# Tema 6: Sintaxis y semántica de la lógica de primer orden

**José A. Alonso Jiménez**
**Andrés Cordón Franco**

**Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial**

Universidad de Sevilla

# Limitación expresiva de la lógica proposicional

- Ejemplo 1: ***Si Sevilla es vecina de Cádiz, entonces Cádiz es vecina de Sevilla. Sevilla es vecina de Cádiz. Por tanto, Cádiz es vecina de Sevilla***
- Representación en lógica proposicional:

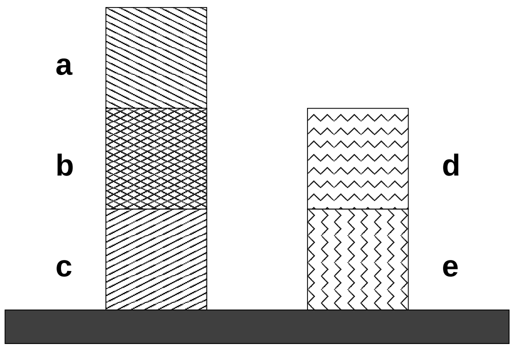
$$\{SvC \to CvS, \quad SvC\} \models CvS$$

- Ejemplo 2: ***Si una ciudad es vecina de otra, entonces la segunda es vecina de la primera. Sevilla es vecina de Cádiz. Por tanto, Cádiz es vecina de Sevilla***
- Representación en lógica proposicional: Imposible
- Representación en lógica de primer orden:

$$\{(\forall x)(\forall y)[vecina(x,y) \to vecina(y,x)], \quad vecina(Sevilla, Cadiz)\}$$
$$\models vecina(Cadiz, Sevilla)$$

# Potencia expresiva de la lógica de primer orden

- **Mundo de los bloques**




- $\boldsymbol{sobre(x,y)}$ **se verifica si el bloque $\boldsymbol{x}$ está colocado sobre el bloque $\boldsymbol{y}$**
- $\boldsymbol{sobre\_mesa(x)}$ **se verifica si el bloque $\boldsymbol{x}$ está sobre la mesa**
- **Situación del ejemplo:**

$$\boldsymbol{sobre(a,b), sobre(b,c), sobre\_mesa(c), sobre(d,e), sobre\_mesa(e)}$$

# Potencia expresiva de la lógica de primer orden

- $\boldsymbol{bajo(x,y)}$ se verifica si el bloque $x$ está debajo del bloque $y$

  $$(\forall x)(\forall y)[bajo(x,y) \leftrightarrow sobre(y,x)]$$

- $\boldsymbol{encima(x,y)}$ se verifica si el bloque $x$ está encima del bloque $y$ pudiendo haber otros bloques entre ellos

  $$(\forall x)(\forall y)[encima(x,y) \leftrightarrow sobre(x,y) \vee (\exists z)[sobre(z,x) \wedge encima(z,y)]]$$

- $\boldsymbol{libre(x)}$ se verifica si el bloque $x$ no tiene bloques encima

  $$(\forall x)[libre(x) \leftrightarrow \neg(\exists y)sobre(y,x)]$$

- $\boldsymbol{pila(x,y,z)}$ se verifica si el bloque $x$ está sobre el $y$, el $y$ sobre el $z$ y el $z$ sobre la mesa

  $$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[pila(x,y,z) \leftrightarrow sobre(x,y) \wedge sobre(y,z) \wedge sobre\_mesa(z)]$$

- Prop.: Si $z, y, z$ es una pila entonces $y$ no está libre

  $$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[pila(x,y,z) \rightarrow \neg libre(y)]$$

# Potencia expresiva de la lógica de primer orden

- **Representación con funciones e igualdad**
  - $es\_bloque(x)$ se verifica si $x$ es un bloque
  - $superior(x)$ es el bloque que está sobre el bloque $x$
  - Situación del ejemplo:

    $$es\_bloque(a), es\_bloque(b), es\_bloque(c), es\_bloque(d), es\_bloque(e)$$

    $$superior(b) = a, superior(c) = b, superior(e) = d$$
  - $sobre\_mesa(x)$ se verifica si el bloque $x$ está sobre la mesa

    $$(\forall x)[sobre\_mesa(x) \leftrightarrow es\_bloque(x) \wedge \neg(\exists y)superior(y) = x]$$
  - $libre(x)$ se verifica si el bloque $x$ no tiene bloques encima

    $$(\forall x)[libre(x) \leftrightarrow \neg(\exists y)superior(x) = y]$$
  - $tope(x)$ es el bloque libre que está encima de $x$

    $$(\forall x)[(libre(x) \rightarrow tope(x) = x) \wedge (\neg libre(x) \rightarrow tope(x) = tope(superior(x)))]$$

# Potencia expresiva de la lógica de primer orden

- **Ejemplos de formalización:**
  - ***La Tierra es un planeta:*** planeta(Tierra)
  - ***La Luna no es un planeta:*** $\neg$planeta(Luna)
  - ***La Luna es un satélite:*** satélite(Luna)
  - ***La Tierra gira alrededor del Sol:*** gira(Tierra, Sol)
  - ***Todo planeta es un satélite:*** $(\forall x)[\text{planeta}(x) \rightarrow \text{satélite}(x)]$
  - ***Todo planeta gira alrededor del Sol:*** $(\forall x)[\text{planeta}(x) \rightarrow \text{gira}(x, \text{Sol})]$
  - ***Algún planeta gira alrededor de la Luna:*** $(\exists x)[\text{planeta}(x) \wedge \text{gira}(x, \text{Luna})]$
  - ***Hay por lo menos un satélite:*** $(\exists x)\text{satélite}(x)$
  - ***Ningún planeta es un satélite:*** $\neg(\exists x)[\text{planeta}(x) \wedge \text{satélite}(x)]$
  - ***Ningún objeto celeste gira alrededor de sí mismo:*** $\neg(\exists x)\text{gira}(x, x)$

# Potencia expresiva de la lógica de primer orden

- ***Alrededor de los satélites no giran objetos:*** $(\forall x)[\text{satélite}(x) \to \neg(\exists y)\text{gira}(y, x)]$
- ***Hay exactamente un satélite:*** $(\exists x)[\text{satélite}(x) \wedge (\forall y)[\text{satélite}(y) \to x = y]]$
- ***La Luna es un satélite de la Tierra:*** $\text{satélite}(\text{Luna}, \text{Tierra})$
  [Notar la sobrecarga de la relación satélite]
- ***Todo planeta tiene un satélite:*** $(\forall x)[\text{planeta}(x) \to (\exists y)\text{satélite}(y, x)]$
- ***La Tierra no tiene satélites:*** $\neg(\exists x)\text{satélite}(x, \text{Tierra})$
- ***Algún planeta no tiene satélites:*** $(\exists x)[\text{planeta}(x) \wedge \neg(\exists y)\text{satélite}(y, x)]$
- ***Sólo los planetas tienen satélites:*** $(\forall x)[(\exists y)\text{satélite}(y, x) \to \text{planeta}(x)]$
- ***Todo satélite es satélite de algún planeta:***
  $(\forall x)[\text{satélite}(x) \to (\exists y)(\text{planeta}(y) \wedge \text{satélite}(x, y))]$
- ***La Luna no gira alrededor de dos planetas diferentes:***
  $\neg(\exists x)(\exists y)[\text{planeta}(x) \wedge \text{planeta}(y) \wedge \text{gira}(\text{Luna}, x) \wedge \text{gira}(\text{Luna}, y) \wedge x \neq y]$
- ***Hay exactamente dos planetas:***
  $(\exists x)(\exists y)[\text{planeta}(x) \wedge \text{planeta}(y) \wedge x \neq y \wedge (\forall z)[\text{planeta}(z) \to (z = x \vee z = y)]]$

