Ejercicio 1. Probar $(E \vee F) \rightarrow G \models (E \rightarrow G) \wedge (F \rightarrow G)$

(a) Mediante deducción natural.

(b) Por resolución.

Solución del apartado (a): Demostración por deducción natural:

1 :	$(E \vee F) \longrightarrow G$	premisa
2 :	$\quad E$	supuesto
3 :	$\quad E \vee F$	$\vee$i 2
4 :	$\quad G$	$\longrightarrow$e 1,3
5 :	$E \longrightarrow G$	$\longrightarrow$i 2–4
6 :	$\quad F$	supuesto
7 :	$\quad E \vee F$	$\vee$i 6
8 :	$\quad G$	$\longrightarrow$e 1,7
9 :	$F \longrightarrow G$	$\longrightarrow$i 6–8
10 :	$(E \longrightarrow G) \wedge (F \longrightarrow G)$	$\wedge$i 5,9

Solución del apartado (b): Demostración por resolución: En primer lugar se transforma la premisa a forma clausal:

$$\begin{array}{lll}
& (E \vee F) \rightarrow G & \\
\equiv & \neg(E \vee F) \vee G & \text{[por (2)]} \\
\equiv & (\neg E \wedge \neg F) \vee G & \text{[por (4)]} \\
\equiv & (\neg E \vee G) \wedge (\neg F \vee G) & \text{[por (7)]} \\
\equiv & \{\{\neg E, G\}, \{\neg F, G\}\} &
\end{array}$$

A continuación, se transforma la negación de la conclusión a forma clausal:

$$\begin{array}{lll}
& \neg((E \rightarrow G) \wedge (F \rightarrow G)) & \\
\equiv & \neg((\neg E \vee G) \wedge (\neg F \vee G)) & \text{[por (2)]} \\
\equiv & \neg(\neg E \vee G) \vee \neg(\neg F \vee G) & \text{[por (3)]} \\
\equiv & (\neg\neg E \wedge \neg G) \vee (\neg\neg F \wedge \neg G) & \text{[por (4)]} \\
\equiv & (E \wedge \neg G) \vee (F \wedge \neg G) & \text{[por (5)]} \\
\equiv & ((E \wedge \neg G) \vee F) \wedge ((E \wedge \neg G) \vee \neg G) & \text{[por (6)]} \\
\equiv & ((E \vee F) \wedge (\neg G \vee F)) \wedge ((E \vee \neg G) \wedge (\neg G \vee \neg G)) & \text{[por (7)]} \\
\equiv & \{\{E, F\}, \{\neg G, F\}, \{E, \neg G\}, \{\neg G\}\} &
\end{array}$$

Finalmente, se construye una refutación de las cláusulas obtenidas:

1	$\{\neg E, G\}$	
2	$\{\neg F, G\}$	
3	$\{E, F\}$	
4	$\{\neg G, F\}$	
5	$\{E, \neg G\}$	
6	$\{\neg G\}$	
7	$\{\neg E\}$	Resolvente de 1 y 6
8	$\{\neg F\}$	Resolvente de 2 y 6
9	$\{F\}$	Resolvente de 3 y 7
10	$\square$	Resolvente de 8 y 9

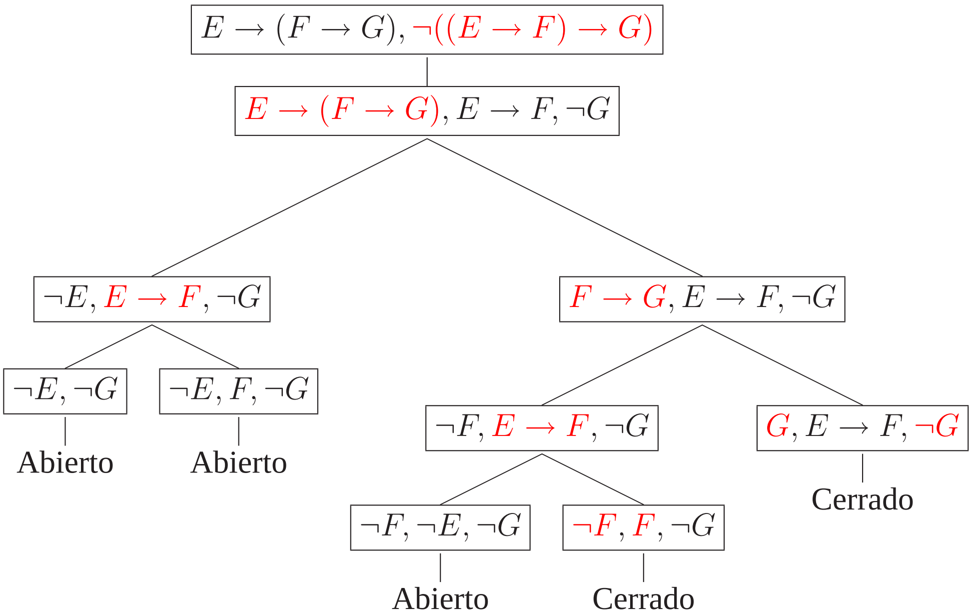
Ejercicio 2.

