Tema 10: Resolución

José A. Alonso Jiménez
Andrés Cordón Franco

Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial

Universidad de Sevilla

Resolución no restringida

- **Resolvente no restringida**
  - **Def.: La cláusula C es una resolvente no restringida de las cláusulas C_1 y C_2 si existen dos sustituciones σ_1 y σ_2 y un literal $L \in C_1\sigma_1$ tales que $L^c \in C_2\sigma_2$ y**

$$C = (C_1\sigma_1 \setminus \{L\sigma_1\}) \cup (C_2\sigma_2 \setminus \{L^c\sigma_2\}).$$

  - **Sean**
$$\begin{array}{ll}
C_1 & = \{\neg R(x, f(y)), P(x, f(z)), Q(f(z))\}, \\
C_2 & = \{R(z, f(z)), R(f(y), u), Q(z)\}, \\
\sigma_1 & = [x/f(y), y/f(y), z/y], \\
C_1\sigma_1 & = \{\neg R(f(y), f(f(y))), P(f(f(y)), f(y)), Q(f(y))\}, \\
\sigma_2 & = [z/f(y), u/f(f(y))], \\
C_2\sigma_2 & = \{R(f(y), f(f(y))), R(f(y), f(f(y)), Q(f(y)))\}, \\
L & = \neg R(f(y), f(f(y)))
\end{array}$$

    Entonces, una resolvente no restringida de C_1 y C_2 es

$$C = \{P(f(f(y)), f(y)), Q(f(y))\}$$

Resolución no restringida

- **Ejemplos de refutación por resolución no restringida:**
  - **Refutación no restringida de**

$$S = \{\{\neg P(x), Q(f(x), x)\}, \{P(g(b))\}, \{\neg Q(y, z)\}\}$$

1	$\{\neg P(x), Q(f(x), x)\}$	Hipótesis
2	$\{P(g(b))\}$	Hipótesis
3	$\{\neg Q(y, z)\}$	Hipótesis
4	$\{\neg Q(f(g(b)), g(b))\}$	Resolvente de 1 y 2
5	$\square$	Resolvente de 3 y 4

Resolución no restringida

- **Refutación no restringida de**

$$\{\{R(c)\}, \{R(f(c))\}, \{\neg R(x), P(x)\}, \{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(c), \neg Q(f(c)), \neg R(c)\}\}$$

1	$\{R(c)\}$	**Hipótesis**
2	$\{R(f(c))\}$	**Hipótesis**
3	$\{\neg R(x), P(x)\}$	**Hipótesis**
4	$\{\neg P(x), Q(x)\}$	**Hipótesis**
5	$\{\neg Q(c), \neg Q(f(c)), \neg R(c)\}$	**Hipótesis**
6	$\{\neg R(x), Q(x)\}$	**Resolvente de 3 y 4**
7	$\{Q(c)\}$	**Resolvente de 1 y 6**
8	$\{Q(f(c))\}$	**Resolvente de 2 y 6**
9	$\{\neg Q(f(c)), \neg R(c)\}$	**Resolvente de 5 y 7**
10	$\{\neg R(c)\}$	**Resolvente de 8 y 9**
10	$\square$	**Resolvente de 1 y 10**

Resolución no restringida

- **Definiciones**
  - **Sea S un conjunto de cláusulas.**
  - **La sucesión $(C_1, \ldots, C_n)$ es una demostración por resolución no restringida de la cláusula C a partir de S si $C = C_n$ y para todo $i \in \{1, ..., n\}$ se verifica una de las siguientes condiciones:**
    - **$C_i \in S$;**
    - **existen $j, k < i$ tales que C_i es una resolvente no restringida de C_j y C_k**
  - **La cláusula C es demostrable por resolución no restringida a partir de S si existe una demostración por resolución de C a partir de S.**
  - **Una refutación por resolución no restringida de S es una demostración por resolución de la cláusula vacía a partir de S.**
  - **Se dice que S es refutable por resolución no restringida si existe una refutación por resolución a partir de S.**

