Examen de *Lógica informática* (28 de Septiembre de 2004)

Ejercicio 1 (2 puntos) *En un texto de Lewis Carroll, el tío Jorge y el tío Jaime discuten acerca de la barbería del pueblo, atendida por tres barberos: Alberto, Benito y Carlos. Los dos tíos aceptan las siguientes premisas:*

1. *Si Carlos no está en la barbería, entonces ocurrirá que si tampoco está Alberto, Benito tendrá que estar para atender el establecimiento.*
2. *Si Alberto no está, tampoco estará Benito.*

El tío Jorge concluye de todo esto que Carlos no puede estar ausente, mientras que el tío Jaime afirma que sólo puede concluirse que Carlos y Alberto no pueden estar ausentes a la vez. Decide con el método de los tableros semánticos cuál de los dos tiene razón.

Solución: En la representación del problema usaremos los siguientes símbolos proposicionales

a representa que Alberto está en la barbería
b representa que Benito está en la barbería
c representa que Carlos está en la barbería

Luego,

$\neg a$ representa que Alberto está ausente
$\neg b$ representa que Benito está ausente
$\neg c$ representa que Carlos está ausente

Con dicha notación, la representación de la primera premisa es

$\neg c \rightarrow (\neg a \rightarrow b)$

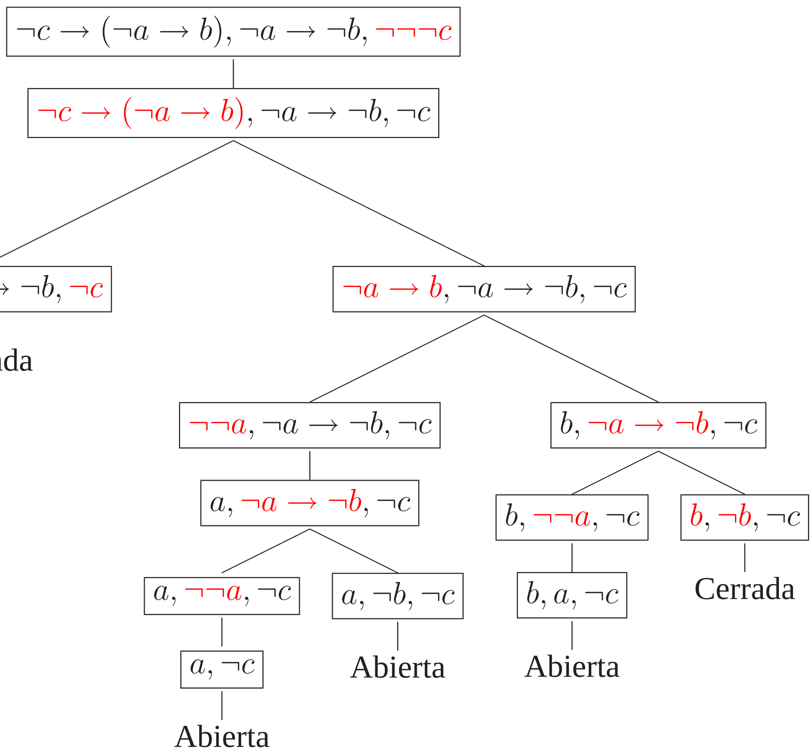
y la de la segunda es

$\neg a \rightarrow \neg b$

La representación de la conclusión del tío Jorge es $\neg\neg c$. Por tanto, el tío Jorge tiene razón si

$\{\neg c \rightarrow (\neg a \rightarrow b), \neg a \rightarrow \neg b\} \models \neg\neg c$

o, equivalentemente, si $\{\neg c \rightarrow (\neg a \rightarrow b), \neg a \rightarrow \neg b, \neg\neg\neg c\}$ es inconsistente. Puesto que el árbol

