> FProp -> Bool
valor _ (Const b)      = b
valor i (Var x)        = busca x i
valor i (Neg p)        = not (valor i p)
valor i (Conj p q)     = valor i p && valor i q
valor i (Impl p q)     = valor i p <= valor i q
```

## Semántica de la lógica proposicional

- `(busca c t)` es el valor del primer elemento de la lista de asociación `t` cuya clave es `c`. Por ejemplo,

```
| busca 2 [(1, 'a'), (3, 'd'), (2, 'c')] ~> 'c'
```

---

```
busca :: Eq c => c -> [(c,v)] -> v
```

```
busca c t = head [v | (c',v) <- t, c == c']
```

---

- `(variables p)` es la lista de los nombres de las variables de `p`.

```
| variables p3 ~> "AAB"
```

---

```
variables :: FProp -> [Char]
```

```
variables (Const _) = []
```

```
variables (Var x)   = [x]
```

```
variables (Neg p)   = variables p
```

```
variables (Conj p q) = variables p ++ variables q
```

```
variables (Imp] p q) = variables p ++ variables q
```

## Semántica de la lógica proposicional

- `(busca c t)` es el valor del primer elemento de la lista de asociación `t` cuya clave es `c`. Por ejemplo,

```
| busca 2 [(1, 'a'), (3, 'd'), (2, 'c')]  ~>  'c'
```

---

```
busca :: Eq c => c -> [(c,v)] -> v
```

```
busca c t = head [v | (c',v) <- t, c == c']
```

---

- `(variables p)` es la lista de los nombres de las variables de `p`.

```
| variables p3  ~>  "AAB"
```

---

```
variables :: FProp -> [Char]
```

```
variables (Const _) = []
```

```
variables (Var x)   = [x]
```

```
variables (Neg p)   = variables p
```

```
variables (Conj p q) = variables p ++ variables q
```

```
variables (Imp] p q) = variables p ++ variables q
```

## Semántica de la lógica proposicional

- `(busca c t)` es el valor del primer elemento de la lista de asociación `t` cuya clave es `c`. Por ejemplo,

```
| busca 2 [(1, 'a'), (3, 'd'), (2, 'c')] ~> 'c'
```

---

```
busca :: Eq c => c -> [(c,v)] -> v
```

```
busca c t = head [v | (c',v) <- t, c == c']
```

---

- `(variables p)` es la lista de los nombres de las variables de `p`.

```
| variables p3 ~> "AAB"
```

---

```
variables :: FProp -> [Char]
```

```
variables (Const _) = []
```

```
variables (Var x)   = [x]
```

```
variables (Neg p)   = variables p
```

```
variables (Conj p q) = variables p ++ variables q
```

```
variables (Imp] p q) = variables p ++ variables q
```

## Semántica de la lógica proposicional

- ▶ `(interpretacionesVar n)` es la lista de las interpretaciones con `n` variables. Por ejemplo,

```
*Main> interpretacionesVar 2
[[False,False],
 [False,True],
 [True,False],
 [True,True]]
```

---

```
interpretacionesVar :: Int -> [[Bool]]
interpretacionesVar 0 = [[]]
interpretacionesVar n =
    map (False:) bss ++ map (True:) bss
  where bss = interpretacionesVar (n-1)
```

---

## Semántica de la lógica proposicional

- `(interpretacionesVar n)` es la lista de las interpretaciones con `n` variables. Por ejemplo,

```
*Main> interpretacionesVar 2
[[False,False],
 [False,True],
 [True,False],
 [True,True]]
```

---

```
interpretacionesVar :: Int -> [[Bool]]
interpretacionesVar 0 = [[]]
interpretacionesVar n =
  map (False:) bss ++ map (True:) bss
  where bss = interpretacionesVar (n-1)
```

---



## Semántica de la lógica proposicional

- (interpretaciones p) es la lista de las interpretaciones de la fórmula p. Por ejemplo,

```
*Main> interpretaciones p3  
[[('A',False),('B',False)],  
 [('A',False),('B',True)],  
 [('A',True),('B',False)],  
 [('A',True),('B',True)]]
```

---