# Lenguaje de primer orden

- **Lenguaje de primer orden:**
  - **Símbolos lógicos:**
    - **- Variables:** $x, y, z, \dots, x_1, x_2, \dots$.
    - **- Conectivas:** $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.
    - **- Cuantificadores:** $\forall, \exists$.
    - **- Símbolo de igualdad:** $=$.
  - **Símbolos propios:**
    - **- Símbolos de constantes:** $a, b, c, \dots, a_1, a_2, \dots$.
    - **- Símbolos de predicado (con aridad):** $P, Q, R, \dots, P_1, P_2, \dots$.
    - **- Símbolos de función (con aridad):** $f, g, h, \dots, f_1, f_2, \dots$.
  - **Símbolos auxiliares:** "(", ")", ",".
  - **Notación:**
    - $L, L_1, L_2, \dots$ **representan lenguajes de primer orden.**
    - **Var representa el conjunto de las variables.**
  - **Los símbolos de predicados de aridad mayor que 1 se llaman de relaciones.**

# Ejemplos de lenguajes de primer orden

- **Lenguaje del mundo de los bloques:**
  - **Símbolos de constantes:** $a, b, c, d, e$
  - **Símbolos de predicado (y de relación):**
    - de aridad 1: $sobre\_mesa, libre, es\_bloque$
    - de aridad 2: $sobre, bajo, encima$
    - de aridad 3: $pila$
  - **Símbolos de función (de aridad 1):** $superior, tope$
- **Lenguaje de la aritmética:**
  - **Símbolos de constantes:** $0, 1$
  - **Símbolos de función:**
    - monaria: $s$ (siguiente)
    - binarias: $+, \cdot$
  - **Símbolo de predicado binario:** $<$

# Sintaxis: términos

- **Términos**
  - **Def. de término de un lenguaje de primer orden $L$:**
    - Las variables son términos de $L$.
    - Las constantes de $L$ son términos de $L$.
    - Si $f$ es un símbolo de función $n$–aria de $L$ y $t_1, \dots, t_n$ son términos de $L$, entonces $f(t_1, \dots, t_n)$ es un término de $L$.
  - **Ejemplo: En el lenguaje de la aritmética,**
    1. $+(\cdot(x, 1), s(y))$ es un término, que se suele escribir como $(x \cdot 1) + s(y)$
    2. $+(\cdot(x, <), s(y))$ no es un término
  - **Notación:**
    - $s, t, t_1, t_2, \dots$ representan términos.
    - Térm($L$) representa el conjunto de los términos de $L$

# Sintaxis: fórmulas atómicas

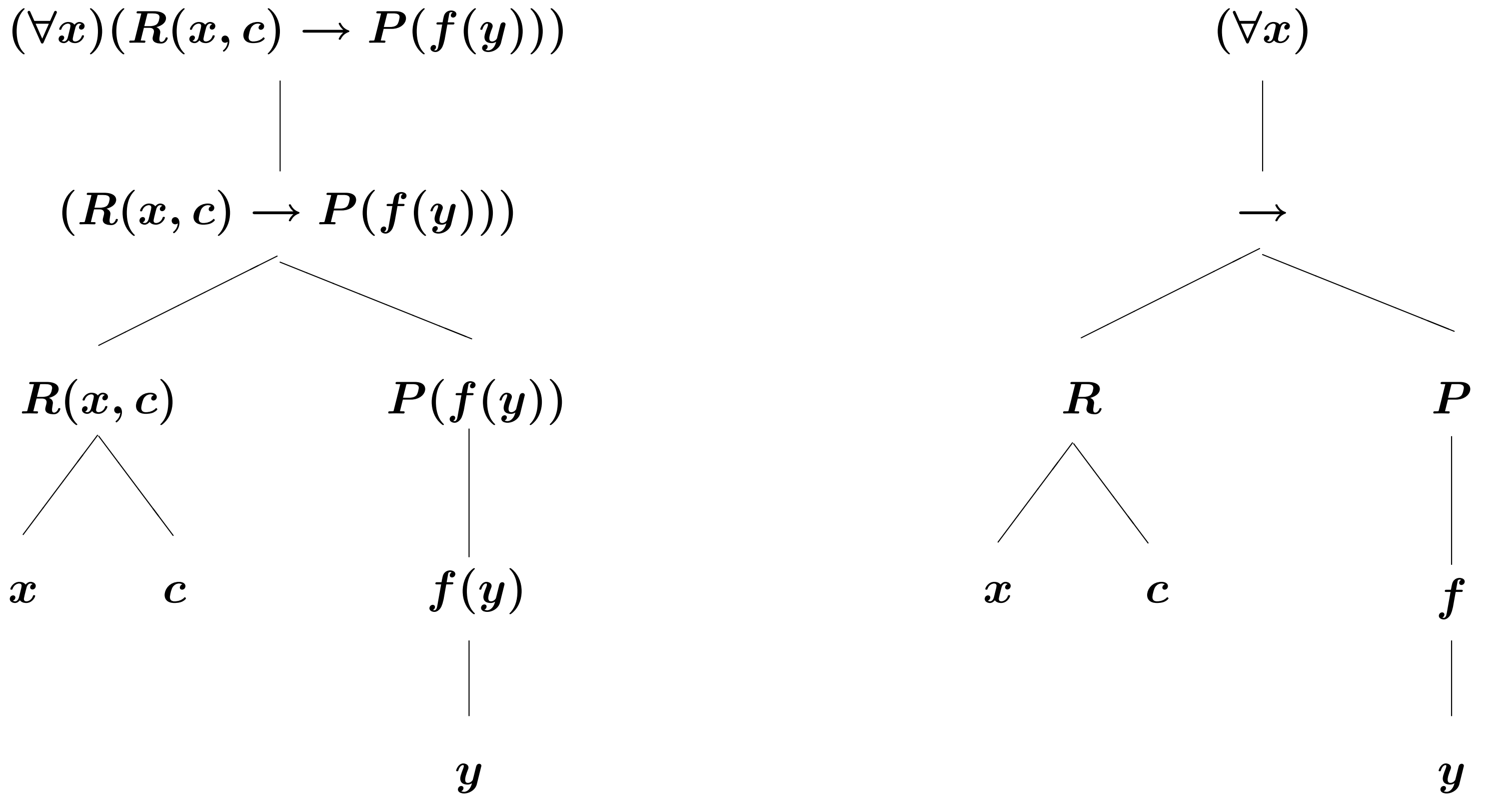
- **Fórmulas atómicas:**
  - **Def. de fórmula atómica de un lenguaje de primer orden $L$:**
    - Si $t_1$ y $t_2$ son términos de $L$, entonces $t_1 = t_2$ es una fórmula atómica de $L$.
    - Si $P$ es un símbolo de relación $n$–aria de $L$ y $t_1, \dots, t_n$ son términos de $L$, entonces $P(t_1, \dots, t_n)$ es una fórmula atómica de $L$.
  - **Ejemplo: En el lenguaje de la aritmética,**
    1. $< (\cdot(x, 1), s(y))$ es una fórmula atómica que se suele escribir como $x \cdot 1 < s(y)$
    2. $+(x, y) = \cdot(x, y)$ es una fórmula atómica que se suele escribir como $x + y = x \cdot y$
  - **Notación:**
    - $A, B, A_1, A_2, \dots$ representan fórmulas atómicas.
    - Átom($L$) representa el conjunto de las fórmulas atómicas de $L$