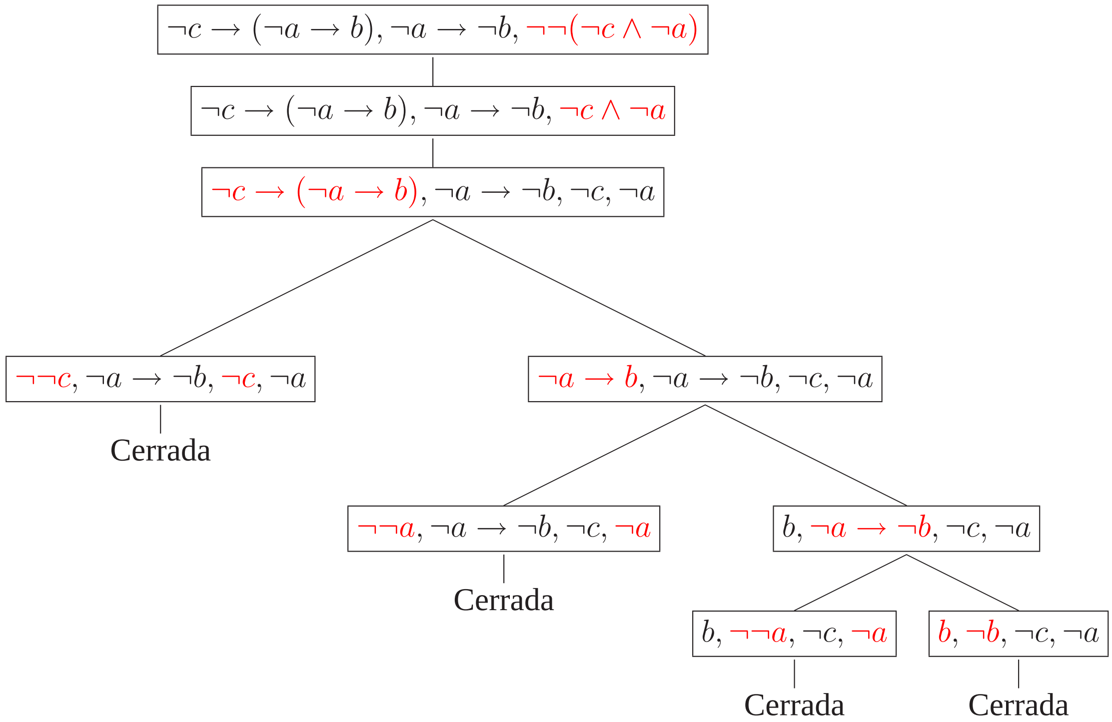


no es cerrado, el conjunto $\{\neg c \to (\neg a \to b), \neg a \to \neg b, \neg c\}$ es consistente (por ejemplo, es posible que Alberto esté en la barbería y Carlos no esté). Por tanto, el tío Jorge no tiene razón.

La representación de la conclusión del tío Jaime es $\neg(\neg c \land \neg a)$. Por tanto, el tío Jaime tiene razón si

$$\{\neg c \to (\neg a \to b), \neg a \to \neg b\} \models \neg(\neg c \land \neg a)$$

o, equivalentemente, si $\{\neg c \to (\neg a \to b), \neg a \to \neg b, \neg\neg(\neg c \land \neg a)\}$ es inconsistente. Puesto que el árbol



es cerrado, el conjunto $\{\neg c \to (\neg a \to b), \neg a \to \neg b, \neg\neg(\neg c \land \neg a)\}$ es inconsistente. Por tanto, el tío Jaime tiene razón.