```
interpretaciones :: FProp -> [Interpretacion]  
interpretaciones p =  
  [zip vs i | i <- interpretacionesVar (length vs)]  
  where vs = nub (variables p)
```

---

## Semántica de la lógica proposicional

- (interpretaciones p) es la lista de las interpretaciones de la fórmula p. Por ejemplo,

```
*Main> interpretaciones p3  
[[('A',False),('B',False)],  
 [('A',False),('B',True)],  
 [('A',True),('B',False)],  
 [('A',True),('B',True)]]
```

---

```
interpretaciones :: FProp -> [Interpretacion]  
interpretaciones p =  
  [zip vs i | i <- interpretacionesVar (length vs)]  
  where vs = nub (variables p)
```

---

## Decisión de tautología

- ▶ `(esTautologia p)` se verifica si la fórmula `p` es una tautología.

Por ejemplo,

```
esTautologia p1  ~>  False
esTautologia p2  ~>  True
esTautologia p3  ~>  False
esTautologia p4  ~>  True
```

---

```
esTautologia :: FProp -> Bool
esTautologia p =
    and [valor i p | i <- interpretaciones p]
```

---

## Decisión de tautología

- ▶ `(esTautologia p)` se verifica si la fórmula `p` es una tautología.

Por ejemplo,

```
esTautologia p1  ~>  False
esTautologia p2  ~>  True
esTautologia p3  ~>  False
esTautologia p4  ~>  True
```

---

```
esTautologia :: FProp -> Bool
```

```
esTautologia p =
```

```
    and [valor i p | i <- interpretaciones p]
```

---

## Evaluación de expresiones aritméticas

- ▶ Una expresión aritmética es un número entero o la suma de dos expresiones.

---

```
data Expr = Num Int | Suma Expr Expr
```

---

- ▶ `(valorEA x)` es el valor de la expresión aritmética `x`.

```
| valorEA (Suma (Suma (Num 2) (Num 3)) (Num 4)) ~> 9
```

---

```
valorEA :: Expr -> Int
valorEA (Num n)     = n
valorEA (Suma x y) = valorEA x + valorEA y
```

---

- ▶ Cálculo:

```
valorEA (Suma (Suma (Num 2) (Num 3)) (Num 4))
= (valorEA (Suma (Num 2) (Num 3))) + (valorEA (Num 4))
= (valorEA (Suma (Num 2) (Num 3))) + 4
= (valorEA (Num 2) + (valorEA (Num 3))) + 4
= (2 + 3) + 4
= 9
```

## Evaluación de expresiones aritméticas

- ▶ Una expresión aritmética es un número entero o la suma de dos expresiones.

---

```
data Expr = Num Int | Suma Expr Expr
```

---

- ▶ `(valorEA x)` es el valor de la expresión aritmética `x`.

```
| valorEA (Suma (Suma (Num 2) (Num 3)) (Num 4)) ~> 9
```

---

```
valorEA :: Expr -> Int
valorEA (Num n)      = n
valorEA (Suma x y) = valorEA x + valorEA y
```

---

- ▶ Cálculo:

```
valorEA (Suma (Suma (Num 2) (Num 3)) (Num 4))
= (valorEA (Suma (Num 2) (Num 3))) + (valorEA (Num 4))
= (valorEA (Suma (Num 2) (Num 3))) + 4
= (valorEA (Num 2) + (valorEA (Num 3))) + 4
= (2 + 3) + 4
= 9
```

## Máquina de cálculo aritmético

- ▶ La pila de control de la máquina abstracta es una lista de operaciones.

---

```
type PControl = [Op]
```

---

- ▶ Las operaciones son meter una expresión en la pila o sumar un número con el primero de la pila.

---

```
data Op =  METE Expr | SUMA Int
```

---

## Máquina de cálculo aritmético

- `(eval x p)` evalúa la expresión `x` con la pila de control `p`. Por ejemplo,

<code>eval (Suma (Suma (Num 2) (Num 3)) (Num 4)) []</code>	$\rightsquigarrow$	9
<code>eval (Suma (Num 2) (Num 3)) [METE (Num 4)]</code>	$\rightsquigarrow$	9
<code>eval (Num 3) [SUMA 2, METE (Num 4)]</code>	$\rightsquigarrow$	9
<code>eval (Num 4) [SUMA 5]</code>	$\rightsquigarrow$	9

---

