

Tema 5: Otros sistemas proposicionales

José A. Alonso Jiménez
Andrés Cordon Franco

Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Sistemas proposicionales

- **Sistemas estudiados:**
 - Tablas de verdad.
 - Método de Quine.
 - Formas normales.
 - Tableros semánticos.
 - Resolución.
- **Otros sistemas proposicionales:**
 - Sistemas axiomáticos.
 - Cálculo de secuentes.
 - Deducción natural (DN).

DN: Reglas de la conjunción

- Reglas de la conjunción:

- Regla de introducción de la conjunción: $\frac{F \quad G}{F \wedge G} \wedge i$

- Reglas de eliminación de la conjunción: $\frac{F \wedge G}{F} \wedge e_1$ $\frac{F \wedge G}{G} \wedge e_2$

- Ejemplo: $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$:

1 :	$p \wedge q, r$	premises
2 :	q	$\wedge e_2$ 1.1
3 :	$q \wedge r$	$\wedge i$ 2,1.2

- Adecuación de las reglas de la conjunción:

- * $\wedge i : \{F, G\} \models F \wedge G$

- * $\wedge e_1 : F \wedge G \models F$

- * $\wedge e_2 : F \wedge G \models G$

DN: Reglas de la doble negación

- Reglas de la doble negación

- Regla de eliminación de la doble negación: $\frac{\neg\neg F}{F} \neg\neg e$

- Regla de introducción de la doble negación: $\frac{F}{\neg\neg F} \neg\neg i$

- Ejemplo: $p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg\neg p \wedge r$:

1 :	$p, \neg\neg(q \wedge r)$	premises
2 :	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 1.1
3 :	$q \wedge r$	$\neg\neg e$ 1.2
4 :	r	$\wedge e$ 3
5 :	$\neg\neg p \wedge r$	$\wedge i$ 2,4

- Adecuación de las reglas de la doble negación:

- * $\neg\neg e : \{\neg\neg F\} \models F$

- * $\neg\neg i : \{F\} \models \neg\neg F$

DN: Regla de eliminación del condicional

- Regla de eliminación del condicional:

- Regla de eliminación del condicional:
$$\frac{F \quad F \rightarrow G}{G} \rightarrow_e$$

- Ejemplo: $\neg p \wedge q, \neg p \wedge q \rightarrow r \vee \neg p \vdash r \vee \neg p$:

1 :	$\neg p \wedge q, \neg p \wedge q \rightarrow r \vee \neg p$	premises
2 :	$r \vee \neg p$	\rightarrow_e 1.1,1.2

- Ejemplo: $p, p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash r$:

1 :	$p, p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r)$	premises
2 :	q	\rightarrow_e 1.1,1.2
3 :	$q \rightarrow r$	\rightarrow_e 1.1,1.3
4 :	r	\rightarrow_e 2,3

- Adecuación de la regla de eliminación del condicional: $\{F, F \rightarrow G\} \models G$

DN: Regla derivada de modus tollens (MT)

- Regla derivada de modus tollens (MT)

- Regla derivada de modus tollens (MT):
$$\frac{F \rightarrow G \quad \neg G}{\neg F} MT$$

- Ejemplo: $p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r \vdash \neg q$:

1 :	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$, p , $\neg r$	premises
2 :	$q \rightarrow r$	$\rightarrow e$ 1.2,1.1
3 :	$\neg q$	MT 1.3,2

- Ejemplo: $\neg p \rightarrow q, \neg q \vdash p$:

1 :	$\neg p \rightarrow q$, $\neg q$	premises
2 :	$\neg \neg p$	MT 1.2,1.1
3 :	p	$\neg \neg e$ 2

- Ejemplo: $p \rightarrow \neg q, q \vdash \neg p$:

DN: Regla de introducción del condicional

- Regla de introducción del condicional

- Regla de introducción del condicional:

$$\frac{\begin{array}{c} F \\ \vdots \\ G \end{array}}{F \rightarrow G} \rightarrow i$$

- Ejemplo: $p \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow \neg p$:

1 :	$p \rightarrow q$	premise
2 :	$\neg q$	assumption
3 :	$\neg p$	MT 2,1
4 :	$\neg q \rightarrow \neg p$	$\rightarrow i$ 2-3

- Adecuación de la regla de introducción del condicional:

Si $F \models G$, entonces $\models F \rightarrow G$.