(a) Pruébese que $E \rightarrow (F \rightarrow G) \not\models (E \rightarrow F) \rightarrow G$ mediante tableros semánticos.

(b) Descríbanse todos los modelos de $E \rightarrow (F \rightarrow G)$ que no son modelos de $(E \rightarrow F) \rightarrow G$.

(c) La fórmula $E \rightarrow (F \rightarrow G) \rightarrow (E \rightarrow F) \rightarrow G$, ¿es una tautología? Razónese la respuesta.

Solución del apartado (a): Demostración por tableros semánticos:



Solución del apartado (b): Los modelos de $E \rightarrow (F \rightarrow G)$ que no son modelos de la fórmula $(E \rightarrow F) \rightarrow G$ son los modelos de las hojas abiertas del árbol anterior; es decir, cualquier valoración v tal que $v(E) = 0$ y $v(G) = 0$.

Solución del apartado (c): La fórmula $E \rightarrow (F \rightarrow G) \rightarrow (E \rightarrow F) \rightarrow G$ no es una tautología, porque si lo fuera se tendría que $E \rightarrow (F \rightarrow G) \models (E \rightarrow F) \rightarrow G$ en contradicción con el apartado (a).

Ejercicio 3. Sea L un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado, Q, (de aridad 2) y un símbolo de función, f, (de aridad 1). Se considera la estructura $\mathcal{I}$ dada por: Universo: $\{a, b\}$, $Q^I = \{(a, b), (b, a)\}$, $f^I(a) = a$ y $f^I(b) = a$. Decidir cuáles de las siguientes fórmulas se satisfacen en la estructura:

1. $(\forall x)[Q(f(x), x) \to Q(x, x)]$
2. $(\exists x)[Q(f(x), x) \to Q(x, x)]$

Solución para la primera fórmula:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}((\forall x)[Q(f(x), x) \to Q(x, x)]) = \mathsf{V} \Leftrightarrow\ & \mathcal{I}_{[x/a]}(Q(f(x), x) \to Q(x, x)) = \mathsf{V} \text{ y}\\ & \mathcal{I}_{[x/b]}(Q(f(x), x) \to Q(x, x)) = \mathsf{V}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{[x/a]}(Q(f(x), x) \to Q(x, x)) &= Q^I(f^I(a), a) \to Q^I(a, a) =\\ &= Q^I(a, a) \to Q^I(a, a) =\\ &= \mathsf{F} \to \mathsf{F} =\\ &= \mathsf{V}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{[x/b]}(Q(f(x), x) \to Q(x, x)) &= Q^I(f^I(b), b) \to Q^I(b, b) =\\ &= Q^I(a, b) \to Q^I(b, b) =\\ &= \mathsf{V} \to \mathsf{F} =\\ &= \mathsf{F}\end{aligned}$$

Por tanto, $\mathcal{I}((\forall x)[Q(f(x), x) \to Q(x, x)]) = \mathsf{F}$

Solución para la segunda fórmula:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}((\exists x)[Q(f(x), x) \to Q(x, x)]) = \mathsf{V} \Leftrightarrow\ & \mathcal{I}_{[x/a]}(Q(f(x), x) \to Q(x, x)) = \mathsf{V} \text{ ó}\\ & \mathcal{I}_{[x/b]}(Q(f(x), x) \to Q(x, x)) = \mathsf{V}\end{aligned}$$

$$\mathcal{I}_{[x/a]}(Q(f(x), x) \to Q(x, x)) = \mathsf{V}$$

Por tanto, $\mathcal{I}((\exists x)[Q(f(x), x) \to Q(x, x)]) = \mathsf{V}$

Ejercicio 4. Sabemos que

1. *Cualquiera que estudie lo suficiente aprueba todas las asignaturas.*
2. *Cuando alguien que celebra su cumpleaños en julio ha aprobado todas las asignaturas, se le obsequia con un regalo.*
3. *Quien recibe un regalo sin estudiar lo suficiente, nunca es obsequiado con un móvil.*
4. *Pablo es un alumno que, a pesar de no estudiar lo suficiente, recibió un móvil como regalo.*

Se pide:

(a) Formalizar los conocimientos anteriores teniendo en cuenta que los predicados del texto se representan así: $C(x)$ = "x celebra su cumpleaños en julio"; $A(x)$ = "x ha aprobado todas las asignaturas"; $S(x)$ = "x estudia lo suficiente"; $R(x,y)$ = "x recibe el regalo y". Y las constantes a y b representan respectivamente a Pablo y al móvil.

(b) Obtener el conjunto de cláusulas de las fórmulas anteriores y probar que es inconsistente dando un subconjunto de su extensión de Herbrand que lo sea.

(c) Probar, mediante resolución, que el enunciado *Si Pablo recibe un móvil como regalo, entonces ha aprobado todas las asignaturas* es consecuencia lógica de los enunciados 1 y 3.