Resolución no restringida

- **Demostraciones por resolución**

  - **Def.: Sean $S_1, \ldots, S_n$ formas clausales de las fórmulas $F_1, \ldots, F_n$ y S una forma clausal de $\neg F$. Una demostración por resolución no restringida de F a partir de $\{F_1, \ldots, F_n\}$ es una refutación por resolución no restringida de $S_1 \cup \ldots \cup S_n \cup S$.**

  - **Def.: La fórmula F es demostrable por resolución no restringida a partir de $\{F_1, \ldots, F_n\}$ si existe una demostración por resolución no restringida de F a partir de $\{F_1, \ldots, F_n\}$.**
    Se representa por $\{F_1, \ldots, F_n\} \vdash_{ResNoR} F$.

  - **Ejemplo: Demostración por resolución no restringida de $(\exists x)P(g(x))$ a partir de $\{(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(f(x), x)], \neg(\exists y)(\exists z)Q(y, z)\}$**

1	$\{\neg P(x), Q(f(x), x)\}$	Hipótesis
2	$\{\neg Q(y, z)\}$	Hipótesis
3	$\{P(g(b))\}$,	Hipótesis
4	$\{\neg Q(f(b(b)), g(b))\}$	Resolvente de 1 y 3
5	$\square$	Resolvente de 2 y 4

Adecuación y completitud de la resolución

- **Propiedades:**
  - **Si C es una resolvente restringida de C_1 y C_2, entonces $\{C_1, C_2\} \models C$.**
  - **Si $\Box \in S$, entonces S es inconsistente.**
  - **Si el conjunto de cláusulas S es refutable por resolución no restringida, entonces S es inconsistente.**
  - **Teor.: El cálculo de resolución no restringida es adecuado y completo; es decir,**

    Adecuado: $S \vdash_{ResNoR} F \quad \Longrightarrow \quad S \models F$

    Completo: $S \models F \quad \Longrightarrow \quad S \vdash_{ResNoR} F$

Unificación: Unificadores

- **Unificador:**
  - Def.: La sustitución σ es un unificador de los términos t_1 y t_2 si $t_1\sigma = t_2\sigma$.
  - Def.: Los términos t_1 y t_2 son unificables si tienen algún unificador.
  - Def.: t es una instancia común de t_1 y t_2 si existe una sustitución σ tal que $t = t_1\sigma = t_2\sigma$.
  - Ejemplos:

t_1	t_2	Unificador	Instancia común
$f(x, g(z))$	$f(g(y), x)$	$[x/g(z), y/z]$	$f(g(z), g(z))$
$f(x, g(z))$	$f(g(y), x)$	$[x/g(y), z/y]$	$f(g(y), g(y))$
$f(x, g(z))$	$f(g(y), x)$	$[x/g(a), y/a]$	$f(g(a), g(a))$
$f(x, y)$	$f(y, x)$	$[x/a, y/a]$	$f(a, a)$
$f(x, y)$	$f(y, x)$	$[y/x]$	$f(x, x)$
$f(x, y)$	$g(a, b)$	No tiene	No tiene
$f(x, x)$	$f(a, b)$	No tiene	No tiene
$f(x)$	$f(g(x))$	No tiene	No tiene

  - Nota: Las anteriores definiciones se extienden a conjuntos de términos y de literales.

Unificación: Composición de sustituciones

- **Composición de sustituciones:**
  - Def.: La composición de las sustituciones σ_1 y σ_2 es la sustitución $\sigma_1\sigma_2$ definida por $x(\sigma_1\sigma_2) = (x\sigma_1)\sigma_2$, para toda variable x.
  - Ejemplo: Si $\sigma_1 = [x/f(z,a), y/w]$ y $\sigma_2 = [x/b, z/g(w)]$, entonces
    - $x\sigma_1\sigma_2 = (x\sigma_1)\sigma_2 = f(z,a)\sigma_2 = f(z\sigma_2, a\sigma_2) = f(g(w),a)$
    - $y\sigma_1\sigma_2 = (y\sigma_1)\sigma_2 = w\sigma_2 = w$
    - $z\sigma_1\sigma_2 = (z\sigma_1)\sigma_2 = z\sigma_2 = g(w)$
    - $w\sigma_1\sigma_2 = (w\sigma_1)\sigma_2 = w\sigma_2 = w$