DN: Regla de introducción del condicional

- Ejemplo: $\neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow \neg\neg q$:

1 :	$\neg q \rightarrow \neg p$	premise
2 :	p	assumption
3 :	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 2
4 :	$\neg\neg q$	MT 3,1
5 :	$p \rightarrow \neg\neg q$	$\rightarrow i$ 2-4

- Ejemplo (de teorema): $\vdash p \rightarrow p$:

1 :	p	assumption
2 :	$p \rightarrow p$	$\rightarrow i$ 1-1

DN: Regla de introducción del condicional

- Ejemplo: $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$:

1 :	$q \rightarrow r$	assumption
2 :	$\neg q \rightarrow \neg p$	assumption
3 :	p	assumption
4 :	$\neg \neg p$	$\neg \neg i$ 3
5 :	$\neg \neg q$	MT 4,2
6 :	q	$\neg \neg e$ 5
7 :	r	$\rightarrow e$ 6,1
8 :	$p \rightarrow r$	$\rightarrow i$ 3-7
9 :	$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r)$	$\rightarrow i$ 2-8
10 :	$(q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$	$\rightarrow i$ 1-9

DN: Regla de introducción del condicional

- Ejemplo: $p \wedge q \rightarrow r \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$:

1 :	$p \wedge q \rightarrow r$	premise
2 :	p	assumption
3 :	q	assumption
4 :	$p \wedge q$	$\wedge i$ 2,3
5 :	r	$\rightarrow e$ 4,1
6 :	$q \rightarrow r$	$\rightarrow i$ 3–5
7 :	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$\rightarrow i$ 2–6

DN: Regla de introducción del condicional

- Ejemplo: $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash (p \wedge q) \rightarrow r$:

1 :	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	premise
2 :	$p \wedge q$	assumption
3 :	p	$\wedge e1$ 2
4 :	$q \rightarrow r$	$\rightarrow e$ 3,1
5 :	q	$\wedge e2$ 2
6 :	r	$\rightarrow e$ 5,4
7 :	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$\rightarrow i$ 2–6

DN: Regla de introducción del condicional

- Ejemplo: $p \rightarrow q \vdash p \wedge r \rightarrow q \wedge r$:

1 :	$p \rightarrow q$	premise
2 :	$p \wedge r$	assumption
3 :	p	$\wedge e1$ 2
4 :	r	$\wedge e2$ 2
5 :	q	$\rightarrow e$ 3,1
6 :	$q \wedge r$	$\wedge i$ 5,4
7 :	$p \wedge r \rightarrow q \wedge r$	$\rightarrow i$ 2–6

DN: Reglas de la disyunción

- Reglas de la disyunción:

- Reglas de introducción de la disyunción: $\frac{F}{F \vee G} \vee i_1$ $\frac{G}{F \vee G} \vee i_2$

- Regla de eliminación de la disyunción:

$$\frac{F \vee G \quad \begin{array}{|c|} \hline F \\ \hline \vdots \\ \hline H \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline G \\ \hline \vdots \\ \hline H \\ \hline \end{array}}{H} \vee e$$

- Ejemplo: $p \vee q \vdash q \vee p$:

1 :	p∨q	premise
2 :	p	assumption
3 :	q∨p	∨i2 2
4 :	q	assumption
5 :	q∨p	∨i1 4
6 :	q∨p	∨e 1,2–3,4–5

DN: Reglas de la disyunción

- Ejemplo: $q \rightarrow r \vdash p \vee q \rightarrow p \vee r$:

