

Tema 3: Tableros semánticos

José A. Alonso Jiménez
Andrés Cordon Franco

Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Demostración por tableros semánticos

- Demostración de fórmula tautológica:

- Demostración:

$\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q)$ es una tautología

syss $\{\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))\}$ es inconsistente

syss $\{\neg p \vee \neg q, \neg\neg(p \wedge q)\}$ es inconsistente

syss $\{\neg p \vee \neg q, p \wedge q\}$ es inconsistente

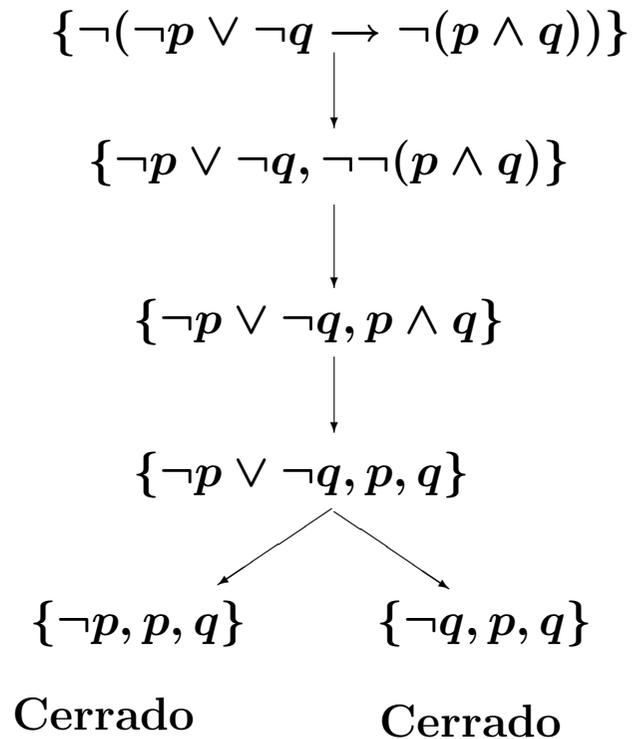
syss $\{p, q, \neg p \vee \neg q\}$ es inconsistente

syss $\{p, q, \neg p\}$ es inconsistente y

$\{p, q, \neg q\}$ es inconsistente

Demostración por tableros semánticos

- Tablero semántico cerrado:



Refutación por tableros semánticos

- Refutación de fórmula no tautológica:

- Refutación:

$\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r)$ es una tautología

syss $\{\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r))\}$ es inconsistente

syss $\{\neg p \vee \neg q, \neg\neg(p \wedge r)\}$ es inconsistente

syss $\{\neg p \vee \neg q, p \wedge r\}$ es inconsistente

syss $\{p, r, \neg p \vee \neg q\}$ es inconsistente

syss $\{p, r, \neg p\}$ es inconsistente y

$\{p, r, \neg q\}$ es inconsistente

- Contramodelos de $\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r)$:

Las valoraciones v tales que $v(p) = 1, v(q) = 0$ y $v(r) = 1$.

- Una forma normal disyuntiva de $\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r))$:

$$p \vee r \vee \neg q$$

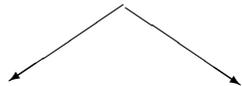
Refutación por tableros semánticos

- Tablero semántico:

$$\{\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r))\}$$

$$\{\neg p \vee \neg q, \neg\neg(p \wedge r)\}$$

$$\{\neg p \vee \neg q, p \wedge r\}$$

$$\{\neg p \vee \neg q, p, r\}$$

$$\{\neg p, p, r\}$$
$$\{\neg q, p, r\}$$

Cerrado

Abierto

Notación uniforme: Literales y dobles negaciones

- Literales
 - Un literal es un átomo o la negación de un átomo (p.e. $p, \neg p, q, \neg q, \dots$).
- Dobles negaciones
 - F es una doble negación si es de la forma $\neg\neg G$.
 - Ley de doble negación: Si F es $\neg\neg G$, entonces $F \equiv G$.

Notación uniforme: fórmulas alfa y beta

- Fórmulas alfa

- Las fórmulas alfa, junto con sus componentes, son

F	F_1	F_2
$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2
$\neg(A_1 \rightarrow A_2)$	A_1	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$A_1 \leftrightarrow A_2$	$A_1 \rightarrow A_2$	$A_2 \rightarrow A_1$

- Si F es una fórmula alfa y sus componentes son F_1 y F_2 , entonces $F \equiv F_1 \wedge F_2$.

- Fórmulas beta

- Las fórmulas beta, junto con sus componentes, son

F	F_1	F_2
$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
$B_1 \rightarrow B_2$	$\neg B_1$	B_2
$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$\neg(B_1 \leftrightarrow B_2)$	$\neg(B_1 \rightarrow B_2)$	$\neg(B_2 \rightarrow B_1)$

- Si F es una fórmula beta y sus componentes son F_1 y F_2 , entonces $F \equiv F_1 \vee F_2$.