    Por tanto, $\sigma_1\sigma_2 = [x/f(g(w),a), y/w, z/g(w)]$.
  - Def.: La substitución identidad es la sustitución ϵ tal que, para todo x, $x\epsilon = x$.
  - Propiedades:
    1. Asociativa: $\sigma_1(\sigma_2\sigma_3) = (\sigma_1\sigma_2)\sigma_3$
    2. Neutro: $\sigma\epsilon = \epsilon\sigma = \sigma$.

Unificación: Comparación de sustituciones

- **Comparación de sustituciones:**
  - Def.: La sustitución σ_1 es más general que la σ_2 si existe una sustitución σ_3 tal que $\sigma_2 = \sigma_1\sigma_3$, Se representa por $\sigma_2 \leq \sigma_1$.
  - Def.: Las sustituciones σ_1 y σ_2 son equivalentes si $\sigma_1 \leq \sigma_2$ y $\sigma_2 \leq \sigma_1$. Se representa por $\sigma_1 \equiv \sigma_2$.
  - Ejemplos: Sean $\sigma_1 = [x/g(z), y/z], \sigma_2 = [x/g(y), z/y]$ y $\sigma_3 = [x/g(a), y/a]$. Entonces,
    1. $\sigma_1 = \sigma_2[y/z]$
    2. $\sigma_2 = \sigma_1[z/y]$
    3. $\sigma_3 = \sigma_1[z/a]$
    4. $\sigma_1 \equiv \sigma_2$
    5. $\sigma_3 \leq \sigma_1$
  - Ejemplo: $[x/a, y/a] \leq [y/x]$, ya que $[x/a, y/a] = [y/x][x/a, y/a]$.

Unificación: Unificador de máxima generalidad

- **Unificador de máxima generalidad:**
  - **Def.: La sustitución σ es un unificador de máxima generalidad (UMG) de los términos t_1 y t_2 si**
    - **σ es un unificador de t_1 y t_2.**
    - **σ es más general que cualquier unificador de t_1 y t_2.**
  - **Ejemplos:**
    1. **$[x/g(z), y/z]$ es un UMG de $f(x, g(z))$ y $f(g(y), x)$.**
    2. **$[x/g(y), z/y]$ es un UMG de $f(x, g(z))$ y $f(g(y), x)$.**
    3. **$[x/g(a), y/a]$ no es un UMG de $f(x, g(z))$ y $f(g(y), x)$.**
  - **Nota: Las anterior definición se extienden a conjuntos de términos y de literales.**

Unificación: Algoritmo de unificación

- **Notación de lista:**
  - $(a_1, \dots, a_n)$ representa una lista cuyos elementos son $a_1, \dots, a_n$.
  - $(a|R)$ representa una lista cuyo primer elemento es a y resto es R.
  - $()$ representa la lista vacía.

- **Unificadores de listas de términos:**
  - Def.: σ es un unificador de $(s_1 \dots, s_n)$ y $(t_1 \dots, t_n)$ si $s_1\sigma = t_1\sigma, \dots, s_n\sigma = t_n\sigma$.
  - Def.: $(s_1 \dots, s_n)$ y $(t_1 \dots, t_n)$ son unificables si tienen algún unificador.
  - Def.: σ es un unificador de máxima generalidad (UMG) de $(s_1 \dots, s_n)$ y $(t_1 \dots, t_n)$ si σ es un unificador de $(s_1 \dots, s_n)$ y $(t_1 \dots, t_n)$ más general que cualquier otro.

- **Aplicación de una sustitución a una lista de ecuaciones:**
  - $(s_1 = t_1, \dots, s_n = t_n)\sigma = (s_1\sigma = t_1\sigma, \dots, s_n\sigma = t_n\sigma)$.