1 :	$q \rightarrow r$	premise
2 :	$p \vee q$	assumption
3 :	p	assumption
4 :	$p \vee r$	$\vee i1$ 3
5 :	q	assumption
6 :	r	$\rightarrow e$ 5,1
7 :	$p \vee r$	$\vee i2$ 6
8 :	$p \vee r$	$\vee e$ 2,3–4,5–7
9 :	$p \vee q \rightarrow p \vee r$	$\rightarrow i$ 2–8

DN: Reglas de la disyunción

- Ejemplo: $(p \vee q) \vee r \vdash p \vee (q \vee r)$:

1 :	$(p \vee q) \vee r$	premise
2 :	$p \vee q$	assumption
3 :	p	assumption
4 :	$p \vee (q \vee r)$	$\vee i1$ 3
5 :	q	assumption
6 :	$q \vee r$	$\vee i1$ 5
7 :	$p \vee (q \vee r)$	$\vee i2$ 6
8 :	$p \vee (q \vee r)$	$\vee e$ 2,3–4,5–7
9 :	r	assumption
10 :	$q \vee r$	$\vee i2$ 9
11 :	$p \vee (q \vee r)$	$\vee i2$ 10
12 :	$p \vee (q \vee r)$	$\vee e$ 1,2–8,9–11

DN: Reglas de la disyunción

- Ejemplo (distributiva): $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$:

1 :	$p \wedge (q \vee r)$	premise
2 :	p	$\wedge e1$ 1
3 :	$q \vee r$	$\wedge e2$ 1
4 :	q	assumption
5 :	$p \wedge q$	$\wedge i$ 2,4
6 :	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee i1$ 5
7 :	r	assumption
8 :	$p \wedge r$	$\wedge i$ 2,7
9 :	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee i2$ 8
10 :	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee e$ 3,4–6,7–9

DN: Regla de copia

- Ejemplo (usando la regla hyp): $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$:

1 :	p	assumption
2 :	q	assumption
3 :	p	hyp 1
4 :	$q \rightarrow p$	\rightarrow i 2-3
5 :	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$	\rightarrow i 1-4

DN: Reglas de la negación

- Extensiones de la lógica para usar falso:
 - Extensión de la sintaxis: \perp es una fórmula proposicional.
 - Extensión de la semántica: $v(\perp) = 0$ en cualquier valoración.
- Reglas de la negación:
 - Regla de eliminación de lo falso: $\frac{\perp}{F} \perp e$
 - Regla de eliminación de la negación: $\frac{F \quad \neg F}{\perp} \neg e$
 - Adecuación de las reglas de la negación:
 - * $\perp \models F$
 - * $\{F, \neg F\} \models \perp$

DN: Reglas de la negación

- Ejemplo $\neg p \vee q \vdash p \rightarrow q$:

1 :	$\neg p \vee q$	premise
2 :	$\neg p$	assumption
3 :	p	assumption
4 :	\perp	$\neg e$ 2,3
5 :	q	$\perp e$ 4
6 :	$p \rightarrow q$	$\rightarrow i$ 3–5
7 :	q	assumption
8 :	p	assumption
9 :	q	hyp 7
10 :	$p \rightarrow q$	$\rightarrow i$ 8–9
11 :	$p \rightarrow q$	$\vee e$ 1,2–6,7–10

DN: Reglas de la negación

- Regla de introducción de la negación:

$$\frac{\begin{array}{|c|} \hline F \\ \vdots \\ \perp \\ \hline \end{array}}{\neg F} \neg i$$

- Adecuación: Si $F \models \perp$, entonces $\models \neg F$.
- Ejemplo: $p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash \neg p$:

1 :	$p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q$	premises
2 :	p	assumption
3 :	q	$\rightarrow e$ 2,1.1
4 :	$\neg q$	$\rightarrow e$ 2,1.2
5 :	\perp	$\neg e$ 4,3
6 :	$\neg p$	$\neg i$ 2–5

