Soluciones de exámenes de “Lógica informática”

José A. Alonso Jiménez (jalonso@cs.us.es)
Dpto. de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Sevilla

6 de junio de 2004

Examen de Junio de 2003 (Ejercicio 2):

Supongamos conocidos los siguientes hechos acerca del número de aprobados de dos asignaturas A y B:

1. Si todos los alumnos aprueban la asignatura A, entonces todos aprueban la asignatura B.
2. Si algún delegado de la clase aprueba A y B, entonces todos los alumnos aprueban A.
3. Si nadie aprueba B, entonces ningún delegado aprueba A.
4. Si Manuel no aprueba B, entonces nadie aprueba B.

Se pide:

(a) Formalizar los enunciados anteriores en un lenguaje de primer orden usando los siguientes símbolos de predicado: $D(x)$: x es un delegado, $Ap(x, y)$: x aprueba la asignatura y. Las constantes a, b, m denotarán la asignatura A, la asignatura B y a Manuel, respectivamente.

(b) Obtener una forma clausal para el conjunto de fórmulas del apartado anterior.

(c) Probar, mediante resolución, que si Manuel es un delegado y aprueba la asignatura A, entonces todos los alumnos aprueban las asignaturas A y B.

(a) Formalización:

1. Si todos los alumnos aprueban la asignatura A, entonces todos aprueban la asignatura B.
   $(\forall x)Ap(x, a) \to (\forall y)Ap(y, b)$.
2. Si algún delegado de la clase aprueba A y B, entonces todos los alumnos aprueban A.
   $(\exists x)[D(x) \land Ap(x, a) \land Ap(x, b)] \to (\forall y)Ap(y, a)$.
3. Si nadie aprueba B, entonces ningún delegado aprueba A.
   $\neg(\exists x)Ap(x, b) \to \neg(\exists y)[D(y) \land Ap(y, a)]$.
4. Si Manuel no aprueba B, entonces nadie aprueba B.
   $\neg Ap(m, b) \to \neg(\exists x)Ap(x, b)$.

(b) Formas clausales:

1 $\{\neg Ap(c, a), Ap(y, b)\}$
2 $\{\neg D(x), \neg Ap(x, a), \neg Ap(x, b), Ap(y, a)\}$
3 $\{Ap(d, b), \neg D(y), \neg Ap(y, a)\}$
4 $\{Ap(m, b), \neg Ap(x, b)\}$

donde c, d y e son constantes de Skolem.

(c) Resolución:

Antes de hacer la resolución se formaliza la negación de la conclusión (Si Manuel es un delegado y aprueba la asignatura A, entonces todos los alumnos aprueban las asignaturas A y B):

$$\neg(D(m) \land Ap(m, a) \to (\forall x)[Ap(x, a) \land Ap(x, b)])$$

y se calcula las cláusulas correspondientes:

5 $\{D(m)\}$
6 $\{Ap(m, a)\}$
7 $\{\neg Ap(e, a), \neg Ap(e, b)\}$

La resolución es

1	$\{\neg Ap(c, a), Ap(y, b)\}$	
2	$\{\neg D(x), \neg Ap(x, a), \neg Ap(x, b), Ap(y, a)\}$	
3	$\{Ap(d, b), \neg D(y), \neg Ap(y, a)\}$	
4	$\{Ap(m, b), \neg Ap(x, b)\}$	
5	$\{D(m)\}$	
6	$\{Ap(m, a)\}$	
7	$\{\neg Ap(e, a), \neg Ap(e, b)\}$	
8	$\{Ap(d, b), \neg Ap(m, a)\}$	Resolvente de 5.1 y 3.2
9	$\{Ap(d, b)\}$	Resolvente de 8.2 y 6.1
10	$\{Ap(m, b)\}$	Resolvente de 9.1 y 4.2
11	$\{\neg D(m), \neg Ap(m, a), Ap(y, a)\}$	Resolvente de 10.1 y 2.3
12	$\{\neg Ap(m, a), Ap(y, a)\}$	Resolvente de 11.1 y 5.1
13	$\{Ap(y, a)\}$	Resolvente de 12.1 y 6.1
14	$\{Ap(x, b)\}$	Resolvente de 13.1 y 1.1
15	$\{\neg Ap(e, b)\}$	Resolvente de 7.1 y 14.1
16	$\square$	Resolvente de 15.1 y 14.1

Examen de Junio de 2003 (Ejercicio 4.1):

Consideramos el lenguaje $L_1 = \{P, f, a, b, c\}$ y el conjunto de fórmulas:

$$S = \{P(c,a) \rightarrow (\forall z)P(z,b), (\forall x)[P(f(x),x) \rightarrow (\forall z)P(z,x)], \neg P(b,c)\}$$

Pruébese, proporcionando un modelo de Herbrand, que $S \not\models P(f(a),a) \vee \neg P(f(b),b)$.

