Lógica Informática. (22-9-2003)

Nombre y apellidos . . . .

Ejercicio 1.– [2.5 ptos.] Dadas las fórmulas $A: \ (s \to p) \lor (t \to q)$ y $B: \ (s \to q) \lor (t \to p)$, se pide:

1. Pruébese que $A \models B$:
   a) Mediante tableros semánticos.
   b) Mediante resolución por entradas.
2. Descríbanse, razonadamente, todos los modelos de A y, a continuación, pruébese nuevamente que $A \models B$, utilizando la definición de consecuencia lógica.
3. ¿Es $\neg B \to \neg A$ una tautología? Razónese la respuesta.

Ejercicio 2.– [2.5 ptos.] Sea **T** el siguiente sistema deductivo:

Reglas de Inferencia:

$$(\mathbf{R1}) \ \frac{A \to B, \ B \to C}{A \to C} \qquad (\mathbf{R2}) \ \frac{A \lor B, \ A \to B}{B} \qquad (\mathbf{R3}) \ \frac{A}{A \lor B} \qquad (\mathbf{R4}) \ \frac{A \to \neg\neg B \lor C}{A \to B \lor C}$$

Axiomas: Para cualesquiera fórmulas A y B las siguientes fórmulas son axiomas de **T**:

$$\mathbf{Ax1} \quad A \to A \lor B \qquad \mathbf{Ax2} \quad A \lor A \to A \qquad \mathbf{Ax3} \quad A \lor B \to B \lor A$$

1. Probar que $\vdash_{\mathbf{T}} A \to A$ y $\vdash_{\mathbf{T}} \neg\neg A \to A$.
2. Sea **S** el sistema deductivo que se obtiene añadiendo a los axiomas de **T** el conjunto de fórmulas $U = \{p \to q, \ q \to r, \ p \lor r, \ r \to \neg\neg q \lor q\}$.
   a) Pruébese que para toda fórmula F, si $\vdash_{\mathbf{S}} F$ entonces $U \models F$.
   b) Pruébese que $\vdash_{\mathbf{S}} r$ y que $\vdash_{\mathbf{S}} q$.

Ejercicio 3.– [2.5 ptos.]

1. Hallar las formas prenex, de Skolem y clausal de la fórmula:

$$\neg\exists x \, \forall z \, [P(x) \to \neg Q(z)] \lor [\exists z \, A(y,z) \to \exists u \, B(y,u)]$$

2. Consideremos el lenguaje $L_1 = \{P, \ f, \ a, \ b\}$ y el conjunto de fórmulas:

$$\Sigma = \{P(a,x) \to P(b, f(x)), \ P(f(x),x) \to \forall z \, P(z,b), \ P(a, f(a)) \land P(f(b), b)\}$$

   Pruébese, proporcionando un modelo de Herbrand, que $\Sigma \not\models \exists x \, (P(x,a) \land P(f(x), b))$.

Ejercicio 4.– [2.5 ptos.] Consideremos los siguientes hechos acerca de la sucesión entre los integrantes de una monarquía inglesa:

1. El primogénito de un rey hereda la corona de dicho rey.
2. Si alguien derrota a un rey entonces hereda su corona.
3. Si alguien hereda la corona de un rey entonces se convierte en rey.
4. Enrique VIII era el primogénito de Enrique VII.
5. Ricardo III era rey y Enrique VII derrotó a Ricardo III.

Se pide:

1. Formalizar los enunciados anteriores en un lenguaje de primer orden usando los siguientes símbolos de predicado: $D(x, y)$: "x derrota a y",$H(x, y)$: "x hereda la corona de y", $R(x)$: "x es rey", $P(x, y)$: "x es el primogénito de y". Las constantes **a**, **b** y **c** denotarán, respectivamente, a Ricardo III, Enrique VII y Enrique VIII.
2. A partir de la información anterior, probar, mediante resolución que Enrique VIII fué rey.