Completación de tableros

- Procedimiento de completación de tableros:

Un tablero de un conjunto de fórmulas S es un árbol construido mediante las reglas:

* El árbol cuyo único nodo tiene como etiqueta S es un tablero de S .

* Sea \mathcal{T} un tablero de S y S_1 la etiqueta de una hoja de \mathcal{T} .

1. Si S_1 cerrado (es decir, es un conjunto de literales que contiene una fórmula y su negación), entonces el árbol obtenido añadiendo como hijo de S_1 el nodo etiquetado con cerrado es un tablero de S .
2. Si S_1 es abierto (es decir, es un conjunto de literales que no contiene una fórmula y su negación), entonces el árbol obtenido añadiendo como hijo de S_1 el nodo etiquetado con abierto es un tablero de S .
3. Si S_1 contiene una doble negación $\neg\neg F$, entonces el árbol obtenido añadiendo como hijo de S_1 el nodo etiquetado con $(S_1 \setminus \{\neg\neg F\}) \cup \{F\}$ es un tablero de S .
4. Si S_1 contiene una fórmula alfa F de componentes F_1 y F_2 , entonces el árbol obtenido añadiendo como hijo de S_1 el nodo etiquetado con $(S_1 \setminus \{F\}) \cup \{F_1, F_2\}$ es un tablero de S .
5. Si S_1 contiene una fórmula beta F de componentes F_1 y F_2 , entonces el árbol obtenido añadiendo como hijos de S_1 los nodos etiquetados con $(S_1 \setminus \{F\}) \cup \{F_1\}$ y $(S_1 \setminus \{F\}) \cup \{F_2\}$ es un tablero de S .

Teorema por tableros

- Def.: Un tablero completo de S es un tablero de S al que no se le puede aplicar ninguna de las reglas de expansión; es decir, todas sus hojas son abiertas o cerradas.
- Def.: Un tablero es cerrado si todas sus hojas están etiquetadas con cerrado.
- Def.: Una fórmula F es un teorema (mediante tableros semánticos) si tiene una prueba mediante tableros; es decir, si $\{\neg F\}$ tiene un tablero completo cerrado. Se representa por $\vdash_{Tab} F$.

- Ejemplos:

$$\vdash_{Tab} \neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q)$$

$$\not\vdash_{Tab} \neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r)$$

- Teor.: El cálculo de tableros semánticos es adecuado y completo; es decir,

$$\text{Adecuado: } \vdash_{Tab} F \quad \Longrightarrow \quad \models F$$

$$\text{Completo: } \models F \quad \Longrightarrow \quad \vdash_{Tab} F$$

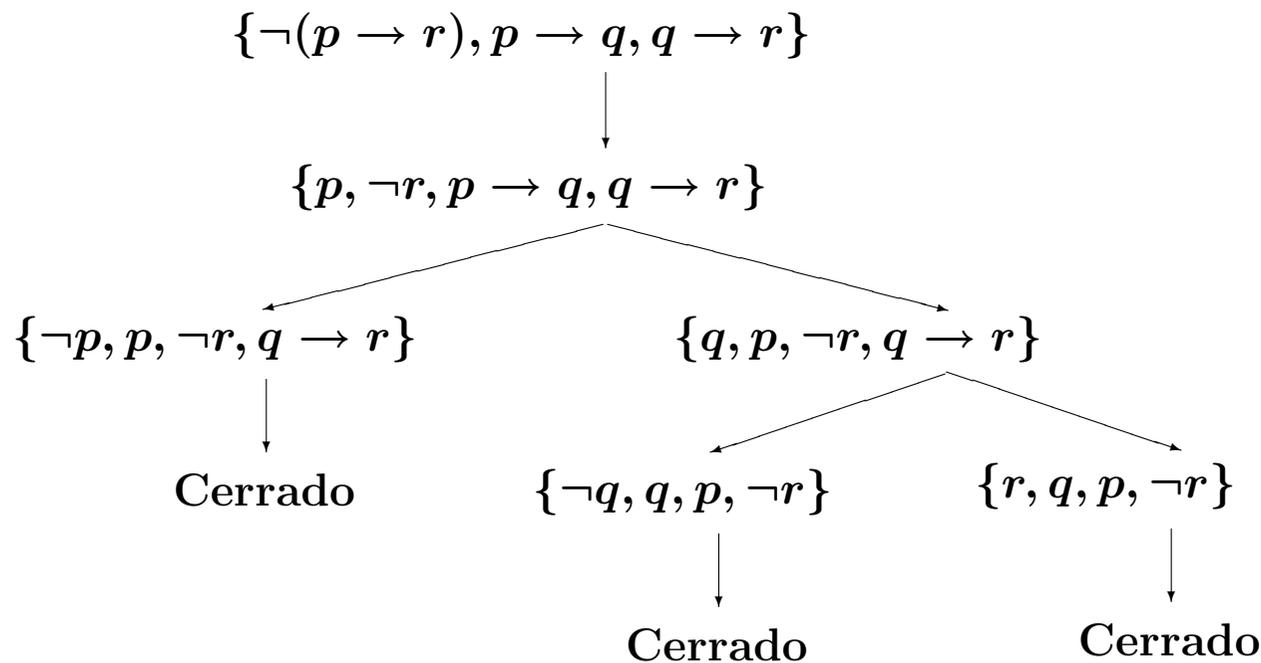
- Tableros y formas normales disyuntivas: Si $\{L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1}\}, \dots, \{L_{m,1}, \dots, L_{m,n_m}\}$ son los nodos abiertos del tablero completo de F , entonces una forma normal disyuntiva de F es $(L_{1,1} \wedge \dots \wedge L_{1,n_1}) \vee \dots \vee (L_{m,1} \wedge \dots \wedge L_{m,n_m})$.