Las formas clausales de las fórmulas del problema son:

- de $P(c,a) \rightarrow (\forall z)P(z,b)$, $S_1 = \{\{\neg P(c,a), P(z,b)\}\}$;
- de $(\forall x)[P(f(x),x) \rightarrow (\forall z)P(z,x)]$, $S_2 = \{\{\neg P(f(x),x), P(z,x)\}\}$;
- de $\neg P(b,c)$, $S_3 = \{\{\neg P(b,c)\}\}$;
- de $\neg(P(f(a),a) \vee \neg P(f(b),b))$, $S_4 = \{\{\neg P(f(a),a)\}, \{P(f(b),b)\}\}$.

Vamos a calcular la saturación, por resolución y factorización, de $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$. Las cláusulas iniciales son

1 $\{\neg P(c,a), P(z,b)\}$
2 $\{\neg P(f(x),x), P(z,x)\}$
3 $\{\neg P(b,c)\}$
4 $\{\neg P(f(a),a)\}$
5 $\{P(f(b),b)\}$

Al resolver 3 con 3 no se obtiene resolvente.
Al resolver 4 con 3 y 4 no se obtiene resolvente.
Al resolver 5 con 3, 4 y 5 no se obtiene resolvente.
Al resolver 1 con 3, 4, 5 y 1 no se obtiene resolvente.
Al resolver 2 con 3, 4, 5, 1 y 2 se obtiene
6 $\{P(z,b)\}$ (resolvente de 2 y 5) y
7 $\{\neg P(f(c),c)\}$ (resolvente de 2 y 3)
La cláusula 6 subsume a la 1 y a la 5
Al resolver 6 con 3, 4, 2 y 6 no se obtiene resolvente.
Al resolver 7 con 3, 4, 2, 6 y 7 no se obtiene resolvente.

Por tanto, el saturado es

2 $\{\neg P(f(x),x), P(z,x)\}$
3 $\{\neg P(b,c)\}$
4 $\{\neg P(f(a),a)\}$
6 $\{P(z,b)\}$
7 $\{\neg P(f(c),c)\}$

El universo de Herbrand es $UH = \{a, f(a), f(f(a)), \dots, b, f(b), f(f(b)), \dots\ c, f(c), f(f(c)), \dots\}$ y un modelo de Herbrand es $I = \{P(z,b) : z \in UH\}$.

Examen de Septiembre 2003 (Ejercicio 3.1):

Hallar las formas prenexa, de Skolem y clausal de la fórmula:

$$\neg(\exists x)(\forall z)[P(x) \to \neg Q(z)] \lor ((\exists z)A(y,z) \to (\exists u)B(y,u))$$

1.– Forma prenexa:

$$\begin{array}{lll}
 & \neg(\exists x)(\forall z)[P(x) \to \neg Q(z)] \lor ((\exists z)A(y,z) \to (\exists u)B(y,u)) & \\
\equiv & \neg(\exists x)(\forall z)[P(x) \to \neg Q(z)] \lor ((\exists v)A(y,v) \to (\exists u)B(y,u)) & \text{[por (2)]} \\
\equiv & \neg(\exists x)(\forall z)[\neg P(x) \lor \neg Q(z)] \lor (\neg(\exists v)A(y,v) \lor (\exists u)B(y,u)) & \text{[por (4)]} \\
\equiv & (\forall x)(\exists z)\neg(\neg P(x) \lor \neg Q(z)) \lor ((\forall v)\neg A(y,v) \lor (\exists u)B(y,u)) & \text{[por (8) y (9)]} \\
\equiv & (\forall x)(\exists z)[\neg\neg P(x) \land \neg\neg Q(z)] \lor ((\forall v)\neg A(y,v) \lor (\exists u)B(y,u)) & \text{[por (5)]} \\
\equiv & (\forall x)(\exists z)[P(x) \land Q(z)] \lor ((\forall v)\neg A(y,v) \lor (\exists u)B(y,u)) & \text{[por (7)]} \\
\equiv & (\exists u)(\forall x)(\exists z)(\forall v)[(P(x) \land Q(z)) \lor (\neg A(y,v) \lor B(y,u))] & \text{[por (11)–(18)]}
\end{array}$$

