Lógica Informática. (13-6-2003)

Nombre y apellidos ....

Ejercicio 1.– Consideremos los conjuntos de fórmulas: $T = \{q \vee r, \neg q \vee \neg r\}$ y

$$S = \{p \rightarrow q,\, q \leftrightarrow r \wedge s,\, \neg s \wedge r \rightarrow q,\, \neg q\}$$

1. Pruébese, mediante tableros semánticos, que S es consistente.
2. Obténganse, razonadamente, todos los modelos de S.
3. Pruébese, mediante resolución lineal, que $S \cup T$ es inconsistente.
4. Teniendo en cuenta los apartados anteriores, obténgase una fórmula F, formada exclusivamente por las variables q y r, tal que: $F \notin TAUT$ y $S \models F$.

Ejercicio 2.– Supongamos conocidos los siguientes hechos acerca del número de aprobados de dos asignaturas A y B en una cierta clase:

- Si todos los alumnos aprueban la asignatura A, entonces todos aprueban la B.
- Si algún delegado de la clase aprueba A y B, entonces todos los alumnos aprueban A.
- Si nadie aprueba B, entonces ningún delegado aprueba A.
- Si Manuel no aprueba B, entonces nadie aprueba B.

Se pide:

1. Formalizar los enunciados anteriores en un lenguaje de primer orden usando los siguientes símbolos de predicado: $D(x)$: "x es un delegado", $Ap(x, y)$: " x aprueba la asignatura y", Las constantes **a** y **b** denotarán a las asignaturas A y B y la constante **m** denotará a Manuel.
2. Obtener una forma clausal para el conjunto de fórmulas del apartado anterior.
3. Probar, mediante resolución no restringida, que si Manuel es un delegado y aprueba la asignatura A, entonces todos los alumnos aprueban las asignaturas A y B.

Ejercicio 3.– Sea **T** el siguiente sistema deductivo:

Reglas de inferencia:

$$(\mathbf{R1})\ \frac{A}{B \to A} \qquad (\mathbf{R2})\ \frac{A \to (B \to C),\ A \to B}{A \to C}$$

$$(\mathbf{R3})\ \frac{\neg A \to \neg B}{B \to A} \qquad (\mathbf{R4})\ \frac{\neg A \to B,\ A \to B}{B}$$

Axiomas: $Ax(\mathbf{T}) = \{p \to q,\ q \to r,\ \neg p \to \neg s,\ \neg q \to q,\ \neg\neg s \to \neg p\}$

1. Sea $U = Ax(\mathbf{T})$. Pruébese que si $\vdash_{\mathbf{T}} C$ entonces $U \models C$.
2. Pruébese que si $\vdash_{\mathbf{T}} A \to B$ y $\vdash_{\mathbf{T}} B \to C$ entonces $\vdash_{\mathbf{T}} A \to C$.
3. Pruébese que $\vdash_{\mathbf{T}} (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$, $\vdash_{\mathbf{T}} \neg s$ y $\vdash_{\mathbf{T}} r$.
   (Indicación: téngase en cuenta el apartado 2)

Ejercicio 4.–

1. Consideremos el lenguaje $L_1 = \{P,\ f,\ a,\ b,\ c\}$ y el conjunto de fórmulas:

$$\Sigma = \{P(c,a) \to \forall z\, P(z,b),\ P(f(x),x) \to \forall z\, P(z,x),\ \neg P(b,c)\}$$

   Pruébese, proporcionando un modelo de Herbrand, que $\Sigma \not\models P(f(a),a) \vee \neg P(f(b),b)$.

2. Consideremos el lenguaje $L_2 = \{a,b,P\}$. Sea φ la fórmula

$$\neg P(x,a) \wedge \neg P(x,b) \wedge \exists y \exists z\, P(y,z)$$

   Pruébese que φ es consistente y que NO tiene ningún modelo de Herbrand (en el lenguaje L_2) ¿Contradice esto el teorema de Herbrand? Razónese la respuesta.

Puntuación: 2.5 ptos. cada ejercicio.