- **Algoritmo de unificación de listas de términos:**
  - Entrada: Una lista de ecuaciones $L = (s_1 = t_1, \dots, s_n = t_n)$ y una sustitución σ.
  - Salida: Un UMG de las listas $(s_1 \dots, s_n)$ y $(t_1 \dots, t_n)$, si son unificables;
    "No unificables", en caso contrario.

Unificación: Algoritmo de unificación

- **Procedimiento unif(L, σ):**
  1. Si $L = ()$, entonces unif(L, σ) $= \sigma$.
  2. Si $L = (t = t|L')$, entonces unif(L, σ) $=$ unif(L', σ).
  3. Si $L = (f(t_1, \dots, t_m) = f(t'_1 \dots, t'_m)|L')$, entonces

     unif(L, σ) $=$ unif($(t_1 = t'_1, \dots, t_m = t'_m|L'), \sigma$).
  4. Si $L = (x = t|L')$ (ó $L = (t = x|L')$) y x no aparece en t, entonces

     unif(L, σ) $=$ unif($L'[x/t], \sigma[x/t]$).
  5. Si $L = (x = t|L')$ (ó $L = (t = x|L')$) y x aparece en t, entonces

     unif(L, σ) $=$ "No unificables".
  6. Si $L = (f(t_1, \dots, t_m) = g(t'_1 \dots, t'_m)|L')$, entonces

     unif(L, σ) $=$ "No unificables".
  7. Si $L = (f(t_1, \dots, t_m) = f(t'_1 \dots, t'_p)|L')$ y $m \neq p$, entonces

     unif(L, σ) $=$ "No unificables".

Unificación: Algoritmo de unificación

- **Algoritmo de unificación de dos términos:**
  - **Entrada:** Dos términos t_1 y t_2.
  - **Salida:** Un UMG de t_1 y t_2, si son unificables;
    "No unificables", en caso contrario.
  - **Procedimiento:** $\text{unif}((t_1 = t_2), \epsilon)$.
  - **Ejemplo 1:** Unificar $f(x, g(z))$ y $f(g(y), x)$:

$$
\begin{array}{lll}
 & \text{unif}((f(x,g(z)) = f(g(y),x)), \epsilon) & \\
= & \text{unif}((x = g(y), g(z) = x), \epsilon) & \text{por } 3 \\
= & \text{unif}((g(z) = x)[x/g(y)], \epsilon[x/g(y)]) & \text{por } 4 \\
= & \text{unif}((g(z) = g(y)), [x/g(y)]) & \\
= & \text{unif}((z = y), [x/g(y)]) & \text{por } 3 \\
= & \text{unif}((), [x/g(y)][z/y]) & \text{por } 4 \\
= & \text{unif}((), [x/g(y), z/y]) & \\
= & [x/g(y), z/y] & \text{por } 1
\end{array}
$$

Unificación: Algoritmo de unificación

- Ejemplo 2: Unificar $f(x, b)$ y $f(a, y)$:

$$
\begin{array}{lll}
 & \text{unif}((f(x,b) = f(a,y), \epsilon) & \\
= & \text{unif}((x = a, b = y), \epsilon) & \text{por } 3 \\
= & \text{unif}((b = y)[x/a], \epsilon[x/a]) & \text{por } 4 \\
= & \text{unif}((b = y), [x/a]) & \\
= & \text{unif}((), [x/a][y/b]) & \text{por } 4 \\
= & [x/a, y/b]) & \text{por } 1
\end{array}
$$

- Ejemplo 3: Unificar $f(x, x)$ y $f(a, b)$:

$$
\begin{array}{lll}
 & \text{unif}((f(x,x) = f(a,b), \epsilon) & \\
= & \text{unif}((x = a, x = b), \epsilon) & \text{por } 3 \\
= & \text{unif}((x = b)[x/a], \epsilon[x/a]) & \text{por } 4 \\
= & \text{unif}((a = b), [x/a]) & \\
= & \text{“No unificable”} & \text{por } 6
\end{array}
$$

