# Lógica Informática. (18-6-2002)

**Nombre y apellidos** ..............................................................

**Ejercicio 1.–** Consideremos la fórmula proposicional

$$A: \qquad (r \to p) \land (\neg r \to q \lor s) \to p \lor q \lor s$$

y el conjunto de fórmulas $U = \{r \leftrightarrow p \lor q,\ s \to p,\ \neg s \land \neg r \to s \lor t\}$.

1. Pruébese, mediante tableros semánticos, que $A$ es una tautología.
2. Pruébese, razonadamente, que $U$ es consistente, mostrando para ello un modelo de $U$.
3. Pruébese, mediante resolución lineal, que $U \models \neg p \to (q \lor t)$.
4. Sea $B$ la fórmula anterior $\neg p \to (q \lor t)$. ¿Podemos eliminar alguna fórmula de $U$ de manera que la fórmula $B$ sea consecuencia lógica del conjunto de fórmulas restante?

**Ejercicio 2.–** En cierto país oriental se ha celebrado la fase final del campeonato mundial de fútbol. Cierto diario deportivo ha publicado las siguientes estadísticas de tan magno acontecimiento:

- A todos los porteros que no vistieron camiseta negra les marcó un gol algún delantero europeo.
- Algún portero jugó con botas blancas y sólo le marcaron goles jugadores con botas blancas.
- Ningún portero se marcó un gol a sí mismo.
- Ningún jugador con botas blancas vistió camiseta negra.

Se pide:

1. Formalizar los enunciados anteriores en un lenguaje de primer orden usando los siguientes símbolos de predicado: $P(x)$ : "$x$ es portero", $D(x)$ : " $x$ es delantero europeo", $N(x)$ : "$x$ viste camiseta negra", $B(x)$ : "$x$ juega con botas blancas", $M(x, y)$ : "$x$ marcó un gol a $y$".
2. Obtener una forma clausal para el conjunto de fórmulas del apartado anterior.
3. Probar, mediante resolución no restringida, que algún delantero europeo jugó con botas blancas.

**Ejercicio 3.–** Sea **T** el siguiente sistema deductivo:

Reglas de inferencia:

$$(\mathbf{R1})\ \frac{A \wedge B}{A} \qquad (\mathbf{R2})\ \frac{A \wedge B}{B \wedge A} \qquad (\mathbf{R3})\ \frac{\neg\neg A}{A}$$

$$(\mathbf{R4})\ \frac{A,\ A \to B}{A \wedge B} \qquad (\mathbf{R5})\ \frac{\neg(A \to B)}{\neg B}$$

Axiomas: $Ax(\mathbf{T}) = \{A \to (B \to A \wedge B) : \ A, B \in PROP\}$

1. Pruébese que si $\vdash_{\mathbf{T}} C$ entonces $C$ es una tautología.
2. Pruébese que si $\vdash_{\mathbf{T}} A$ y $\vdash_{\mathbf{T}} B$ entonces $\vdash_{\mathbf{T}} A \wedge B$.
3. Sea **S** el sistema deductivo que se obtiene a partir de **T** añadiendo como axiomas las fórmulas $\neg(p \to \neg p)$ y $\neg q$, es decir, $Ax(\mathbf{S}) = Ax(\mathbf{T}) \cup \{\neg(p \to \neg p), \neg q\}$.

   Pruébese que $\vdash_{\mathbf{S}} p \wedge \neg q$.

**Ejercicio 4.–**

1. Consideremos el lenguaje de primer orden $L_1 = \{P, f\}$ y las fórmulas de $L_1$:

   $$\varphi_1 : \ \forall x \exists y\, P(x, f(y)) \qquad \varphi_2 : \ \exists y \forall x\, P(x, f(y)) \qquad \varphi_3 : \ \exists y \forall x\, P(x, y)$$

   (a) Hállese una $L_1$–estructura, $M$, tal que $M \models \varphi_1$ pero $M \not\models \varphi_2$.

   (b) Hállese una $L_1$–estructura, $N$, tal que $N \models \varphi_3$ pero $N \not\models \varphi_2$.

2. Consideremos ahora el lenguaje $L_2 = \{a, b, P, Q\}$ y la fórmula, $F$, siguiente:

   $$\forall x \exists y\, (P(x, y) \wedge \neg Q(x, a))$$

   Hállese un modelo de Herbrand de $F$.

**Puntuación: 2.5 ptos. cada ejercicio.**