2.– Forma de Skolem:

$$\begin{array}{lll}
 & (\exists u)(\forall x)(\exists z)(\forall v)[(P(x) \land Q(z)) \lor (\neg A(y,v) \lor B(y,u))] & \\
\equiv_{sat} & (\exists y)(\exists u)(\forall x)(\exists z)(\forall v)[(P(x) \land Q(z)) \lor (\neg A(y,v) \lor B(y,u))] & \text{[cierre existencial]} \\
\equiv_{sat} & (\exists u)(\forall x)(\exists z)(\forall v)[(P(x) \land Q(z)) \lor (\neg A(c,v) \lor B(c,u))] & [c \text{ constante de Skolem}] \\
\equiv_{sat} & (\forall x)(\exists z)(\forall v)[(P(x) \land Q(z)) \lor (\neg A(c,v) \lor B(c,d))] & [d \text{ constante de Skolem}] \\
\equiv_{sat} & (\forall x)(\forall v)[(P(x) \land Q(f(x))) \lor (\neg A(c,v) \lor B(c,d))] & [f \text{ función de Skolem}]
\end{array}$$

3.– Forma clausual:

$$\begin{array}{lll}
 & (\forall x)(\forall v)[(P(x) \land Q(f(x))) \lor (\neg A(c,v) \lor B(c,d))] & \\
\equiv & (\forall x)(\forall v)[(P(x) \lor \neg A(c,v) \lor B(c,d)) \land [(Q(f(x)) \lor \neg A(c,v) \lor B(c,d))] & \text{[por (20)]} \\
\equiv & \{\{(P(x), \neg A(c,v), B(c,d)\}, \{Q(f(x)), \neg A(c,v), B(c,d)\}\} &
\end{array}$$

Examen de Septiembre 2003 (Ejercicio 3.2):

Consideremos el lenguaje $L_1 = \{P, f, a, b\}$ y el conjunto de fórmulas:

$$S = \{(\forall x)[P(a,x) \to P(b,f(x))], (\forall x)[P(f(x),x) \to (\forall z)P(z,b)], P(a,f(a)) \wedge P(f(b),b)\}$$

Pruébese, proporcionando un modelo de Herbrand, que $S \not\models (\exists x)[P(x,a) \wedge P(f(x),b)]$.

Las formas clausales de las fórmulas del problema son:

- de $(\forall x)[P(a,x) \to P(b,f(x))]$, $S_1 = \{\{\neg P(a,x), P(b,f(x))\}\}$;
- de $(\forall x)[P(f(x),x) \to (\forall z)P(z,b)]$, $S_2 = \{\{\neg P(f(x),x), P(z,b)\}\}$;
- de $P(a,f(a)) \wedge P(f(b),b)$, $S_3 = \{\{P(a,f(a))\}, \{P(f(b),b)\}\}$;
- de $\neg(\exists x)[P(x,a) \wedge P(f(x),b)$, $S_4 = \{\{\neg P(x,a), \neg P(f(x),b)\}\}$.

Vamos a calcular la saturación, por resolución y factorización, de $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$. Las cláusulas iniciales son

1 $\{\neg P(a,x), P(b,f(x))\}$
2 $\{\neg P(f(x),x), P(z,b)\}$
3 $\{P(a,f(a))\}$
4 $\{P(f(b),b)\}$
5 $\{\neg P(x,a), \neg P(f(x),b)\}$

Al resolver 3 con 3 no se obtiene resolvente.
Al resolver 4 con 3 y 4 no se obtiene resolvente.
Al resolver 1 con 3, 4 y 1 se obtiene
6 $\{P(b,f(f(a)))\}$ (resolvente de 1 y 3).
Al resolver 6 con 3, 4, 1 y 6 no se obtiene resolvente.
Al resolver 2 con 3, 4, 1, 6 y 2 se obtiene
7 $\{P(z,b)\}$ (resolvente de 2 y 4) y
8 $\{-P(f(x),x), P(b,f(b))\}$ (resolvente de 2 y 1).
La cláusula 7 subsume a la 2 y a la 4.
Al resolver 7 con 3, 1, 6 y 7 se obtiene
9 $\{P(b,f(b))\}$ (resolvente de 7 y 1)
La cláusula 9 subsume a la 8
Al resolver 9 con 3, 1, 6, 7 y 9 no se obtiene resolventes.
Al resolver 5 con 3, 1, 6, 7, 9 y 5 se obtiene
10 $\{\neg P(x,a)\}$ (resolvente de 5 y 7) *La cláusula 10 subsume a la 5*