Ejercicio 2 (2 puntos) *Prueba que la fórmula* $(E \to (F \land G)) \to (E \to F) \lor (E \to G)$ *es una tautología*

(a) *Mediante deducción natural.*

(b) *Usando formas normales.*

(c) *Por tableros semánticos.*

Solución del apartado (a): Deducción natural:

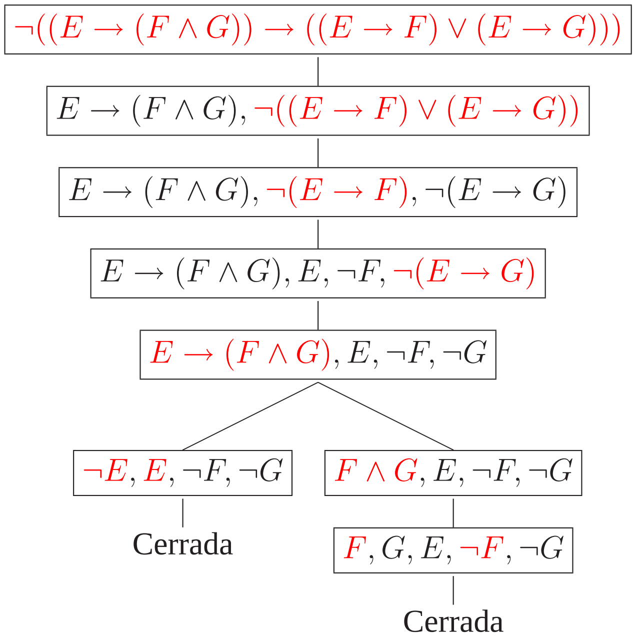
1 :	E⟶(F∧G)	supuesto
2 :	E	supuesto
3 :	F∧G	⟶e 1,2
4 :	F	∧e 3
5 :	E⟶F	⟶i 2–4
6 :	(E⟶F)∨(E⟶G)	∨i 5
7 :	(E⟶(F∧G))⟶(E⟶F)∨(E⟶G)	⟶i 1–6

Solución del apartado (b): Forma normal conjuntiva:

$$
\begin{array}{lll}
 & (E \to (F \land G)) \to (E \to F) \lor (E \to G) & \\
\equiv & \neg(\neg E \lor (F \land G)) \lor (\neg E \lor F) \lor (\neg E \lor G) & \text{[por (2)]} \\
\equiv & (\neg\neg E \land \neg(F \land G)) \lor (\neg E \lor F) \lor (\neg E \lor G) & \text{[por (4)]} \\
\equiv & (E \land (\neg F \lor \neg G)) \lor (\neg E \lor F) \lor (\neg E \lor G) & \text{[por (3) y (5)]} \\
\equiv & (E \land (\neg F \lor \neg G)) \lor (\neg E \lor F \lor G) & \\
\equiv & (E \lor (\neg E \lor F \lor G)) \land ((\neg F \lor \neg G) \lor (\neg E \lor F \lor G)) & \text{[por (7)]} \\
\equiv & (E \lor \neg E \lor F \lor G) \land (\neg F \lor \neg G \lor \neg E \lor F \lor G) &
\end{array}
$$

Puesto que en cada una de las dos conjunciones hay un par de literales complementarios, la fórmula es una tautología.

Solución del apartado (c): Tablero semántico:



Ejercicio 3 (2 puntos) *Prueba la inconsistencia del conjunto de fórmulas:*

$$U = \{\neg E \to F \lor G,\ E \to F \lor G,\ G \to F,\ F \to E,\ E \to \neg F\}$$

(a) Demostrando que no tiene modelos.

(b) Por resolución

Solución del apartado (a): Cálculo de modelos de U

E	F	G	$\neg E \to F \lor G$	$E \to F \lor G$	$G \to F$	$F \to E$	$E \to \neg F$
1	1	1					0
1	1	0					0
1	0	1			0		
1	0	0		0			
0	1	1				0	
0	1	0				0	
0	0	1			0		
0	0	0	0				

Puesto que cada una de las 8 interpretaciones falsifica alguna fórmula de U, el conjunto U no tiene modelos.