# Sintaxis: fórmulas

- **Fórmulas:**
  - Def. de las fórmulas de $L$:
    - Las fórmulas atómicas de $L$ son fórmulas de $L$.
    - Si $F$ y $G$ son fórmulas de $L$, entonces $\neg F$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$ y $(F \leftrightarrow G)$ son fórmulas de $L$.
    - Si $F$ es una fórmula de $L$, entonces $(\forall x)F$ y $(\exists x)F$ son fórmulas de $L$.
  - Ejemplo: En el lenguaje de la aritmética,
    1. $(\forall x)(\exists y) < (x, y)$ es una fórmula que se suele escribir como $(\forall x)(\exists y) x < y$
    2. $(\forall x)(\exists y) + (x, y)$ no es una fórmula.
  - Notación:
    - $F, G, H, F_1, F_2, \dots$ representan fórmulas.
    - Fórm$(L)$ representa el conjunto de las fórmulas de $L$

# Sintaxis: fórmulas

- **Árboles de análisis (o de formación) y esquemáticos**



# Sintaxis: subfórmulas

- **Subfórmulas:**
  - **Def:** El conjunto $\mathrm{Subf}(F)$ de las subfórmulas de una fórmula $F$ se define recursivamente por:

$$\mathrm{Subf}(F) = \begin{cases} \{F\}, & \text{si } F \text{ es una fórmula atómica;} \\ \{F\} \cup \mathrm{Subf}(G), & \text{si } F = \neg G; \\ \{F\} \cup \mathrm{Subf}(G) \cup \mathrm{Subf}(H), & \text{si } F = G * H; \\ \{F\} \cup \mathrm{Subf}(G), & \text{si } F = (\forall x)G; \\ \{F\} \cup \mathrm{Subf}(G), & \text{si } F = (\exists x)G \end{cases}$$

  - **Ejemplo:**

$$\begin{aligned} \mathrm{Subf}((\forall x)(R(x,c) \to P(f(y)))) = \{ \; & (\forall x)(R(x,c) \to P(f(y))), \\ & (R(x,c) \to P(f(y))), \\ & R(x,c), \\ & P(f(y))\} \end{aligned}$$

# Sintaxis: omisión de paréntesis

- **Criterios de reducción de paréntesis:**
  - **Pueden eliminarse los paréntesis externos.**

    $F \wedge G$ es una abreviatura de $(F \wedge G)$

  - **Precedencia de asociación de conectivas y cuantificadores:** $\forall, \exists, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

    $\forall x P(x) \rightarrow Q(x)$ es una abreviatura de $((\forall x) P(x)) \rightarrow Q(x)$

  - **Cuando una conectiva se usa repetidamente, se asocia por la derecha.**

    $F \vee G \vee H$ es una abreviatura de $(F \vee (G \vee H))$
    $F \wedge G \wedge H \rightarrow \neg F \vee G$ es una abreviatura de $((F \wedge (G \wedge H)) \rightarrow (\neg F \vee G))$

  - **Los símbolos binarios pueden escribirse en notación infija.**

    $x + y$ es una abreviatura de $+(x, y)$
    $x < y$ es una abreviatura de $< (x, y)$

# Sintaxis: conjuntos de variables

- **Conjuntos de variables:**
  - **Def.:** El conjunto de las variables de un término $t$ se define recursivamente por:

$$\mathrm{V}(t) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } t \text{ es una constante;} \\ \{x\}, & \text{si } t \text{ es una variable } x; \\ \mathrm{V}(t_1) \cup \ldots \cup \mathrm{V}(t_n), & \text{si } t \text{ es } f(t_1, \ldots, t_n) \end{cases}$$

  - **Def.:** El conjunto de las variables de una fórmula $F$ se define recursivamente por:

$$\mathrm{V}(F) = \begin{cases} \mathrm{V}(t_1) \cup \mathrm{V}(t_2), & \text{si } F \text{ es } t_1 = t_2; \\ \mathrm{V}(t_1) \cup \ldots \cup \mathrm{V}(t_n), & \text{si } F \text{ es } P(t_1, \ldots, t_n); \\ \mathrm{V}(G), & \text{si } F \text{ es } \neg G; \\ \mathrm{V}(G) \cup \mathrm{V}(H), & \text{si } F \text{ es } G * H; \\ \mathrm{V}(G), & \text{si } F \text{ es } (\forall x) G; \\ \mathrm{V}(G), & \text{si } F \text{ es } (\exists x) G \end{cases}$$

  - **Ejemplos:**
    - El conjunto de las variables de $(\forall x)(R(x, c) \to P(f(y)))$ es $\{x, y\}$.
    - El conjunto de las variables de $(\forall x)(R(a, c) \to P(f(y)))$ es $\{y\}$.