Deducción por tableros

- Def.: La fórmula F es deducible (mediante tableros semánticos) a partir del conjunto de fórmulas S si existe una prueba mediante tableros de F a partir de S ; es decir, existe un tablero completo cerrado de $S \cup \{\neg F\}$.

Se representa por $S \vdash_{Tab} F$

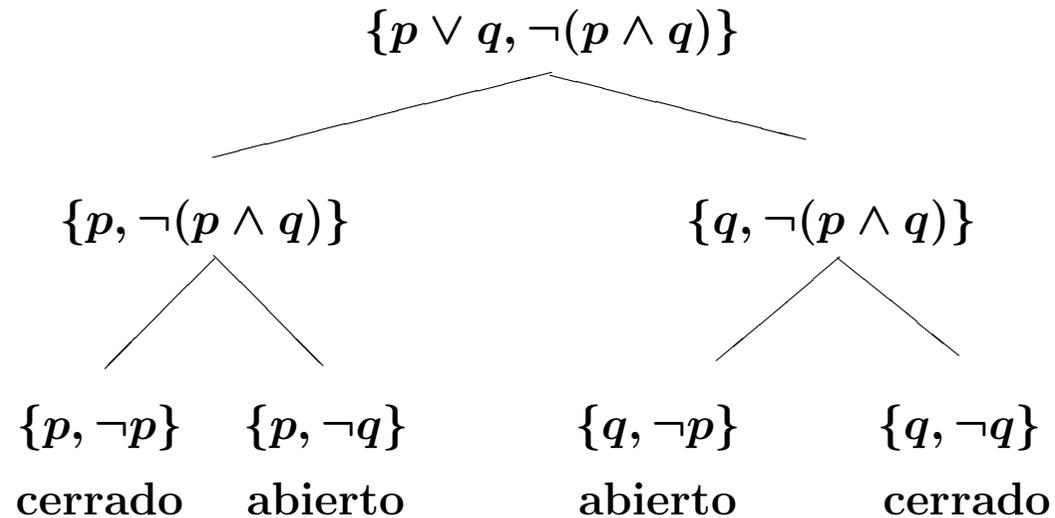
- Ejemplo: $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \vdash_{Tab} p \rightarrow r$



- Teor.: $S \vdash_{Tab} F$ syss $S \models F$.

Deducción por tableros

- Ejemplo: $\{p \vee q\} \not\vdash_{Tab} p \wedge q$



- Contramodelos de $\{p \vee q\} \not\vdash_{Tab} p \wedge q$

las valoraciones v_1 tales que $v_1(p) = 1$ y $v_1(q) = 0$

las valoraciones v_2 tales que $v_2(p) = 0$ y $v_2(q) = 1$

Bibliografía

- Ben–Ari, M. *Mathematical Logic for Computer Science (2nd ed.)* (Springer, 2001)
 - Cap. 2: Propositional calculus: formulas, models, tableaux
- Fitting, M. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving (2nd ed.)* (Springer, 1995)
 - Cap. 3: Semantic tableaux and resolution
- Hortalá, M.T.; Leach, J. y Rogríguez, M. *Matemática discreta y lógica matemática* (Ed. Complutense, 1998)
 - Cap. 7.9: Tableaux semánticos par la lógica de proposiciones
- Nerode, A. y Shore, R.A. *Logic for Applications* (Springer, 1997)
 - Cap. 1.4: Tableau proofs in propositional calculus
- E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003)
 - Cap. 4.3: Métodos de las tablas semánticas