Solución del apartado (b): Las formas clausales de las fórmulas de U son

$$
\begin{array}{lll}
 & \neg E \to F \lor G & \\
\equiv & \neg\neg E \lor F \lor G & \text{[por (2)]} \\
\equiv & E \lor F \lor G & \text{[por (5)]} \\
\equiv & \{\{E, F, G\}\} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
 & E \to F \lor G & \\
\equiv & \neg E \lor F \lor G & \text{[por (2)]} \\
\equiv & \{\{\neg E, F, G\}\} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
 & G \to F & \\
\equiv & \neg G \lor F & \text{[por (2)]} \\
\equiv & \{\{\neg G, F\}\} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
 & F \to E & \\
\equiv & \neg F \lor E & \text{[por (2)]} \\
\equiv & \{\{\neg F, E\}\} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
 & E \to \neg F & \\
\equiv & \neg E \lor \neg F & \text{[por (2)]} \\
\equiv & \{\{\neg E, \neg F\}\} &
\end{array}
$$

Una refutación de U por resolución es

1	$\{E, F, G\}$	
2	$\{\neg E, F, G\}$	
3	$\{\neg G, F\}$	
4	$\{\neg F, E\}$	
5	$\{\neg E, \neg F\}$	
6	$\{\neg F\}$	Resolvente de 4 y 5
7	$\{\neg G\}$	Resolvente de 6 y 3
8	$\{E, G\}$	Resolvente de 1 y 6
9	$\{E\}$	Resolvente de 8 y 7
10	$\{F, G\}$	Resolvente de 2 y 10
11	$\{G\}$	Resolvente de 10 y 6
12	$\square$	Resolvente de 11 y 7

Ejercicio 4 (2 puntos) *Sea L un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado P de aridad 2. Se consideran las fórmulas*

(a) Probar que las fórmulas $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$ y $(\exists x)(\forall y)P(x,y)$ no son equivalentes dando una estructura que sea modelo de la primera pero no de la segunda.

(b) En la estructura M cuyo universo es $|M| = \{a, b, c\}$ y $P^M = \{(a,a), (a,b), (a,c)\}$, ¿cuáles de las siguientes fórmulas se satisfacen y cuáles no?

1. $(\forall x)(\exists y)P(x,y) \to (\exists x)(\forall y)P(x,y)$
2. $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \to (\forall x)(\exists y)P(x,y)$
3. $\neg[(\forall x)(\exists y)P(x,y) \land (\exists x)(\forall y)P(x,y)]$

Solución del apartado (a): Basta encontrar un modelo de Herbrand de

$S = \{(\forall x)(\exists y)P(x,y), \neg(\exists x)(\forall y)P(x,y)\}$

Para ello calculamos una forma clausal del conjunto anterior

$$\begin{array}{ll} & (\forall x)(\exists y)P(x,y) \\ \equiv_{sat} & (\forall x)P(x,f(x)) \quad [f \text{ función de Skolem}] \\ \equiv & \{\{P(x,f(x))\}\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & \neg(\exists x)(\forall y)P(x,y) \\ \equiv & (\forall x)(\exists y)\neg P(x,y) \\ \equiv_{sat} & (\forall x)\neg P(x,g(x)) \quad [g \text{ función de Skolem}] \\ \equiv & \{\{\neg P(x,g(x))\}\} \end{array}$$

Una forma clausal de S es $\{\{P(x,f(x)\},\{\neg P(x,g(x)\}\}$.

El universo de Herbrand de S es UH$(S) = \{a, f(a), f(f(a)), \dots, g(a), g(g(a)), \dots\}$. Un modelo de Herbrand de S es $\mathcal{I} = \{P(x,f(x)) : x \in \text{UH}(S)\}$.

Solución del apartado (b.1):

$$\mathcal{M}((\forall x)(\exists y)P(x,y) \to (\exists x)(\forall y)P(x,y)) = H_{\to}(\mathcal{M}((\forall x)(\exists y)P(x,y)), \mathcal{M}((\exists x)(\forall y)P(x,y))) \quad (1)$$

$$\mathcal{M}((\forall x)(\exists y)P(x,y)) = \mathsf{V} \iff \begin{array}{l} \mathcal{M}_{[x/a]}((\exists y)P(x,y)) = \mathsf{V} \text{ y} \\ \mathcal{M}_{[x/b]}((\exists y)P(x,y)) = \mathsf{V} \text{ y} \\ \mathcal{M}_{[x/c]}((\exists y)P(x,y)) = \mathsf{V} \end{array} \quad (2)$$