- Ejemplo 4: Unificar $f(x, g(y))$ y $f(y, x)$:

$$
\begin{array}{lll}
 & \text{unif}((f(x,g(y)) = f(y,x)), \epsilon) & \\
= & \text{unif}((x = y, g(y) = x), \epsilon) & \text{por } 3 \\
= & \text{unif}((g(y) = x)[x/y], \epsilon[x/y]) & \text{por } 4 \\
= & \text{unif}((g(y) = y), [x/y]) & \\
= & \text{“No unificable”} & \text{por } 5
\end{array}
$$

Unificación: Algoritmo de unificación

- **Ejemplo 5: Unificar $j(w, a, h(w))$ y $j(f(x, y), x, z)$**

$$
\begin{array}{lll}
& \text{unif}((j(w,a,h(w)) = j(f(x,y),x,z))\epsilon) & \\
= & \text{unif}((w = f(x,y), a = x, h(w) = z), \epsilon) & \text{por } 3 \\
= & \text{unif}((a = x, h(w) = z)[w/f(x,y)], \epsilon[w/f(x,y)]) & \text{por } 4 \\
= & \text{unif}((a = x, h(f(x,y)) = z), [w/f(x,y)]) & \\
= & \text{unif}((h(f(x,y)) = z)[x/a], [w/f(x,y)][x/a]) & \text{por } 4 \\
= & \text{unif}((h(f(a,y)) = z), [w/f(a,y), x/a]) & \\
= & \text{unif}((), [w/f(a,y), x/a][z/h(f(a,y)))) & \text{por } 4 \\
= & [w/f(a,y), x/a, z/h(f(a,y)))) & \text{por } 1
\end{array}
$$

- **Ejemplo 6: Unificar $j(w, a, h(w))$ y $j(f(x, y), x, y)$**

$$
\begin{array}{lll}
& \text{unif}((j(w,a,h(w)) = j(f(x,y),x,y))\epsilon) & \\
= & \text{unif}((w = f(x,y), a = x, h(w) = y), \epsilon) & \text{por } 3 \\
= & \text{unif}((a = x, h(w) = y)[w/f(x,y)], \epsilon[w/f(x,y)]) & \text{por } 4 \\
= & \text{unif}((a = x, h(f(x,y)) = y), [w/f(x,y)]) & \\
= & \text{unif}((h(f(x,y)) = y)[x/a], [w/f(x,y)][x/a]) & \text{por } 4 \\
= & \text{unif}((h(f(a,y)) = y), [w/f(a,y), x/a]) & \\
= & \text{“No unificable”} & \text{por } 5
\end{array}
$$

Resolución: Separación de variables

- **Separación de variables**
  - Def.: La sustitución $[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$ es un renombramiento si todos los t_i son variables.
  - Prop.: Si θ es un renombramiento, entonces $C \equiv C\theta$.
  - Def.: Las cláusulas C_1 y C_2 están separadas sin no tienen ninguna variable común.
  - Def.: Una separación de las variables de C_1 y C_2 es un par de renombramientos θ_1, θ_2 tales que $C_1\theta_1$ y $C_2\theta_2$ están separadas.
  - Ejemplo: Una separación de variables de $C_1 = \{P(x), Q(x,y)\}$ y $C_2 = \{R(f(x,y))\}$ es $(\theta_1 = [x/x_1, y/y_1], \theta_2 = [x/x_2, y/y_2]$.

Resolución: Resolvente binaria

- **Resolución binaria:**
  - **Def.: La cláusula C es una resolvente binaria de las cláusulas C_1 y C_2 si existen una separación de variables (θ_1, θ_2) de C_1 y C_2, un literal $L_1 \in C_1$, un literal $L_2 \in C_2$ y un UMG σ de $L_1\theta_1$ y $L_2^c\theta_2$ tales que**

$$C = (C_1\theta_1\sigma \setminus \{L_1\theta_1\sigma_1\}) \cup (C_2\theta_2\sigma \setminus \{L_2\theta_2\sigma\}).$$

  - **Ejemplo: Sean**

$$\begin{aligned} C_1 &= \{P(a,y), R(y)\}, \\ C_2 &= \{\neg P(x, f(x)), Q(g(x))\}, \\ \theta_1 &= \epsilon, \\ \theta_2 &= \epsilon, \\ L_1 &= P(a,y), \\ L_2 &= \neg P(x, f(x)), \\ \sigma &= [x/a, y/f(a)] \end{aligned}$$

    Entonces, $C = \{R(f(a)), Q(g(a))\}$ es una resolvente binaria de C_1 y C_2.