# Sintaxis: apariciones libres y ligadas

- **Apariciones libres y ligadas:**
  - **Def.: Una aparición (u ocurrencia) de la variable $x$ en la fórmula $F$ es ligada si es en una subfórmula de $F$ de la forma $(\forall x)G$ ó $(\exists x)G$.**
  - **Def.: Una aparición (u ocurrencia) de la variable $x$ en la fórmula $F$ es libre si no es ligada**
  - **Ejemplo: Las apariciones ligadas son las subrayadas:**

$$(\forall x)(P(\underline{x}) \to R(\underline{x}, y)) \to ((\exists y)P(\underline{y}) \to R(z, x))$$

$$(\exists x)R(\underline{x}, y) \lor (\forall y)P(\underline{y})$$

$$(\forall x)(P(\underline{x}) \to (\exists y)R(\underline{x}, \underline{y}))$$

$$P(x) \to R(x, y)$$

# Sintaxis: variables libres y ligadas

- **Variables libres y ligadas:**
  - **Def.: La variable $x$ es libre en $F$ si tiene una aparición libre en $F$.**
  - **Def.: La variable $x$ es ligada en $F$ si tiene una aparición ligada en $F$.**
  - **Prop.: El conjunto de las variables libres de una fórmula $F$ es:**

$$\mathrm{VL}(F) = \begin{cases} \mathrm{V}(t_1) \cup \mathrm{V}(t_2), & \text{si } F \text{ es } t_1 = t_2; \\ \mathrm{V}(t_1) \cup \ldots \cup \mathrm{V}(t_n), & \text{si } F \text{ es } P(t_1, \ldots, t_n); \\ \mathrm{VL}(G), & \text{si } F \text{ es } \neg G; \\ \mathrm{VL}(G) \cup \mathrm{VL}(H), & \text{si } F \text{ es } G * H; \\ \mathrm{VL}(G) \setminus \{x\}, & \text{si } F \text{ es } (\forall x)G; \\ \mathrm{VL}(G) \setminus \{x\}, & \text{si } F \text{ es } (\exists x)G \end{cases}$$

  - **Ejemplo:**

| Fórmula | Ligadas | Libres |
|---|---|---|
| $(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x,y)) \rightarrow ((\exists y)P(y) \rightarrow R(x,z))$ | $x, y$ | $x, y, z$ |
| $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)R(x,y))$ | $x, y$ | |
| $(\forall z)(P(x) \rightarrow R(x,y))$ | | $x, y$ |

# Sintaxis: fórmulas cerradas y básicas

- **Fórmula cerradas:**
  - **Def.:** Una fórmula cerrada (o sentencia) es una fórmula sin variables libres.
  - **Ejemplos:** $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)R(x,y))$ es cerrada.
    $(\exists x)R(x,y) \lor (\forall y)P(y)$ no es cerrada.

- **Fórmulas básicas:**
  - **Def.:** Una fórmula básica es una fórmula sin variables.
  - **Ejemplos:** $P(a) \rightarrow R(a,b)$ es básica.
    $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)R(x,y))$ no es básica.

# Sintaxis: sustituciones

- **Sustituciones (de un lenguaje):**
  - **Def.:** Una sustitución $\sigma$ (de $L$) es una aplicación $\sigma : \text{Var} \rightarrow \text{Térm}(L)$.
  - **Ejemplo:** La aplicación $\sigma$ de $Var$ en los términos de la aritmética tal que
    $$\sigma(x) = s(0), \sigma(y) = x + y \text{ y } \sigma(z) = z \text{ para } z \in \text{Var} \setminus \{x, y\}$$
    es una sustitución.
  - **Notación:** $[x_1/t_1, x_2/t_2, \dots, x_n/t_n]$ representa la sustitución $\sigma$ definida por
    $$\sigma(x) = \begin{cases} t_i, & \text{si } x \text{ es } x_i; \\ x, & \text{si } x \notin \{x_1, \dots, x_n\} \end{cases}$$
  - **Ejemplo:** La sustitución del ejemplo anterior se representa por
    $$[x/s(0), y/x + y]$$
  - **Notación:** $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \dots$ representarán sustituciones.

# Sintaxis: Aplicación de sustituciones a términos

- **Aplicación de sustituciones a términos:**
  - Def.: $t[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$ es el término obtenido sustituyendo en $t$ las apariciones de $x_i$ por $t_i$.
  - Def.: La extensión de $\sigma$ a términos es la aplicación $\sigma : \text{Térm}(L) \to \text{Térm}(L)$ definida por

$$t\sigma = \begin{cases} c, & \text{si } t \text{ es una constante } c; \\ \sigma(x), & \text{si } t \text{ es una variable } x; \\ f(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma), & \text{si } t \text{ es } f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

  - Si $\sigma = [x/f(y, a), y/z]$, entonces
    - $a\sigma = a$, donde $a$ es una constante.
    - $w\sigma = w$, donde $w$ es una variable distinta de $x$ e $y$.
    - $h(a, x, w)\sigma = h(a\sigma, x\sigma, w\sigma) = h(a, f(y, a), w)$
    - $f(x, y)\sigma = f(x\sigma, y\sigma) = f(f(y, a), z)$
    - $h(a, f(x, y), w)\sigma = h(a\sigma, f(x, y)\sigma, w\sigma) = h(a, f(f(y, a), z), w)$

# Sintaxis: Composición de sustituciones

- **Composición de sustituciones:**
  - **Diferencia entre sustituciones simultáneas y consecutivas:**
    - $g(x,z)[x/g(z,b),z/a] = g(g(z,b),a)$
    - $g(x,z))[x/g(z,b)][z/a] = g(g(z,b),z)[z/a] = g(g(a,b),a)$
  - **Cálculo de la composición:** Si $\sigma_1 = [x/f(z,a), y/w]$ y $\sigma_2 = [x/b, z/g(w)]$, entonces
    - $x\sigma_1\sigma_2 = (x\sigma_1)\sigma_2 = f(z,a)\sigma_2 = f(z\sigma_2, a\sigma_2) = f(g(w),a)$
    - $y\sigma_1\sigma_2 = (y\sigma_1)\sigma_2 = w\sigma_2 = w$
    - $z\sigma_1\sigma_2 = (z\sigma_1)\sigma_2 = z\sigma_2 = g(w)$
    - $w\sigma_1\sigma_2 = (w\sigma_1)\sigma_2 = w\sigma_2 = w$

    Por tanto, $\sigma_1\sigma_2 = [x/f(g(w),a), y/w, z/g(w)]$. Comprobación:

    $h(y,x)\sigma_1\sigma_2 = (h(y,x)\sigma_1)\sigma_2 = h(w,f(z,a))\sigma_2 = h(w\sigma_2, f(z,a)\sigma_2) = h(w,f(g(w),a))$
    $h(y,x)\sigma_1\sigma_2 = h(y,x)[x/f(g(w),a), y/w, z/g(w)] = h(w,f(g(w),a))$

# Sintaxis: Aplicación de sustituciones a fórmulas

- **Aplicación de sustituciones a fórmulas:**
  - Def.: $F[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$ es la fórmula obtenida sustituyendo en $F$ las apariciones libres de $x_i$ por $t_i$.
  - Def.: La extensión de $\sigma$ a fórmulas es la aplicación $\sigma : \text{Fórm}(L) \to \text{Fórm}(L)$ definida por

$$F\sigma = \begin{cases} P(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma), & \text{si } F \text{ es la fórmula atómica } P(t_1, \dots, t_n); \\ t_1\sigma = t_2\sigma, & \text{si } F \text{ es la fórmula } t_1 = t_2; \\ \neg(G\sigma), & \text{si } F \text{ es } \neg G; \\ G\sigma * H\sigma, & \text{si } F \text{ es } G * H; \\ (Qx)(G\sigma_x), & \text{si } F \text{ es } (Qx)G \text{ y } Q \in \{\forall, \exists\} \end{cases}$$

donde $\sigma_x$ es la sustitución definida por

$$\sigma_x(y) = \begin{cases} x, & \text{si } y \text{ es } x; \\ \sigma(y) & \text{si } y \text{ es distinta de } x \end{cases}$$