$$\mathcal{M}_{[x/b]}((\exists y)P(x,y)) = \mathsf{V} \iff \begin{array}{l} \mathcal{M}_{[x/b,y/a]}(P(x,y)) = \mathsf{V} \text{ o} \\ \mathcal{M}_{[x/b,y/b]}(P(x,y)) = \mathsf{V} \text{ o} \\ \mathcal{M}_{[x/b,y/c}(P(x,y)) = \mathsf{V} \end{array} \quad (3)$$

$$\mathcal{M}_{[x/b,y/a]}(P(x,y)) = P^M(b,a) = \mathsf{F} \quad (4)$$

$$\mathcal{M}_{[x/b,y/b]}(P(x,y)) = P^M(b,b) = \mathsf{F} \quad (5)$$

$$\mathcal{M}_{[x/b,y/c]}(P(x,y)) = P^M(b,c) = \mathsf{F} \quad (6)$$

De (3), (4), (5) y (6) se tiene

$$\mathcal{M}_{[x/b]}((\exists y)P(x,y)) = \mathsf{F} \quad (7)$$

De (7) y (2) se tiene

$$\mathcal{M}((\forall x)(\exists y)P(x,y)) = \mathsf{F} \quad (8)$$

De (8) y (1) se tiene

$$\mathcal{M}((\forall x)(\exists y)P(x,y) \to (\exists x)(\forall y)P(x,y)) = \mathsf{V}$$

Solución del apartado (b.2):

$$\mathcal{M}((\exists x)(\forall y)P(x,y) \to (\forall x)(\exists y)P(x,y)) = H_{\to}(\mathcal{M}((\exists x)(\forall y)P(x,y)), \mathcal{M}((\forall x)(\exists y)P(x,y))) \quad (9)$$

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{M}((\exists x)(\forall y)P(x,y)) = \mathsf{V} & \Longleftrightarrow & \mathcal{M}_{[x/a]}((\forall y)P(x,y)) = \mathsf{V} \text{ o} \\ & & \mathcal{M}_{[x/b]}((\forall y)P(x,y)) = \mathsf{V} \text{ o} \\ & & \mathcal{M}_{[x/c]}((\forall y)P(x,y)) = \mathsf{V} \end{array} \tag{10}$$

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{M}_{[x/a]}((\forall y)P(x,y)) = \mathsf{V} & \Longleftrightarrow & \mathcal{M}_{[x/a,y/a]}(P(x,y)) = \mathsf{V} \text{ y} \\ & & \mathcal{M}_{[x/a,y/b]}(P(x,y)) = \mathsf{V} \text{ y} \\ & & \mathcal{M}_{[x/a,y/c]}(P(x,y)) = \mathsf{V} \end{array} \tag{11}$$

$$\mathcal{M}_{[x/a,y/a]}(P(x,y)) = P^M(a,a) = \mathsf{V} \tag{12}$$

$$\mathcal{M}_{[x/a,y/b]}(P(x,y)) = P^M(a,b) = \mathsf{V} \tag{13}$$

$$\mathcal{M}_{[x/a,y/c]}(P(x,y)) = P^M(a,c) = \mathsf{V} \tag{14}$$

De (11), (12), (13) y (14) se tiene

$$\mathcal{M}_{[x/a]}((\forall y)P(x,y)) = \mathsf{V} \tag{15}$$

De (10) y (15) se tiene

$$\mathcal{M}((\exists x)(\forall y)P(x,y)) = \mathsf{V} \tag{16}$$

De (9), (16) y (8) se tiene

$$\mathcal{M}((\exists x)(\forall y)P(x,y) \to (\forall x)(\exists y)P(x,y)) = H_{\to}(\mathsf{V},\mathsf{F}) = \mathsf{F}$$