Resolución: Resolvente binaria

- **Ejemplo (Necesidad de separar variables):**

  Sean
  $$\begin{array}{lll} C_1 & = & \{P(x), Q(x)\}, \\ C_2 & = & \{\neg P(f(x)), R(x)\}, \\ \theta_1 & = & [x/x_1], \\ \theta_2 & = & [x/x_2], \\ L_1 & = & P(x), \\ L_2 & = & P(f(x)), \\ \sigma & = & [x_1/f(x_2)] \end{array}$$

  Entonces, $C = \{Q(f(x_2)), R(x_2)\}$ es una resolvente binaria de C_1 y C_2.

  Notas sobre la necesidad de separar variables:

  - $P(x)$ **y** $P(f(x))$ **no son unificables.**
  - $P(x_1)$ **y** $P(f(x_2))$ **son unificables siendo** $\sigma = [x_1/f(x_2)]$ **un UMG.**

Resolución: Factorización

- **Factorización:**
  - Def.: La cláusula C es un factor de la cláusula D si existen dos literales L_1 y L_2 en D que son unificables y $C = D\sigma \setminus \{L_2\sigma\}$ donde σ es un UMG de L_1 y L_2.
  - Ejemplo: Sean
    $$\begin{aligned} D &= \{P(x,y), P(y,x), Q(a)\} \\ L_1 &= P(x,y) \\ L_2 &= P(y,x) \\ \sigma &= [y/x] \end{aligned}$$
    Entonces, $C = \{P(x,x), Q(a)\}$ es un factor de D.

Resolución

- **Ejemplos de refutación por resolución:**
  - Refutación de $S = \{\{\neg P(x, f(x, y))\}, \{P(a, z), \neg Q(z, v)\}, \{Q(u, a)\}\}$

1	$\{\neg P(x, f(x, y))\}$	Hipótesis
2	$\{P(a, z), \neg Q(z, v)\}$	Hipótesis
3	$\{Q(u, a)\}$	Hipótesis
4	$\{\neg Q(f(a, y), v)\}$	Resolvente de 1 y 2 con $\sigma = [x/a, z/f(a, y)]$
5	$\square$	Resolvente de 3 y 4 con $\sigma = [u/f(a, y), v/a]$

  - Refutación de $S = \{\{P(x)\}, \{\neg P(f(x))\}\}$

1	$\{P(x)\}$	Hipótesis
2	$\{\neg P(f(x))\}$	Hipótesis
3	$\square$	Resolvente de 1 y 2 con $\theta_1 = \epsilon, \theta_2 = [x/x'], \sigma = [x/f(x')]$

  - Refutación de $S = \{\{P(x, y), P(y, x)\}, \{\neg P(u, v), \neg P(v, u)\}\}$

1	$\{P(x, y), P(y, x)\}$	Hipótesis
2	$\{\neg P(u, v), \neg P(v, u\}$	Hipótesis
3	$\{P(x, x)\}$	Factor de 1 con $[y/x]$
4	$\{\neg P(u, u)\}$	Factor de 2 con $[v/u]$
5	$\square$	Resolvente de 3 y 4 con $[x/u]$

Resolución

- Definiciones
  - Sea S un conjunto de cláusulas.
  - La sucesión $(C_1, \ldots, C_n)$ es una demostración por resolución de la cláusula C a partir de S si $C = C_n$ y para todo $i \in \{1, ..., n\}$ se verifica una de las siguientes condiciones:
    - $C_i \in S$;
    - existen $j, k < i$ tales que C_i es una resolvente de C_j y C_k
    - existe $j < i$ tal que C_i es un factor de C_j
  - La cláusula C es demostrable por resolución a partir de S si existe una demostración por resolución de C a partir de S.
  - Una refutación por resolución de S es una demostración por resolución de la cláusula vacía a partir de S.
  - Se dice que S es refutable por resolución si existe una refutación por resolución a partir de S.