# Sintaxis: Aplicación de sustituciones a fórmulas

- **Ejemplos: Si $\boldsymbol{\sigma} = [x/f(y), y/b]$, entonces**

1. $$\begin{aligned}((\forall x)(Q(x) \to R(x,y)))\sigma &= (\forall x)((Q(x) \to R(x,y))\sigma_x) \\ &= (\forall x)(Q(x)\sigma_x \to R(x,y)\sigma_x) \\ &= (\forall x)(Q(x) \to R(x,b))\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}(Q(x) \to (\forall x)R(x,y))\sigma &= Q(x)\sigma \to ((\forall x)R(x,y))\sigma \\ &= Q(f(y)) \to (\forall x)(R(x,y)\sigma_x) \\ &= Q(f(y)) \to (\forall x)R(x,b)\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}((\forall x)(Q(x) \to (\forall y)R(x,y)))\sigma &= (\forall x)((Q(x) \to (\forall y)R(x,y))\sigma_x) \\ &= (\forall x)(Q(x)\sigma_x \to ((\forall y)R(x,y))\sigma_x) \\ &= (\forall x)(Q(x) \to (\forall y)(R(x,y)\sigma_{xy})) \\ &= (\forall x)(Q(x) \to (\forall y)R(x,y))\end{aligned}$$

# Sintaxis: Sustituciones libres

- **Sustituciones libres:**
  - **Def.:** Una sustitución se denomina libre para una fórmula cuando todas las apariciones de variables introducidas por la sustitución en esa fórmula resultan libres.
  - **Ejemplos:**
    - $[y/x]$ no es libre para $(\exists x)(x < y)$
      $(\exists x)(x < y)[y/x] = (\exists x)(x < x)$
    - $[y/g(y)]$ es libre para $(\forall x)(P(x) \to Q(x, f(y)))$
      $(\forall x)(P(x) \to Q(x, f(y)))[y/g(y)] = (\forall x)(P(x) \to Q(x, f(g(y))))$
    - $[y/g(x)]$ no es libre para $(\forall x)(P(x) \to Q(x, f(y)))$
      $(\forall x)(P(x) \to Q(x, f(y)))[y/g(x)] = (\forall x)(P(x) \to Q(x, f(g(x))))$
  - **Convenio:** Al escribir $F\sigma$ supondremos que $\sigma$ es libre para $F$.

# Semántica: Estructuras, asignaciones e interpretaciones

- Una estructura del lenguaje $L$ es un par $\mathcal{I} = (U, I)$ tal que:
  - $U$ es un conjunto no vacío, denominado universo de la estructura;
  - $I$ es una función cuyo dominio es el conjunto de símbolos propios de $L$ y tal que
    - si $c$ es una constante de $L$, entonces $I(c) \in U$ (i.e. $I(c)$ es un elemento de $U$);
    - si $f$ es un símbolo de función $n$–aria ($n > 0$) de $L$, entonces $I(f) : U^n \to U$ (i.e. $I(f)$ es una función $n$–aria en $U$);
    - si $R$ es un símbolo de relación $n$–aria ($n > 0$) de $L$, entonces $I(R) \subseteq U^n$ (i.e. $I(R)$ es una relación $n$–aria en $U$).
- Una asignación $A$ en una estructura $(U, I)$ es una función $A : \mathrm{Var} \to U$ que hace corresponder a cada variable del alfabeto un elemento del universo de la estructura.
- Una interpretación de $L$ es un par $(\mathcal{I}, A)$ formado por una estructura $\mathcal{I}$ de $L$ y una asignación $A$ en $\mathcal{I}$.
- Notación: A veces se usa para los valores de verdad V y F en lugar de 1 y 0.

# Semántica: Estructuras

- **Ejemplos:** Sea $L$ el lenguaje de la aritmética cuyos símbolos propios son:
  constante: 0;
  símbolo de función monaria: $s$;
  símbolo de función binaria: $+$ y
  símbolo de relación binaria: $\leq$

  – Primera estructura de $L$:
  $U_1 = \mathbb{N}$
  $I_1(0) = 0$
  $I_1(s) = \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$ (sucesor)
  $I_1(+) = \{(a, b, a+b) : a, b \in \mathbb{N}\}$ (suma)
  $I_1(\leq) = \{(n, m) : n, m \in \mathbb{N}, n \leq m\}$ (menor o igual)

  – Segunda estructura de $L$:
  $U_2 = \{0, 1\}^*$ (cadenas de 0 y 1)
  $I_2(0) = \epsilon$ (cadena vacía)
  $I_2(s) = \{(w, w1) : w \in \{0, 1\}^*\}$ (siguiente)
  $I_2(+) = \{(w_1, w_2, w_1 w_2) : w_1, w_2 \in \{0, 1\}^*\}$ (concatenación)
  $I_2(\leq) = \{(w_1, w_2) : w_1, w_2 \in \{0, 1\}^*, w_1 \text{ es prefijo de } w_2\}$ (prefijo)

# Semántica: Estructuras

- **Ejemplos (cont.):**
  - **Tercera estructura de $L$:**

$$U_3 = \{abierto, cerrado\}$$
$$I_3(0) = cerrado$$
$$I_3(s) = \{\ (abierto, cerrado), (cerrado, abierto)\}$$
$$I_3(+) = \{\ (abierto, abierto, abierto), (abierto, cerrado, abierto), (cerrado, abierto, abierto), (cerrado, cerrado, cerrado)\}$$
$$I_3(\leq) = \{\ (abierto, abierto), (cerrado, abierto), (cerrado, cerrado)\}$$

| $e$ | $I_3(s)(e)$ |
|---|---|
| $abierto$ | $cerrado$ |
| $cerrado$ | $abierto$ |

| $I_3(+)$ | $abierto$ | $cerrado$ |
|---|---|---|
| $abierto$ | $abierto$ | $abierto$ |
| $cerrado$ | $abierto$ | $cerrado$ |

| $I_3(\leq)$ | $abierto$ | $cerrado$ |
|---|---|---|
| $abierto$ | 1 | 0 |
| $cerrado$ | 1 | 1 |

# Semántica: Evaluación de términos

- **Evaluación de términos:**
  - Def.: Dada una estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ de $L$ y una asignación $A$ en $\mathcal{I}$, se define la función de evaluación de términos $\mathcal{I}_A : \text{Térm}(L) \to U$ por

$$\mathcal{I}_A(t) = \begin{cases} I(c), & \text{si } t \text{ es una constante } c; \\ A(x), & \text{si } t \text{ es una variable } x; \\ I(f)(\mathcal{I}_A(t_1), \dots, \mathcal{I}_A(t_n)), & \text{si } t \text{ es } f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