Solución del apartado (b.3):

$$\begin{array}{ll} & \mathcal{M}(\neg[(\forall x)(\exists y)P(x,y) \land (\exists x)(\forall y)P(x,y)]) \\ = & H_{\neg}(\mathcal{M}((\forall x)(\exists y)P(x,y) \land (\exists x)(\forall y)P(x,y))) \\ = & H_{\neg}(H_{\land}(\mathcal{M}((\forall x)(\exists y)P(x,y)), \mathcal{M}((\exists x)(\forall y)P(x,y)))) \\ = & H_{\neg}(H_{\land}(\mathsf{F},\mathsf{V})) \qquad \text{[por (8) y (16)]} \\ = & H_{\neg}(\mathsf{F}) \\ = & \mathsf{V} \end{array}$$

Ejercicio 5 (2 puntos) *Decide cuáles de las siguientes consecuencias lógicas son válidas. Para ello, da una prueba por deducción natural y otra por resolución de las válidas y calcula un modelo de Herbrand en el que no se verifique las que no son válidas.*

1. $(\forall x)P(x) \lor (\forall x)Q(x) \models (\forall x)[P(x) \lor Q(x)]$
2. $(\forall x)[P(x) \lor Q(x)] \models (\forall x)P(x) \lor (\forall x)Q(x)$
3. $(\exists x)[P(x) \land Q(x)] \models (\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x)$

Solución del apartado (1): Para decidir si $(\forall x)P(x) \lor (\forall x)Q(x) \models (\forall x)[P(x) \lor Q(x)]$, basta comprobar si $S = \{(\forall x)P(x) \lor (\forall x)Q(x), \neg(\forall x)[P(x) \lor Q(x)]\}$ es inconsistente. Comprobaremos la inconsistencia de S por resolución. Para ello, comenzamos calculando una forma clausal de S.

$$\begin{array}{ll} & (\forall x)P(x) \lor (\forall x)Q(x) \\ \equiv & (\forall x)P(x) \lor (\forall y)Q(y) \\ \equiv & (\forall x)(\forall y)[P(x) \lor Q(y)] \\ \equiv & \{\{P(x), Q(y)\}\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & \neg(\forall x)[P(x) \lor Q(x)] \\ \equiv & (\exists x)\neg(P(x) \lor Q(x)) \\ \equiv & (\exists x)[\neg P(x) \land \neg Q(x)] \\ \equiv_{sat} & \neg P(a) \land \neg Q(a) \\ \equiv & \{\{\neg P(a)\}, \{\neg Q(a)\}\} \end{array}$$

Una demostración por resolución de S es

1	$\{P(x), Q(y)\}$	
2	$\{\neg P(a)\}$	
3	$\{\neg Q(a)\}$	
4	$\{Q(a)\}$	Resolvente de 1 y 2
5	$\square$	Resolvente de 3 y 4

Demostración por deducción natural:

```
 1 : ∀x.P(x)∨∀x.Q(x)         premisa
 2 : | ∀x.P(x)               supuesto
 3 : | | actual i            supuesto
 4 : | | P(i)                ∀e  2,3
 5 : | | P(i)∨Q(i)           ∨i  4
 6 : | ∀x.(P(x)∨Q(x))        ∀i  3−5
 7 : | ∀x.Q(x)               supuesto
 8 : | | actual i1           supuesto
 9 : | | Q(i1)               ∀e  7,8
10 : | | P(i1)∨Q(i1)         ∨i  9
11 : | ∀x.(P(x)∨Q(x))        ∀i  8−10
12 : ∀x.(P(x)∨Q(x))          ∨e  1,2−6,7−11
```

Solución del apartado (2): Para decidir si $(\forall x)[P(x) \lor Q(x)] \models (\forall x)P(x) \lor (\forall x)Q(x)$ basta comprobar si $S = \{(\forall x)[P(x) \lor Q(x)], \neg((\forall x)P(x) \lor (\forall x)Q(x))\}$ es inconsistente. Comprobaremos la inconsistencia de S por resolución. Para ello, comenzamos calculando una forma clausal de S.