Resolución

- **Demostraciones por resolución**
  - Def.: Sean $S_1, \dots, S_n$ formas clausales de las fórmulas $F_1, \dots, F_n$ y S una forma clausal de $\neg F$. Una demostración por resolución de F a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$ es una refutación por resolución de $S_1 \cup \dots \cup S_n \cup S$.
  - Def.: La fórmula F es demostrable por resolución no restringida a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$ si existe una demostración por resolución de F a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$. Se representa por $\{F_1, \dots, F_n\} \vdash_{Res} F$.
  - Ejemplo: (tema 8 p. 21) $S = \{(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)], (\exists x)P(x)\} \vdash_{Res} (\exists x)Q(x)$

1	$\{\neg P(x), Q(x)\}$	Hipótesis
2	$\{P(a)\}$	Hipótesis
3	$\{\neg Q(z)\}$	Hipótesis
4	$\{Q(a)\}$	Resolvente de 1 y 2 con $[x/a]$
5	$\square$	Resolvente de 3 y 4 con $[z/a]$

Resolución

- **Ejemplo: (tema 8 p. 21)**

  $S = \{(\forall x)[P(x) \to Q(x)], (\forall x)[Q(x) \to R(x)] \vdash_{Res} (\forall x)[P(x) \to R(x)]\}$

1	$\{\neg P(x), Q(x)\}$	Hipótesis
2	$\{\neg Q(y), R(y)\}$	Hipótesis
3	$\{P(a)\}$	Hipótesis
4	$\{\neg R(a)\}$	Hipótesis
5	$\{Q(a)\}$	Resolvente de 1 y 2 con $[x/a]$
6	$\{R(a)\}$	Resolvente de 2 y 5 con $[y/a]$
5	$\square$	Resolvente de 6 y 4 con

- **Ejemplo: (tema 6 p. 55)** $\vdash_{Res} (\exists x)[P(x) \to (\forall y)P(y)]$

1	$\{P(x)\}$	Hipótesis
2	$\{\neg P(f(x)\}$	Hipótesis
3	$\square$	Resolvente de 1 y 2 con $\theta_2 = [x/x'], \sigma = [x/f(x')]$

Resolución

- **Ejemplo:** $\vdash_{Res} (\forall x)(\exists y)\neg(P(y,x) \leftrightarrow \neg P(y,y))$
  - **Forma clausal:**

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg(\forall x)(\exists y)\neg(P(y,x) \leftrightarrow \neg P(y,y)) \\
\equiv & \neg(\forall x)(\exists y)\neg((P(y,x) \rightarrow \neg P(y,y)) \wedge (\neg P(y,y) \rightarrow P(y,x))) \\
\equiv & \neg(\forall x)(\exists y)\neg((\neg P(y,x) \vee \neg P(y,y)) \wedge (\neg\neg P(y,y) \vee P(y,x))) \\
\equiv & \neg(\forall x)(\exists y)\neg((\neg P(y,x) \vee \neg P(y,y)) \wedge (P(y,y) \vee P(y,x))) \\
\equiv & (\exists x)(\forall y)\neg\neg((\neg P(y,x) \vee \neg P(y,y)) \wedge (P(y,y) \vee P(y,x))) \\
\equiv & (\exists x)(\forall y)((\neg P(y,x) \vee \neg P(y,y)) \wedge (P(y,y) \vee P(y,x))) \\
\equiv_{sat} & (\forall y)((\neg P(y,a) \vee \neg P(y,y)) \wedge (P(y,y) \vee P(y,a))) \\
\equiv & \{\{\neg P(y,a), \neg P(y,y)\}, \{P(y,y), P(y,a)\}\}
\end{array}
$$