  - $\mathcal{I}_A(t)$ se lee "el valor de $t$ en $\mathcal{I}$ respecto de $A$".
  - Ejemplos: Sean $L$ el lenguaje de la página ?? y $t$ el término $s(+(x, s(0)))$.
    - Si $\mathcal{I}$ es la primera estructura y $A(x) = 3$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_A(t) &= \mathcal{I}_A(s(+(x, s(0)))) & &= I(s)(\mathcal{I}_A(+(x, s(0)))) = \\ &= I(s)(I(+)(\mathcal{I}_A(x), \mathcal{I}_A(s(0)))) & &= I(s)(I(+)(A(x), \mathcal{I}_A(s(0)))) = \\ &= I(s)(I(+)(3, I(s)(\mathcal{I}_A(0)))) & &= I(s)(I(+)(3, I(s)(I(0)))) = \\ &= I(s)(I(+)(3, I(s)(0))) & &= I(s)(I(+)(3, 1)) = \\ &= I(s)(4) & &= 5 \end{aligned}$$

# Semántica: Evaluación de términos

- **Ejemplos (cont.)**
  - Si $\mathcal{I}$ es la segunda estructura y $A(x) = 10$, entonces

$$\begin{array}{rll} \mathcal{I}_A(t) & = \mathcal{I}_A(s(+(x, s(0)))) & = I(s)(\mathcal{I}_A(+(x, s(0)))) = \\ & = I(s)(I(+)(\mathcal{I}_A(x), \mathcal{I}_A(s(0)))) & = I(s)(I(+)(A(x), \mathcal{I}_A(s(0)))) = \\ & = I(s)(I(+)(10, I(s)(\mathcal{I}_A(0)))) & = I(s)(I(+)(10, I(s)(I(0)))) = \\ & = I(s)(I(+)(10, I(s)(\epsilon))) & = I(s)(I(+)(10, 1)) = \\ & = I(s)(101) & = 10111 \end{array}$$

  - Si $\mathcal{I}$ es la tercera estructura y $A(x) = abierto$, entonces

$$\begin{array}{rll} \mathcal{I}_A(t) & = \mathcal{I}_A(s(+(x, s(0)))) & = I(s)(\mathcal{I}_A(+(x, s(0)))) = \\ & = I(s)(I(+)(\mathcal{I}_A(x), \mathcal{I}_A(s(0)))) & = I(s)(I(+)(A(x), \mathcal{I}_A(s(0)))) = \\ & = I(s)(I(+)(abierto, I(s)(\mathcal{I}_A(0)))) & = I(s)(I(+)(abierto, I(s)(I(0)))) = \\ & = I(s)(I(+)(abierto, I(s)(cerrado))) & = I(s)(I(+)(abierto, abierto)) = \\ & = I(s)(abierto) & = cerrado \end{array}$$

# Semántica: Evaluación de términos

- **Ejemplo anterior con notación reducida e infija:**
  **Sean $L$ el lenguaje de la página ?? y $t$ el término $s(x + s(0))$.**
  - **Si $\mathcal{I}$ es la primera estructura y $A(x) = 3$, entonces**

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_A(t) &= \mathcal{I}_A(s(x + s(0))) &&= s^I(3 +^I s^I(0^I)) = \\ &= s^I(3 +^I s^I(0)) &&= s^I(3 +^I 1) = \\ &= s^I(4) &&= 5\end{aligned}$$

  - **Si $\mathcal{I}$ es la segunda estructura y $A(x) = 10$, entonces**

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_A(t) &= \mathcal{I}_A(s(x + s(0))) &&= s^I(10 +^I s^I(0^I)) = \\ &= s^I(10 +^I s^I(\epsilon)) &&= s^I(10 +^I 1) = \\ &= s^I(101) &&= 1011\end{aligned}$$

  - **Si $\mathcal{I}$ es la tercera estructura y $A(x) = abierto$, entonces**

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_A(t) &= \mathcal{I}_A(s(x + s(0))) &&= s^I(abierto +^I s^I(0^I)) = \\ &= s^I(abierto +^I s^I(cerrado)) &&= s^I(abierto +^I abierto) = \\ &= s^I(abierto) &&= cerrado\end{aligned}$$

## Semántica: Evaluación de fórmulas

- **Variante de una asignación:**
  - Def.: Sea $A$ una asignación en la estructura $(U, I)$ y $u \in U$. Mediante $A[x/u]$ se representa la asignación definida por

$$A[x/u](y) = \begin{cases} u, & \text{si } y \text{ es } x; \\ A(y) & \text{si } y \text{ es distinta de } x \end{cases}$$

- **Función de verdad de una relación:**
  - Def.: Si $R$ es una relación $n$–aria en $U$ (i.e. $R \subseteq U^n$), entonces la función de verdad de $R$ es la función $H_R : U^n \to \mathbb{B}$ definida por

$$H_R(u_1, \dots, u_n) = \begin{cases} 1, & \text{si } (u_1, \dots, u_n) \in R; \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- **Función de verdad de la igualdad:**
  - Def.: La función de verdad de la igualdad en $U$ es la función $H_= : U^2 \to \mathbb{B}$ definida por

$$H_=(u_1, u_2) = \begin{cases} 1, & \text{si } u_1 = u_2; \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

# Semántica: Evaluación de fórmulas

- **Evaluación de fórmulas:**
  - Def.: Dada una estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ de $L$ y una asignación $A$ sobre $\mathcal{I}$, se define la función de evaluación de fórmulas $\mathcal{I}_A : \text{Fórm}(L) \to \mathbb{B}$ por
    - Si $F$ es $t_1 = t_2$, $\quad \mathcal{I}_A(F) = H_=(\mathcal{I}_A(t_1), I_A(t_2))$
    - Si $F$ es $P(t_1, \dots, t_n)$, $\quad \mathcal{I}_A(F) = H_{I(P)}(\mathcal{I}_A(t_1), \dots, \mathcal{I}_A(t_n))$
    - Si $F$ es $\neg G$, $\quad \mathcal{I}_A(F) = H_\neg(\mathcal{I}_A(G))$
    - Si $F$ es $G * H$, $\quad \mathcal{I}_A(F) = H_*(\mathcal{I}_A(G), \mathcal{I}_A(H))$
    - Si $F$ es $(\forall x)G$, $\quad \mathcal{I}_A(F) = \begin{cases} 1, & \text{si para todo } u \in U \text{ se tiene } \mathcal{I}_{A[x/u]}(G) = 1; \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$
    - Si $F$ es $(\exists x)G$, $\quad \mathcal{I}_A(F) = \begin{cases} 1, & \text{si existe algún } u \in U \text{ tal que } \mathcal{I}_{A[x/u]}(G) = 1; \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$
  - $\mathcal{I}_A(F)$ se lee "el valor de $F$ en $\mathcal{I}$ respecto de $A$".

