Tema 4: Lógica clausal. Resolución

José A. Alonso Jiménez
Andrés Cordón Franco

Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial

Universidad de Sevilla

Lógica clausal: sintaxis

- **Sintaxis de la lógica clausal**
  - **Un átomo es una variable proposicional.**
    Variables sobre átomos: $p, q, r, \dots, p_1, p_2, \dots$.
  - **Un literal es un átomo (p) o la negación de un átomo ($\neg p$).**
    Variables sobre literales: $L, L_1, L_2, \dots$.
  - **Una cláusula es un conjunto finito de literales.**
    Variables sobre cláusulas: $C, C_1, C_2, \dots$.
  - **La cláusula vacía es el conjunto vacío de literales.**
    La cláusula vacía se representa por $\square$.
  - **Conjuntos finitos de cláusulas.**
    Variables sobre conjuntos finitos de cláusulas: $S, S_1, S_2, \dots$.

Lógica clausal: semántica

- **Semántica de la lógica clausal**
  - **Def.:** Una valoración de verdad es una aplicación $v : \mathrm{VP} \longrightarrow \mathbb{B}$.
  - **Def.:** El valor de un literal positivo p en una valoración v es $v(p)$.
  - **Def.:** El valor de un literal negativo $\neg p$ en una valoración v es

$$v(\neg p) = \begin{cases} 1, & \text{si } v(p) = 0; \\ 0, & \text{si } v(p) = 1. \end{cases}$$

  - **Def.:** El valor de una cláusula C en una valoración v es

$$v(C) = \begin{cases} 1, & \text{si existe un } L \in C \text{ tal que } v(L) = 1; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

  - **Def.:** El valor de un conjunto de cláusulas S en una valoración v es

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{si para toda } C \in S,\ v(C) = 1 \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

  - **Prop.:** En cualquier valoración v, $v(\square) = 0$.

Cláusulas y fórmulas

- **Equivalencias entre cláusulas y fórmulas**
  - **Def.: Una cláusula C y una fórmula F son equivalentes si $v(C) = v(F)$ para cualquier valoración v.**
  - **Def.: Un conjunto de cláusulas S y una fórmula F son equivalentes si $v(S) = v(F)$ para cualquier valoración v.**
  - **Def.: Un conjunto de cláusulas S y un conjunto de fórmulas $\{F_1, \dots, F_n\}$ son equivalentes si, para cualquier valoración v, $v(S) = 1$ syss v es un modelo de $\{F_1, \dots, F_n\}$.**
- **De cláusulas a fórmulas**
  - **Prop.: La cláusula $\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ es equivalente a la fórmula $L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_n$.**
  - **Prop.: El conjunto de cláusulas $\{\{L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1}\}, \dots, \{L_{m,1}, \dots, L_{m,n_m}\}\}$ es equivalente a la fórmula $(L_{1,1} \vee \dots \vee L_{1,n_1}) \wedge \dots \wedge (L_{m,1} \vee \dots \vee L_{m,n_m})$.**

Cláusulas y fórmulas

De fórmulas a cláusulas (forma clausal)

- **Def.:** Una forma clausal de una fórmula F es un conjunto de cláusulas equivalente a F.
- **Prop.:** Si $(L_{1,1} \vee \ldots \vee L_{1,n_1}) \wedge \ldots \wedge (L_{m,1} \vee \ldots \vee L_{m,n_m})$ es una forma normal conjuntiva de la fórmula F. Entonces, una forma clausal de F es $\{\{L_{1,1}, \ldots, L_{1,n_1}\}, \ldots, \{L_{m,1}, \ldots, L_{m,n_m}\}\}$.
- **Ejemplos:**
  - * Una forma clausal de $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$ es $\{\{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg r\}\}$.
  - * Una forma clausal de $p \rightarrow q$ es $\{\{\neg p, q\}\}$.
  - * La cláusula $\{\{\neg p, q\}, \{r\}\}$ es una forma clausal de las fórmulas $(p \rightarrow q) \wedge r$ y $\neg\neg r \wedge (\neg q \rightarrow \neg p)$.
- **Def.:** Una forma clausal de un conjunto de fórmulas S es un conjunto de cláusulas equivalente a S.
- **Prop.:** Si $S_1, \ldots, S_n$ son formas clausales de $F_1, \ldots, F_n$, entonces $S_1 \cup \ldots \cup S_n$ es una forma clausal de $\{F_1, \ldots, F_n\}$.