DN: Reglas de la negación

- Ejemplo: $p \rightarrow \neg p \vdash \neg p$:

1 :	$p \rightarrow \neg p$	premise
2 :	p	assumption
3 :	$\neg p$	$\rightarrow e$ 2,1
4 :	\perp	$\neg e$ 3,2
5 :	$\neg p$	$\neg i$ 2-4

DN: Reglas de la negación

- Ejemplo $p \wedge \neg q \rightarrow r, \neg r, p \vdash q$:

1 :	$p \wedge \neg q \rightarrow r, \neg r, p$	premises
2 :	$\neg q$	assumption
3 :	$p \wedge \neg q$	$\wedge i$ 1.3,2
4 :	r	$\rightarrow e$ 3,1.1
5 :	\perp	$\neg e$ 1.2,4
6 :	$\neg \neg q$	$\neg i$ 2–5
7 :	q	$\neg \neg e$ 6

- Ejemplo: $p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r \vdash \neg q$:

1 :	$p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r$	premises
2 :	$q \rightarrow r$	$\rightarrow e$ 1.2,1.1
3 :	$\neg q$	MT 1.3,2

DN: Reglas del bicondicional

- Regla de introducción del bicondicional:
$$\frac{F \rightarrow G \quad G \rightarrow F}{F \leftrightarrow G} \leftrightarrow i$$

- Ejemplo: $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$:

1 :	$p \wedge q$	assumption
2 :	p	$\wedge e1$ 1
3 :	q	$\wedge e2$ 1
4 :	$q \wedge p$	$\wedge i$ 3,2
5 :	$p \wedge q \rightarrow q \wedge p$	$\rightarrow i$ 1–4
6 :	$q \wedge p$	assumption
7 :	q	$\wedge e1$ 6
8 :	p	$\wedge e2$ 6
9 :	$p \wedge q$	$\wedge i$ 8,7
10 :	$q \wedge p \rightarrow p \wedge q$	$\rightarrow i$ 6–9
11 :	$p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$	$\leftrightarrow i$ 5,10

DN: Reglas del bicondicional

- Reglas de eliminación del bicondicional: $\frac{F \leftrightarrow G}{F \rightarrow G} \leftrightarrow e_1$ $\frac{F \leftrightarrow G}{G \rightarrow F} \leftrightarrow e_2$

- Ejemplo: $p \leftrightarrow q, p \vee q \vdash p \wedge q$:

1 :	$p \leftrightarrow q, p \vee q$	premises
2 :	p	assumption
3 :	$p \rightarrow q$	$\leftrightarrow e_1$ 1.1
4 :	q	$\rightarrow e$ 2,3
5 :	$p \wedge q$	$\wedge i$ 2,4
6 :	q	assumption
7 :	$q \rightarrow p$	$\leftrightarrow e_2$ 1.1
8 :	p	$\rightarrow e$ 6,7
9 :	$p \wedge q$	$\wedge i$ 8,6
10 :	$p \wedge q$	$\vee e$ 1.2,2–5,6–9

DN: Reglas derivadas: modus tollens

- Regla derivada de modus tollens (MT):
$$\frac{F \rightarrow G \quad \neg G}{\neg F} MT$$

1 :	$F \rightarrow G, \neg G$	premises
2 :	F	assumption
3 :	G	$\rightarrow e$ 2,1.1
4 :	\perp	$\neg e$ 1,2,3
5 :	$\neg F$	$\neg i$ 2-4

DN: Reglas derivadas: introducción de doble negación

- Regla de introducción de la doble negación: $\frac{F}{\neg\neg F} \neg\neg i$

1 :	F	premise
2 :	$\neg F$	assumption
3 :	\perp	$\neg e$ 2,1
4 :	$\neg\neg F$	$\neg i$ 2-3

DN: Reglas derivadas: reducción al absurdo (RAA)

- Regla de reducción al absurdo:

$$\frac{\begin{array}{c} \neg F \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{F} \text{ RAA}$$