Solución del apartado (a): Formalización del discurso:

$$\begin{array}{ll}
F_1: & (\forall x)[S(x) \to A(x)] \\
F_2: & (\forall x)[C(x) \land A(x) \to (\exists y)R(x,y)] \\
F_3: & (\forall x)[(\exists y)R(x,y) \land \neg S(x) \to \neg R(x,b)] \\
F_4: & \neg S(a) \land R(a,b)
\end{array}$$

Solución del apartado (b.1): Cálculo del conjunto de cláusulas de las fórmulas anteriores:

$$\begin{array}{lll}
F_1: & (\forall x)[S(x) \to A(x)] & \\
\equiv & (\forall x)[\neg S(x) \lor A(x)] & \text{[por (4)]} \\
\equiv & \{\{\neg S(x), A(x)\}\} & \text{[por (4)]}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
F_2: & (\forall x)[C(x) \land A(x) \to (\exists y)R(x,y)] & \\
\equiv & (\forall x)[\neg(C(x) \land A(x)) \lor (\exists y)R(x,y)] & \text{[por (4)]} \\
\equiv & (\forall x)[(\neg C(x) \lor \neg A(x)) \lor (\exists y)R(x,y)] & \text{[por (5)]} \\
\equiv & (\forall x)(\exists y)[\neg C(x) \lor \neg A(x) \lor R(x,y)] & \text{[por (18)]} \\
\equiv_{sat} & (\forall x)[\neg C(x) \lor \neg A(x) \lor R(x,f(x))] & [f \text{ función de Skolem}] \\
\equiv & \{\{\neg C(x), \neg A(x), R(x,f(x))\}\} &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{lll}
F_3: & (\forall x)[(\exists y)R(x,y) \land \neg S(x) \to \neg R(x,b)] & \\
\equiv & (\forall x)[\neg((\exists y)R(x,y) \land \neg S(x)) \lor \neg R(x,b)] & \text{[por (4)]} \\
\equiv & (\forall x)[(\neg(\exists y)R(x,y) \lor \neg\neg S(x)) \lor \neg R(x,b)] & \text{[por (5)]} \\
\equiv & (\forall x)[\neg(\exists y)R(x,y) \lor S(x)) \lor \neg R(x,b)] & \text{[por (7)]} \\
\equiv & (\forall x)[((\forall y)\neg R(x,y) \lor S(x)) \lor \neg R(x,b)] & \text{[por (9)]} \\
\equiv & (\forall x)[(\forall y)[\neg R(x,y) \lor S(x)] \lor \neg R(x,b)] & \text{[por (12)]} \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg R(x,y) \lor S(x) \lor \neg R(x,b)] & \text{[por (12)]} \\
\equiv & \{\{\neg R(x,y), S(x), \neg R(x,b)\}\} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
F_4: & \neg S(a) \land R(a,b) \\
\equiv & \{\{\neg S(a)\}, \{R(a,b)\}\}
\end{array}
$$

Solución del apartado (b.2): Demostración de la inconsistencia del conjunto de cláusulas:

$$
\begin{array}{lll}
1 & \{\neg S(x), A(x)\} & \\
2 & \{\neg C(x), \neg A(x), R(x,f(x))\} & \\
3 & \{\neg R(x,y), S(x), \neg R(x,b)\} & \\
4 & \{\neg S(a)\} & \\
5 & \{R(a,b)\} & \\
6 & \{S(a)\} & \text{Resolvente de } 3 \text{ y } 5 \text{ con } \sigma_1 = [x/a, y/b] \\
7 & \Box & \text{Resolvente de } 6 \text{ y } 4 \text{ con } \sigma_2 = \epsilon
\end{array}
$$

Por tanto, un subconjunto de su extensión de Herbrand inconsistente es el formado por

$$
\begin{array}{l}
C_3\sigma_1 = \{\neg R(a,b), S(a)\} \\
C_5\sigma_1 = \{R(a,b)\} \\
C_4\sigma_2 = \{\neg S(a)\}
\end{array}
$$

Solución del apartado (c): La formalización de la conclusión es

$$R(a,b) \to A(a)$$

La forma clausal de su negación es

$$\{\{R(a,b)\}, \{\neg A(a)\}\}$$

La demostración por resolución es

$$
\begin{array}{lll}
1 & \{\neg S(x), A(x)\} & \\
2 & \{\neg R(x,y), S(x), \neg R(x,b)\} & \\
3 & \{R(a,b)\} & \\
4 & \{\neg A(a)\} & \\
5 & \{S(a)\} & \text{Resolvente de } 3 \text{ y } 5 \text{ con } \sigma = [x/a, y/b] \\
6 & \{A(a)\} & \text{Resolvente de } 5 \text{ y } 1 \text{ con } \sigma = [x/a] \\
6 & \Box & \text{Resolvente de } 6 \text{ y } 4 \text{ con } \sigma_2 = \epsilon
\end{array}
$$