Modelos, consistencia y consecuencia

- **Modelos, consistencia y consecuencia**
  - **Def.: Una valoración v es modelo de un conjunto de cláusulas S si $v(S) = 1$.**
  - **Ej.: La valoración v tal que $v(p) = v(q) = 1$ es un modelo de $\{\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}\}$.**
  - **Def.: Un conjunto de cláusulas es consistente si tiene modelos e inconsistente, en caso contrario.**
  - **Ejemplos:**
    * $\{\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}\}$ **es consistente.**
    * $\{\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$ **es inconsistente.**
  - **Si $\square \in S$, entonces S es inconsistente.**
  - **Def.: $S \models C$ si para todo modelo v de S, $v(C) = 1$.**

Reducción de consecuencia a inconsistencia de cláusulas

- **Reducción de consecuencia a inconsistencia de cláusulas:**
  - **Prop:** Sean $S_1, \dots, S_n$ formas clausales de las fórmulas $F_1, \dots, F_n$.
    * $\{F_1, \dots, F_n\}$ es consistente syss $S_1 \cup \dots \cup S_n$ es consistente.
    * Si S es una forma clausal de $\neg G$, entonces son equivalentes
      1. $\{F_1, \dots, F_n\} \models G$.
      2. $\{F_1, \dots, F_n \neg G\}$ es inconsistente.
      3. $S_1 \cup \dots \cup S_n \cup S$ es inconsistente.
  - **Ejemplo:** $\{p \to q, q \to r\} \models p \to r$ syss
    $\{\{\neg p, q\}, \{\neg q, r\}, \{p\}, \{\neg r\}\}$ es inconsistente.

Regla de resolución

- **Reglas de inferencia:**
  - Reglas habituales:

Modus Ponens: $\dfrac{p \rightarrow q, \quad p}{q}$ $\qquad$ $\dfrac{\{\neg p, q\}, \quad \{p\}}{\{q\}}$

Modus Tollens: $\dfrac{p \rightarrow q, \quad \neg q}{\neg p}$ $\qquad$ $\dfrac{\{\neg p, q\}, \quad \{\neg q\}}{\{\neg p\}}$

Encadenamiento: $\dfrac{p \rightarrow q, \quad q \rightarrow r}{p \rightarrow r}$ $\qquad$ $\dfrac{\{\neg p, q\}, \quad \{\neg q, r\}}{\{\neg p, r\}}$

  - Regla de resolución proposicional:

$$\frac{\{p_1, \dots, r, \dots, p_m\}, \quad \{q_1, \dots, \neg r, \dots, q_n\}}{\{p_1, \dots, p_m, q_1, , \dots, q_n\}}$$

Regla de resolución

- **Resolventes**
  - **Def.:** Sean C_1 una cláusula, L un literal de C_1 y C_2 una cláusula que contiene el complementario de L. La resolvente de C_1 y C_2 respecto de L es
    $$\mathrm{Res}_L(C_1, C_2) = (C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{L^c\})$$
  - **Ejemplos:**
    $$\begin{aligned} \mathrm{Res}_q(\{p, q\}, \{\neg q, r\}) &= \{p, r\} \\ \mathrm{Res}_q(\{q, \neg p\}, \{p, \neg q\}) &= \{p, \neg p\} \\ \mathrm{Res}_p(\{q, \neg p\}, \{p, \neg q\}) &= \{q, \neg q\} \\ \mathrm{Res}_p(\{q, \neg p\}, \{q, p\}) &= \{q\} \\ \mathrm{Res}_p(\{p\}, \{\neg p\}) &= \square \end{aligned}$$

- **Resolventes de dos cláusulas:**
  - **Def.:** $\mathrm{Res}(C_1, C_2)$ es el conjunto de las resolventes entre C_1 y C_2
  - **Ejemplos:**
    $$\begin{aligned} \mathrm{Res}(\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}) &= \{\{p, \neg p\}, \{q, \neg q\}\} \\ \mathrm{Res}(\{\neg p, q\}, \{p, q\}) &= \{\{q\}\} \\ \mathrm{Res}(\{\neg p, q\}, \{q, r\}) &= \emptyset \end{aligned}$$
  - **Nota:** $\square \notin \mathrm{Res}(\{p, q\}, \{\neg p, \neg q\})$

Demostraciones por resolución

- **Ejemplo de refutación por resolución:**
  - **Refutación de $\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$:**

1	$\{p, q\}$	Hipótesis
2	$\{\neg p, q\}$	Hipótesis
3	$\{p, \neg q\}$	Hipótesis
4	$\{\neg p, \neg q\}$	Hipótesis
5	$\{q\}$	Resolvente de 1 y 2
6	$\{\neg q\}$	Resolvente de 3 y 4
7	$\square$	Resolvente de 5 y 6

Demostraciones por resolución

- **Definiciones**
  - **Sea S un conjunto de cláusulas.**
  - **La sucesión $(C_1, \dots, C_n)$ es una demostración por resolución de la cláusula C a partir de S si $C = C_n$ y para todo $i \in \{1, ..., n\}$ se verifica una de las siguientes condiciones:**
    * $C_i \in S$;
    * **existen $j, k < i$ tales que C_i es una resolvente de C_j y C_k**
  - **La cláusula C es demostrable por resolución a partir de S si existe una demostración por resolución de C a partir de S.**
  - **Una refutación por resolución de S es una demostración por resolución de la cláusula vacía a partir de S.**
  - **Se dice que S es refutable por resolución si existe una refutación por resolución a partir de S.**