$$\begin{array}{ll} & (\forall x)[P(x) \lor Q(x)] \\ \equiv & \{\{P(x), Q(x)\}\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 & \neg((\forall x)P(x) \lor (\forall x)Q(x)) \\
\equiv & \neg((\forall x)P(x) \lor (\forall y)Q(y)) \\
\equiv & \neg(\forall x)P(x) \land \neg(\forall y)Q(y) \\
\equiv & (\exists x)\neg P(x) \land (\exists y)\neg Q(y) \\
\equiv & (\exists x)(\exists y)[\neg P(x) \land \neg Q(y)] \\
\equiv_{sat} & \neg P(a) \land \neg Q(b) \qquad\qquad [a \text{ y } b \text{ constantes de Skolem}] \\
\equiv & \{\{\neg P(a)\}, \{\neg Q(b)\}\}
\end{array}$$

Las cláusulas de la forma clausal de S son:

1 $\{P(x), Q(x)\}$
2 $\{\neg P(a)\}$
3 $\{\neg Q(b)\}$

Veamos el proceso de saturación por resolución:
Al resolver 2 con 2 no se obtiene resolvente.
Al resolver 3 con 2 y 3 no se obtiene resolvente.
Al resolver 1 con 2, 3 y 1 se obtiene
4 $\{Q(a)\}$ (resolvente de 1 y 2)
5 $\{P(b)\}$ (resolvente de 1 y 3)
Al resolver 4 con 2, 3, 1 y 4 no se obtiene resolvente.
Al resolver 5 con 2, 3, 1, 4 y 5 no se obtiene resolvente.

Al no obtenerse la cláusula vacía, se tiene que S es consistente y, por tanto,
$(\forall x)[P(x) \lor Q(x)] \not\models (\forall x)P(x) \lor (\forall x)Q(x)$.
Además, un modelo de Herbrand de S es $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{a, b\}$, $P^I = \{b\}$ y $Q^I = \{a\}$.

Solución del apartado (3): Para decidir si $(\exists x)[P(x) \land Q(x)] \models (\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x)$ basta comprobar si $S = \{(\exists x)[P(x) \land Q(x)], \neg((\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x))$ es inconsistente. Comprobaremos la inconsistencia de S por resolución. Para ello, comenzamos calculando una forma clausal de S.

$$\begin{array}{ll}
 & (\exists x)[P(x) \land Q(x)] \\
\equiv_{sat} & P(a) \land Q(a) \\
\equiv & \{\{P(a)\}, \{Q(a)\}\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 & \neg((\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x)) \\
\equiv & \neg((\exists x)P(x) \land (\exists y)Q(y)) \\
\equiv & \neg(\exists x)P(x) \lor \neg(\exists y)Q(y) \\
\equiv & (\forall x)\neg P(x) \lor (\forall y)\neg Q(y) \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg P(x) \lor \neg Q(y)] \\
\equiv & \{\{\neg P(x), \neg Q(y)\}\}
\end{array}$$

Una demostración por resolución de S es

1	$\{P(a)\}$	
2	$\{Q(a)\}$	
3	$\{\neg P(x), \neg Q(y)\}$	
4	$\{\neg Q(y)\}$	Resolvente de 1 y 3
5	$\square$	Resolvente de 2 y 4

Demostración por deducción natural:

1 :	$\exists x.(P(x) \land Q(x))$	premisa
2 :	actual i, $P(i) \land Q(i)$	supuestos
3 :	$P(i)$	$\land e$ 2.2
4 :	$\exists x.P(x)$	$\exists i$ 3,2.1
5 :	$Q(i)$	$\land e$ 2.2
6 :	$\exists x.Q(x)$	$\exists i$ 5,2.1
7 :	$\exists x.P(x) \land \exists x.Q(x)$	$\land i$ 4,6
8 :	$\exists x.P(x) \land \exists x.Q(x)$	$\exists e$ 1,2−7