1 :	$\neg F \rightarrow \perp$	premise
2 :	$\neg F$	assumption
3 :	\perp	$\rightarrow e$ 2,1
4 :	$\neg\neg F$	$\neg i$ 2-3
5 :	F	$\neg\neg e$ 4

DN: Reglas derivadas: ley del tercio excluido (LEM)

- Ley del tercio excluido (LEM): $\overline{F \vee \neg F} \text{ LEM}$

1 :	$\neg(F \vee \neg F)$	assumption
2 :	F	assumption
3 :	$F \vee \neg F$	$\vee i$ 2
4 :	\perp	$\neg e$ 1,3
5 :	$\neg F$	$\neg i$ 2–4
6 :	$F \vee \neg F$	$\vee i$ 2 5
7 :	\perp	$\neg e$ 1,6
8 :	$\neg\neg(F \vee \neg F)$	$\neg i$ 1–7
9 :	$F \vee \neg F$	$\neg\neg e$ 8

DN: Reglas derivadas: ley del tercio excluido (LEM)

- Ejemplo: $p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$:

1 :	$p \rightarrow q$	premise
2 :	$p \vee \neg p$	LEM
3 :	p	assumption
4 :	q	$\rightarrow e$ 3,1
5 :	$\neg p \vee q$	$\vee i_2$ 4
6 :	$\neg p$	assumption
7 :	$\neg p \vee q$	$\vee i_1$ 6
8 :	$\neg p \vee q$	$\vee e$ 2,3–5,6–7

DN: Reglas de deducción natural

- Reglas de deducción natural:

	Introducción	Eliminación
\wedge	$\frac{F \quad G}{F \wedge G} \wedge i$	$\frac{F \wedge G}{F} \wedge e_1 \quad \frac{F \wedge G}{G} \wedge e_2$
\vee	$\frac{F}{F \vee G} \vee i_1 \quad \frac{G}{F \vee G} \vee i_2$	$\frac{F \vee G \quad \begin{array}{ c } \hline F \\ \hline \vdots \\ \hline H \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{ c } \hline G \\ \hline \vdots \\ \hline H \\ \hline \end{array}}{H} \vee e$
\rightarrow	$\frac{\begin{array}{ c } \hline F \\ \hline \vdots \\ \hline G \\ \hline \end{array}}{F \rightarrow G} \rightarrow i$	$\frac{F \quad F \rightarrow G}{G} \rightarrow e$

DN: Reglas de deducción natural

- Reglas de deducción natural:

	Introducción	Eliminación
\neg	$\frac{\boxed{\begin{array}{c} F \\ \vdots \\ \perp \end{array}}}{\neg F} \neg i$	$\frac{F \quad \neg F}{\perp} \neg e$
\perp		$\frac{\perp}{F} \perp e$
$\neg\neg$		$\frac{\neg\neg F}{F} \neg\neg e$
\leftrightarrow	$\frac{F \rightarrow G \quad G \rightarrow F}{F \leftrightarrow G} \leftrightarrow i$	$\frac{F \leftrightarrow G}{F \rightarrow G} \leftrightarrow e_1 \quad \frac{F \leftrightarrow G}{G \rightarrow F} \leftrightarrow e_2$

- Adecuación y completitud del cálculo de deducción natural.

Bibliografía

- C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal*. (Ariel, 2000) Cap. 16: Cálculo deductivo.
- R. Bornat *Using ItL Jape with X* (Department of Computer Science, QMW, 1998)
- J.A. Díez *Iniciación a la Lógica*, (Ariel, 2002) Cap. 4: Cálculo deductivo. Deducibilidad.
- M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems*. (Cambridge University Press, 2000) Cap. 1: Propositional logic.
- Fitting, M. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving (2nd ed.)* (Springer, 1995) Cap. 4.2: Natural deduction.
- E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003) Cap. 3.6: El método de la Dedución Natural