Demostraciones por resolución

- **Demostraciones por resolución**
  - **Def.: Sean $S_1, \dots, S_n$ formas clausales de las fórmulas $F_1, \dots, F_n$ y S una forma clausal de $\neg F$**
    Una demostración por resolución de F a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$ es una refutación por resolución de $S_1 \cup \dots \cup S_n \cup S$.
  - **Def.: La fórmula F es demostrable por resolución a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$ si existe una demostración por resolución de F a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$.**
    Se representa por $\{F_1, \dots, F_n\} \vdash_{Res} F$.
  - **Ejemplo: Demostración por resolución de $p \wedge q$ a partir de $\{p \vee q, p \leftrightarrow q\}$**

1	$\{p, q\}$	Hipótesis
2	$\{\neg p, q\}$	Hipótesis
3	$\{p, \neg q\}$	Hipótesis
4	$\{\neg p, \neg q\}$	Hipótesis
5	$\{q\}$	Resolvente de 1 y 2
6	$\{\neg q\}$	Resolvente de 3 y 4
7	$\square$	Resolvente de 5 y 6

Adecuación y completitud de la resolución

- **Propiedades:**
  - Si C es una resolvente de C_1 y C_2, entonces $\{C_1, C_2\} \models C$.
  - Si $\square \in S$, entonces S es inconsistente.
  - Si el conjunto de cláusulas S es refutable, entonces S es inconsistente.
  - Teor.: El cálculo de resolución es adecuado y completo; es decir,

$$\begin{array}{lll} \text{Adecuado: } S \vdash_{Res} F & \Longrightarrow & S \models F \\ \text{Completo: } S \models F & \Longrightarrow & S \vdash_{Res} F \end{array}$$

Argumentación y resolución

- **Problema de los animales: Se sabe que**

  1. **Los animales con pelo y los que dan leche son mamíferos.**
  2. **Los mamíferos que tienen pezuñas o que rumian son ungulados.**
  3. **Los ungulados de cuello largo son jirafas.**
  4. **Los ungulados con rayas negras son cebras.**

  Se observa un animal que tiene pelos, pezuñas y rayas negras. Por consiguiente, se concluye que el animal es una cebra.

- **Formalización:**

$$
\begin{array}{l}
\{\ \text{tiene\_pelos} \lor \text{da\_leche} \to \text{es\_mamífero}, \\
\quad \text{es\_mamífero} \land (\text{tiene\_pezuñas} \lor \text{rumia}) \to \text{es\_ungulado}, \\
\quad \text{es\_ungulado} \land \text{tiene\_cuello\_largo} \to \text{es\_jirafa}, \\
\quad \text{es\_ungulado} \land \text{tiene\_rayas\_negras} \to \text{es\_cebra}, \\
\quad \text{tiene\_pelos} \land \text{tiene\_pezuñas} \land \text{tiene\_rayas\_negras}\ \} \qquad \vdash_{Res} \text{es\_cebra}
\end{array}
$$

Argumentación y resolución

- **Resolución:**

1	$\{\neg$ tiene_pelos, es_mamífero$\}$	Hipótesis
2	$\{\neg$ da_leche, es_mamífero$\}$	Hipótesis
3	$\{\neg$es_mamífero, $\neg$tiene_pezuñas, es_ungulado$\}$	Hipótesis
4	$\{\neg$es_mamífero, $\neg$rumia, es_ungulado$\}$	Hipótesis
5	$\{\neg$es_ungulado, $\neg$tiene_cuello_largo, es_jirafa$\}$	Hipótesis
6	$\{\neg$es_ungulado, $\neg$tiene_rayas_negras, es_cebra$\}$	Hipótesis
7	$\{$tiene_pelos$\}$	Hipótesis
8	$\{$tiene_pezuñas$\}$	Hipótesis
9	$\{$tiene_rayas_negras$\}$	Hipótesis
10	$\{\neg$es_cebra$\}$	Hipótesis
11	$\{$es_mamífero$\}$	Resolvente de 1 y 7
12	$\{\neg$tiene_pezuñas, es_ungulado$\}$	Resolvente de 11 y 3
13	$\{$es_ungulado$\}$	Resolvente de 12 y 8
14	$\{\neg$tiene_rayas_negras, es_cebra$\}$	Resolvente de 13 y 6
15	$\{$es_cebra$\}$	Resolvente de 14 y 9
16	$\square$	Resolvente de 15 y 10

Bibliografía

- **M. Ben–Ari, *Mathematical logic for computer science (2nd ed.).* (Springer, 2001)**
  - **Cap. 4: Propositional calculus: resolution and BDDs**
- **C.–L. Chang y R.C.–T. Lee *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving* (Academic Press, 1973)**
  - **Cap. 5.2: The resolution principle for the proposicional logic**
- **N.J. Nilsson *Inteligencia artificial (Una nueva síntesis)* (McGraw–Hill, 2001)**
  - **Cap. 14: La resolución en el cálculo proposicional**
- **E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003)**
  - **Cap. 5.7: El principio de resolución en lógica proposicional**
- **U. Schöning *Logic for Computer Scientists* (Birkäuser, 1989)**
  - **Cap. 1.5: Resolution**