Por tanto, el saturado es

1 $\{\neg P(a,x), P(b,f(x))\}$
3 $\{P(a,f(a))\}$
6 $\{P(b,f(f(a)))\}$
7 $\{P(z,b)\}$
9 $\{P(b,f(b))\}$
10 $\{\neg P(x,a)\}$

El universo de Herbrand es $UH = \{a, f(a), f(f(a)), \dots, b, f(b), f(f(b)), \dots\}$ y un modelo de Herbrand es $I = \{P(a,f(a)), P(b,f(f(a))), P(b,f(b)), P(z,b) : z \in UH\}$

Examen de Septiembre 2003 (Ejercicio 4):

Consideremos los siguientes hechos acerca de la sucesión de los integrantes de la monarquía inglesa:

1. El primogénito de un rey hereda la corona de dicho rey.
2. Si alguien derrota a un rey entonces hereda su corona.
3. Si alguien hereda la corona de un rey entonces se convierte en rey.
4. Enrique VIII era el primogénito de Enrique VII.
5. Ricardo III era rey y Enrique VII derrotó a Ricardo III.

Se pide:

(a) Formalizar los enunciados anteriores en un lenguaje de primer orden usando los símbolos de predicado: $D(x, y)$: x derrota a y, $H(x, y)$: x hereda la corona de y, $R(x)$: x es rey, $P(x, y)$: x es el primogénito de y. Las constantes a, b, c denotarán, respectivamente, a Ricardo III, Enrique VII y Enrique VIII.

(b) A partir de la información anterior, probar, mediante resolución, que Enrique VIII fue rey.

(a) La formalización del problema es:

1. El primogénito de un rey hereda la corona de dicho rey:
   $(\forall x)(\forall y)[R(y) \wedge P(x, y) \to H(x, y)]$.
2. Si alguien derrota a un rey entonces hereda su corona:
   $(\forall x(\forall y)[D(x, y) \wedge R(y) \to H(x, y)]$.
3. Si alguien hereda la corona de un rey entonces se convierte en rey :
   $(\forall x)[(\exists y)[R(y) \wedge H(x, y)] \to R(x)]$.
4. Enrique VIII era el primogénito de Enrique VII:
   $P(c, b)$.
5. Ricardo III era rey y Enrique VII derrotó a Ricardo III:
   $R(a) \wedge D(b, a)$.

(b) Resolución:

Para realizar la refutación tenemos que formalizar la negación de la conclusión y obtener las correspondientes formas clausales.

La formalización de la negación de la conclusión es $\neg R(c)$.

Las clásulas correspondientes a los hechos y a la negación de la conclusión son

1 $\{\neg R(y), \neg P(x, y), H(x, y)\}$
2 $\{\neg D(x, y), \neg R(y), H(x, y)\}$
3 $\{\neg R(y), \neg H(x, y), R(x)\}$
4 $\{P(c, b)\}$
5 $\{R(a)\}$
6 $\{D(b, a)\}$
7 $\{\neg R(c)\}$

Una refutación es

1	$\{\neg R(y), \neg P(x,y), H(x,y)\}$	
2	$\{\neg D(x,y), \neg R(y), H(x,y)\}$	
3	$\{\neg R(y), \neg H(x,y), R(x)\}$	
4	$\{P(c,b)\}$	
5	$\{R(a)\}$	
6	$\{D(b,a)\}$	
7	$\{\neg R(c)\}$	
8	$\{\neg R(x), \neg H(c,x)\}$	Resolvente 7.1 y 3.3
9	$\{\neg R(x), \neg P(c,x)\}$	Resolvente 8.2 y 1.3
10	$\{\neg R(b)\}$	Resolvente 9.2 y 4.1
11	$\{\neg R(x), \neg H(b,x)\}$	Resolvente 10.1 y 3.3
12	$\{\neg H(b,a)\}$	Resolvente 11.1 y 5.1
13	$\{\neg D(b,a), \neg R(a)\}$	Resolvente 12.1 y 2.3
14	$\{\neg R(a)\}$	Resolvente 13.1 y 6.1
15	$\square$.	Resolvente 14.1 y 5.1