# Semántica: Evaluación de fórmulas

- **Ejemplo:** Evaluación de $(\exists y)P(x,y)$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ respecto de la asignación $A$ tales que $U = \{1,2\}$, $I(P) = \{(1,1),(2,2)\}$ y $A(x) = 1$
  - En notación completa:

$$\mathcal{I}_A((\exists y)P(x,y)) = \text{V} \Leftrightarrow \mathcal{I}_{A[y/1]}P(x,y) = \text{V ó } \mathcal{I}_{A[y/2]}P(x,y) = \text{V}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[y/1]}P(x,y) &= H_{I(P)}(\mathcal{I}_{A[y/1]}(x), \mathcal{I}_{A[y/1]}(y)) \\ &= H_{I(P)}(A[y/1](x), A[y/1](y)) \\ &= H_{I(P)}(1,1) \\ &= \text{V} \end{aligned}$$

Luego, $\mathcal{I}_A((\exists y)P(x,y)) = \text{V}$.

  - En notación reducida:

$$\mathcal{I}_A((\exists y)P(x,y)) = \text{V} \Leftrightarrow \mathcal{I}_{A[y/1]}P(x,y) = \text{V ó } \mathcal{I}_{A[y/2]}P(x,y) = \text{V}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[y/1]}P(x,y) &= P^I(A[y/1](x), A[y/1](y)) \\ &= P^I(1,1) \\ &= \text{V} \end{aligned}$$

Luego, $\mathcal{I}_A((\exists y)P(x,y)) = \text{V}$.

# Semántica: Evaluación de fórmulas

- **Ejemplo: Evaluación de $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ respecto de la asignación $A$ tales que $U = \{1,2\}$ e $I(P) = \{(1,1),(2,2)\}$**

$$\mathcal{I}_A((\forall x)(\exists y)P(x,y)) = \mathrm{V} \Leftrightarrow \mathcal{I}_{A[x/1]}((\exists y)P(x,y)) = \mathrm{V} \text{ y } \mathcal{I}_{A[x/2]}((\exists y)P(x,y)) = \mathrm{V}$$

$$\mathcal{I}_{A[x/1]}((\exists y)P(x,y)) = \mathrm{V} \Leftrightarrow \mathcal{I}_{A[x/1,y/1]}P(x,y) = \mathrm{V} \text{ ó } \mathcal{I}_{A[x/1,y/2]}P(x,y) = \mathrm{V}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{A[x/1,y/1]}P(x,y) &= H_{I(P)}(\mathcal{I}_{A[x/1,y/1]}(x), \mathcal{I}_{A[x/1,y/1]}(y)) \\ &= H_{I(P)}(A[x/1,y/1](x), A[x/1,y/1](y)) \\ &= H_{I(P)}(1,1) \\ &= \mathrm{V}\end{aligned}$$

**Luego, $\mathcal{I}_{A[x/1]}((\exists y)P(x,y)) = \mathrm{V}$.**

$$\mathcal{I}_{A[x/2]}((\exists y)P(x,y)) = \mathrm{V} \Leftrightarrow \mathcal{I}_{A[x/2,y/1]}P(x,y) = \mathrm{V} \text{ ó } \mathcal{I}_{A[x/2,y/2]}P(x,y) = \mathrm{V}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{A[x/2,y/2]}P(x,y) &= H_{I(P)}(\mathcal{I}_{A[x/2,y/2]}(x), \mathcal{I}_{A[x/2,y/2]}(y)) \\ &= H_{I(P)}(A[x/2,y/2](x), A[x/2,y/2](y)) \\ &= H_{I(P)}(2,2) \\ &= \mathrm{V}\end{aligned}$$

**Luego, $\mathcal{I}_{A[x/2]}((\exists y)P(x,y)) = \mathrm{V}$.**

**Por tanto, $\mathcal{I}_A((\forall x)(\exists y)P(x,y)) = \mathrm{V}$**

# Semántica: Evaluación de fórmulas

- **Ejemplo anterior en notación reducida:**
  **Evaluación de $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ respecto de la asignación $A$ tales que $U = \{1,2\}$ e $I(P) = \{(1,1),(2,2)\}$**

$\mathcal{I}_A((\forall x)(\exists y)P(x,y)) = \text{V} \Leftrightarrow \mathcal{I}_{A[x/1]}((\exists y)P(x,y)) = \text{V}$ y $\mathcal{I}_{A[x/2]}((\exists y)P(x,y)) = \text{V}$

$\mathcal{I}_{A[x/1]}((\exists y)P(x,y)) = \text{V} \Leftrightarrow \mathcal{I}_{A[x/1,y/1]}P(x,y) = \text{V}$ ó $\mathcal{I}_{A[x/1,y/2]}P(x,y) = \text{V}$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[x/1,y/1]}P(x,y) &= P^I(1,1) \\ &= \text{V} \end{aligned}$$

Luego, $\mathcal{I}_{A[x/1]}((\exists y)P(x,y)) = \text{V}$.

$\mathcal{I}_{A[x/2]}((\exists y)P(x,y)) = \text{V} \Leftrightarrow \mathcal{I}_{A[x/2,y/1]}P(x,y) = \text{V}$ ó $\mathcal{I}_{A[x/2,y/2]}P(x,y) = \text{V}$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[x/2,y/2]}P(x,y) &= P^I(2,2) \\ &= \text{V} \end{aligned}$$

Luego, $\mathcal{I}_{A[x/2]}((\exists y)P(x,y)) = \text{V}$.

Por tanto, $\mathcal{I}_A((\forall x)(\exists y)P(x,y)) = \text{V}$

# Semántica: Evaluación de fórmulas

- **Ejemplo:** Evaluación de $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(g(x),a))$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ respecto de la asignación $A$ tales que $U = \{1,2\}$, $I(a) = 1$, $I(g) = \{(1,2),(2,1)\}$, $I(P) = \{2\}$ e $I(Q) = \{(1,2),(2,2)\}$.

$$\mathcal{I}_A((\forall x)(P(x) \rightarrow Q(g(x),a))) = \mathrm{V} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \mathcal{I}_{A[x/1]}(P(x) \rightarrow Q(g(x),a)) = \mathrm{V} \text{ y} \\ \mathcal{I}_{A[x/2]}(P(x) \rightarrow Q(g(x),a)) = \mathrm{V} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I}_{A[x/1]}(P(x) \rightarrow Q(g(x),a)) = \\
&= H_{\rightarrow}(\mathcal{I}_{A[x/1]}(P(x)), \mathcal{I}_{A[x/1]}(Q(g(x),a))) = \\
&= H_{\rightarrow}(H_{I(P)}(\mathcal{I}_{A[x/1]}(x)), H_{I(Q)}(\mathcal{I}_{A[x/1]}(g(x)), \mathcal{I}_{A[x/1]}(a))) = \\
&= H_{\rightarrow}(H_{I(P)}(A[x/1](x)), H_{I(Q)}(I(g)(\mathcal{I}_{A[x/1]}(x)), I(a))) = \\
&= H_{\rightarrow}(H_{I(P)}(1), H_{I(Q)}(I(g)(A[x/1](x)), 1)) = \\
&= H_{\rightarrow}(\mathrm{F}, H_{I(Q)}(I(g)(1), 1)) = \\
&= H_{\rightarrow}(\mathrm{F}, H_{I(Q)}(2, 1)) = \\
&= H_{\rightarrow}(\mathrm{F}, \mathrm{F}) = \\
&= \mathrm{V}
\end{aligned}$$