  - **Refutación:**

1	$\{\neg P(y,a), \neg P(y,y)\}$	Hipótesis
2	$\{P(y,y), P(y,a)\}$	Hipótesis
3	$\{\neg P(a,a)\}$	Factor de 1 con $[y/a]$
4	$\{\neg P(a,a)\}$	Factor de 2 con $[y/a]$
5	$\square$	Resolvente de 3 y 4

Resolución

- Ejemplo (Paradoja del barbero de Russell): En una isla pequeña hay sólo un barbero. El gobernador de la isla ha publicado la siguiente norma: "El barbero afeita a todas las personas que no se afeitan a sí misma y sólo a dichas personas". Demostrar que la norma es inconsistente.
  - Representación:

$$(\forall x)[\text{afeita}(b,x) \leftrightarrow \neg\text{afeita}(x,x)]$$

  - Forma clausal:

$$\begin{aligned}
& (\forall x)[\text{afeita}(b,x) \leftrightarrow \neg\text{afeita}(x,x)] \\
\equiv\ & (\forall x)[(\text{afeita}(b,x) \rightarrow \neg\text{afeita}(x,x)) \wedge (\neg\text{afeita}(x,x) \rightarrow \text{afeita}(b,x))] \\
\equiv\ & (\forall x)[(\neg\text{afeita}(b,x) \vee \neg\text{afeita}(x,x)) \wedge (\neg\neg\text{afeita}(x,x) \vee \text{afeita}(b,x))] \\
\equiv\ & (\forall x)[(\neg\text{afeita}(b,x) \vee \neg\text{afeita}(x,x)) \wedge (\text{afeita}(x,x) \vee \text{afeita}(b,x))] \\
\equiv\ & \{\{\neg\text{afeita}(b,x), \neg\text{afeita}(x,x)\}, \{\text{afeita}(x,x), \text{afeita}(b,x)\}\}
\end{aligned}$$

  - Refutación:

1	$\{\neg\text{afeita}(b,x), \neg\text{afeita}(x,x)\}$	Hipótesis
2	$\{\text{afeita}(x,x), \text{afeita}(b,x)\}$	Hipótesis
3	$\{\neg\text{afeita}(b,b)\}$	Factor de 1 con $[x/b]$
4	$\{\neg\text{afeita}(b,b)\}$	Factor de 2 con $[x/b]$
5	$\square$	Resolvente de 3 y 4

Adecuación y completitud de la resolución

- **Propiedades:**
  - **Si C es una resolvente de C_1 y C_2, entonces $\{C_1, C_2\} \models C$.**
  - **Si C es un factor de C entonces $C \models D$.**
  - **Si $\square \in S$, entonces S es inconsistente.**
  - **Si el conjunto de cláusulas S es refutable por resolución, entonces S es inconsistente.**
  - **Teor.: El cálculo de resolución es adecuado y completo; es decir,**

    Adecuado: $S \vdash_{Res} F \quad\Longrightarrow\quad S \models F$

    Completo: $S \models F \quad\Longrightarrow\quad S \vdash_{Res} F$

Bibliografía

- M.L. Bonet *Apuntes de LPO.* (Univ. Politécnica de Cataluña, 2003) pp. 34–40.
- C.L. Chang y R.C.T. Lee *Symbolic logic and mechanical theorem proving* (Academic Press, 1973) pp. 70–99.
- J.I. García, P.A. García y J.M. Urbano *Fundamentos lógicos de la programación.* (Universidad de Granada, 2002) pp. 45–66
- M. Genesereth *Computational Logic (Chapter 9: Relational Resolution)* (Stanford University, 2003)
- S. Hölldobler *Computational logic.* (U. de Dresden, 2004) pp. 71–74.
- M. Ojeda e I. Pérez *Lógica para la computación (Vol. 2: Lógica de Primer Orden)* (Ágora, 1997) pp. 138–164.
- L. Paulson *Logic and proof* (U. Cambridge, 2002) pp. 50–61.
- U. Schöning *Logic for computer scientists* (Birkäuser, 1989) pp. 79–96.