```
eval :: Expr -> PControl -> Int
eval (Num n)    p = ejec p n
eval (Suma x y) p = eval x (METE y : p)
```

---



## Máquina de cálculo aritmético

- `(eval x p)` evalúa la expresión `x` con la pila de control `p`. Por ejemplo,

<code>eval (Suma (Suma (Num 2) (Num 3)) (Num 4)) []</code>	$\rightsquigarrow$	9
<code>eval (Suma (Num 2) (Num 3)) [METE (Num 4)]</code>	$\rightsquigarrow$	9
<code>eval (Num 3) [SUMA 2, METE (Num 4)]</code>	$\rightsquigarrow$	9
<code>eval (Num 4) [SUMA 5]</code>	$\rightsquigarrow$	9

---

```
eval :: Expr -> PControl -> Int
eval (Num n)    p = ejec p n
eval (Suma x y) p = eval x (METE y : p)
```

---

## Máquina de cálculo aritmético

- `(ejec p n)` ejecuta la lista de control `p` sobre el entero `n`. Por ejemplo,

<code>ejec [METE (Num 3), METE (Num 4)]</code>	<code>2</code>	<code>≈</code>	<code>9</code>
<code>ejec [SUMA 2, METE (Num 4)]</code>	<code>3</code>	<code>≈</code>	<code>9</code>
<code>ejec [METE (Num 4)]</code>	<code>5</code>	<code>≈</code>	<code>9</code>
<code>ejec [SUMA 5]</code>	<code>4</code>	<code>≈</code>	<code>9</code>
<code>ejec []</code>	<code>9</code>	<code>≈</code>	<code>9</code>

---

```

ejec :: PControl -> Int -> Int
ejec []          n = n
ejec (METE y : p) n = eval y (SUMA n : p)
ejec (SUMA n : p) m = ejec p (n+m)

```

---

## Máquina de cálculo aritmético

- (ejec p n) ejecuta la lista de control p sobre el entero n. Por ejemplo,

ejec [METE (Num 3), METE (Num 4)]	2	≈	9
ejec [SUMA 2, METE (Num 4)]	3	≈	9
ejec [METE (Num 4)]	5	≈	9
ejec [SUMA 5]	4	≈	9
ejec []	9	≈	9

---

```

ejec :: PControl -> Int -> Int
ejec []          n = n
ejec (METE y : p) n = eval y (SUMA n : p)
ejec (SUMA n : p) m = ejec p (n+m)

```

---

## Máquina de cálculo aritmético

- ▶ (**evalua e**) evalúa la expresión aritmética e con la máquina abstracta. Por ejemplo,

```
| evalua (Suma (Suma (Num 2) (Num 3)) (Num 4)) ~ 9
```

---

```
evalua :: Expr -> Int
```

```
evalua e = eval e []
```

---

- ▶ Evaluación:

```
| eval (Suma (Suma (Num 2) (Num 3)) (Num 4)) []
= eval (Suma (Num 2) (Num 3)) [METE (Num 4)]
= eval (Num 2) [METE (Num 3), METE (Num 4)]
= ejec [METE (Num 3), METE (Num 4)] 2
= eval (Num 3) [SUMA 2, METE (Num 4)]
= ejec [SUMA 2, METE (Num 4)] 3
= ejec [METE (Num 4)] (2+3)
= ejec [METE (Num 4)] 5
= eval (Num 4) [SUMA 5]
= ejec [SUMA 5] 4
= ejec [] (5+4)
= ejec [] 9
= 9
```

## Máquina de cálculo aritmético

- ▶ (`evalua e`) evalúa la expresión aritmética `e` con la máquina abstracta. Por ejemplo,

```
| evalua (Suma (Suma (Num 2) (Num 3)) (Num 4)) ~> 9
```

---

```
evalua :: Expr -> Int
```

```
evalua e = eval e []
```

---

- ▶ Evaluación:

```
| eval (Suma (Suma (Num 2) (Num 3)) (Num 4)) []
= eval (Suma (Num 2) (Num 3)) [METE (Num 4)]
= eval (Num 2) [METE (Num 3), METE (Num 4)]
= ejec [METE (Num 3), METE (Num 4)] 2
= eval (Num 3) [SUMA 2, METE (Num 4)]
= ejec [SUMA 2, METE (Num 4)] 3
= ejec [METE (Num 4)] (2+3)
= ejec [METE (Num 4)] 5
= eval (Num 4) [SUMA 5]
= ejec [SUMA 5] 4
= ejec [] (5+4)
= ejec [] 9
= 9
```

## Declaraciones de clases

- ▶ Las clases se declaran mediante el mecanismo `class`.
- ▶ Ejemplo de declaración de clases:

```
_____ Prelude _____  
class Eq a where  
    (==), (/=) :: a -> a -> Bool  
  
    -- Minimal complete definition: (==) or (/=)  
    x == y = not (x/=y)  
    x /= y = not (x==y)
```

## Declaraciones de instancias

- ▶ Las instancias se declaran mediante el mecanismo `instance`.
- ▶ Ejemplo de declaración de instancia:

```
_____ Prelude _____  
instance Eq Bool where  
  False == False = True  
  True  == True  = True  
  _     == _     = False
```

## Extensiones de clases

- ▶ Las clases pueden extenderse mediante el mecanismo `class`.
- ▶ Ejemplo de extensión de clases:

```

_____ Prelude _____
class (Eq a) => Ord a where
  compare      :: a -> a -> Ordering
  (<), (<=), (>=), (>) :: a -> a -> Bool
  max, min     :: a -> a -> a

-- Minimal complete definition: (<=) or compare
-- using compare can be more efficient for complex types
compare x y | x==y      = EQ
             | x<=y     = LT
             | otherwise = GT

x <= y      = compare x y /= GT
x < y       = compare x y == LT
x >= y      = compare x y /= LT
x > y       = compare x y == GT

max x y | x <= y      = y
        | otherwise  = x
min x y | x <= y      = x
        | otherwise  = y

```



## Instancias de clases extendidas

- ▶ Las instancias de las clases extendidas pueden declararse mediante el mecanismo `instance`.
- ▶ Ejemplo de declaración de instancia:

```
_____ Prelude _____  
instance Ord Bool where  
    False <= _      = True  
    True  <= True   = True  
    True  <= False  = False  
_____
```

## Clases derivadas

- ▶ Al definir un nuevo tipo con `data` puede declararse como instancia de clases mediante el mecanismo `deriving`.
- ▶ Ejemplo de clases derivadas:

```
_____ Prelude _____  
data Bool = False | True  
           deriving (Eq, Ord, Read, Show)
```

- ▶ Comprobación:

```
| False == False      ~> True  
| False < True       ~> True  
| show False         ~> "False"  
| read "False" :: Bool ~> False
```

## Clases derivadas

- ▶ Para derivar un tipo cuyos constructores tienen argumentos como derivado, los tipos de los argumentos tienen que ser instancias de las clases derivadas.
- ▶ Ejemplo:

---

```
data Figura = Circulo Float | Rect Float Float
           deriving (Eq, Ord, Show)
```

---

se cumple que Float es instancia de Eq, Ord y Show.

```
*Main> :info Float
...
instance Eq Float
instance Ord Float
instance Show Float
...
```

## Bibliografía

1. G. Hutton *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2007.
  - ▶ Cap. 10: Declaring types and classes.
2. B.C. Ruiz, F. Gutiérrez, P. Guerrero y J.E. Gallardo. *Razonando con Haskell*. Thompson, 2004.
  - ▶ Cap. 4: Definición de tipos.
  - ▶ Cap. 5: El sistema de clases de Haskell.
3. S. Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*, Second Edition. Addison-Wesley, 1999.
  - ▶ Cap. 12: Overloading and type classes.
  - ▶ Cap. 13: Checking types.
  - ▶ Cap. 14: Algebraic types.