# Semántica: Evaluación de fórmulas

- **Ejemplo (cont.)**

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{I}_{A[x/2]}(P(x) \rightarrow Q(g(x), a)) = \\
&= H_{\rightarrow}(\mathcal{I}_{A[x/2]}(P(x)), \mathcal{I}_{A[x/2]}(Q(g(x), a))) = \\
&= H_{\rightarrow}(H_{I(P)}(\mathcal{I}_{A[x/2]}(x)), H_{I(Q)}(\mathcal{I}_{A[x/2]}(g(x)), \mathcal{I}_{A[x/2]}(a))) = \\
&= H_{\rightarrow}(H_{I(P)}(A[x/2](x)), H_{I(Q)}(I(g)(\mathcal{I}_{A[x/2]}(x)), I(a))) = \\
&= H_{\rightarrow}(H_{I(P)}(2), H_{I(Q)}(I(g)(A[x/2](x)), 1)) = \\
&= H_{\rightarrow}(\mathrm{V}, H_{I(Q)}(I(g)(2), 1)) = \\
&= H_{\rightarrow}(\mathrm{V}, H_{I(Q)}(1, 1)) = \\
&= H_{\rightarrow}(\mathrm{V}, \mathrm{V}) = \\
&= \mathrm{V}
\end{aligned}
$$

**Por tanto,** $\mathcal{I}_A((\forall x)(P(x) \rightarrow Q(g(x), a))) = \mathrm{V}$.

# Semántica: Evaluación de fórmulas

- **Ejemplo anterior con notación reducida:**
  **Evaluación de $(\forall x)(P(x) \to Q(g(x), a))$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ respecto de la asignación $A$ tales que $U = \{1, 2\}$, $I(a) = 1$, $I(g) = \{(1, 2), (2, 1)\}$, $I(P) = \{2\}$ e $I(Q) = \{(1, 2), (2, 2)\}$.**

$$\mathcal{I}_A((\forall x)(P(x) \to Q(g(x), a))) = \mathrm{V} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \mathcal{I}_{A[x/1]}(P(x) \to Q(g(x), a)) = \mathrm{V} \text{ y} \\ \mathcal{I}_{A[x/2]}(P(x) \to Q(g(x), a)) = \mathrm{V} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[x/1]}(P(x) \to Q(g(x), a)) &= P^I(1) \to Q^I(g^I(1), a^I) \\ &= \mathrm{F} \to Q^I(2, 1) \\ &= \mathrm{F} \to \mathrm{F} \\ &= \mathrm{V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[x/2]}(P(x) \to Q(g(x), a)) &= P^I(2) \to Q^I(g^I(2), a^I) \\ &= \mathrm{V} \to Q^I(1, 1) \\ &= \mathrm{V} \to \mathrm{V} \\ &= \mathrm{V} \end{aligned}$$

**Por tanto, $\mathcal{I}_A((\forall x)(P(x) \to Q(g(x), a))) = \mathrm{V}$.**

# Semántica: Evaluación de fórmulas

- Ejemplo: Evaluación de $(\exists x)(P(g(x)) \wedge Q(x, g(a)))$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ respecto de la asignación $A$ tales que $U = \{1, 2\}$, $I(a) = 1$, $I(g) = \{(1, 2), (2, 1)\}$, $I(P) = \{2\}$ e $I(Q) = \{(1, 2), (2, 2)\}$.

  $$\mathcal{I}_A((\exists x)(P(g(x)) \wedge Q(x, g(a)))) = \mathrm{V} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \mathcal{I}_{A[x/1]}(P(g(x)) \wedge Q(x, g(a))) = \mathrm{V} \text{ ó} \\ \mathcal{I}_{A[x/2]}(P(g(x)) \wedge Q(x, g(a))) = \mathrm{V} \end{array}$$

  $$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[x/1]}(P(g(x)) \wedge Q(x, g(a))) &= P^I(g^I(1)) \wedge Q^I(1, g^I(a^I)) \\ &= P^I(2) \wedge Q^I(1, g^I(1)) \\ &= \mathrm{V} \wedge Q^I(1, 2) \\ &= \mathrm{V} \wedge \mathrm{V} \\ &= \mathrm{V} \end{aligned}$$

  Por tanto, $\mathcal{I}_A((\exists x)(P(g(x)) \wedge Q(x, g(a)))) = \mathrm{V}$.

# Semántica: Evaluación de fórmulas

- **Ejemplo: Evaluación de $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x,a))$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ respecto de la asignación $A$ tales que $U = \{1, 2\}$, $I(a) = 1$, $I(g) = \{(1, 2), (2, 1)\}$, $I(P) = \{2\}$ e $I(Q) = \{(1, 2), (2, 2)\}$.**

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_A((\exists x)(P(x) \wedge Q(x,a))) = \mathrm{V} \Leftrightarrow\ & \mathcal{I}_{A[x/1]}(P(x) \wedge Q(x,a)) = \mathrm{V} \text{ ó} \\ & \mathcal{I}_{A[x/2]}(P(x) \wedge Q(x,a)) = \mathrm{V}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{A[x/1]}(P(x) \wedge Q(x,a)) &= P^I(1) \wedge Q^I(1, a^I) \\ &= \mathrm{F} \wedge Q^I(1,1) \\ &= \mathrm{F} \wedge \mathrm{V} \\ &= \mathrm{F}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{A[x/2]}(P(x) \wedge Q(x,a)) &= P^I(2) \wedge Q^I(2, a^I) \\ &= \mathrm{V} \wedge Q^I(2,1) \\ &= \mathrm{V} \wedge \mathrm{F} \\ &= \mathrm{F}\end{aligned}$$

**Por tanto, $\mathcal{I}_A((\exists x)(P(x) \wedge Q(x,a))) = \mathrm{F}$.**

# Semántica: Evaluación de fórmulas

- Ejemplo: Evaluación de $(\forall x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(x,y))$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ respecto de la asignación $A$ tales que $U = \{1,2\}$, $I(a) = 1$, $I(g) = \{(1,2),(2,1)\}$, $I(P) = \{2\}$ e $I(Q) = \{(1,2),(2,2)\}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_A((\forall x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(x,y))) = \mathrm{V} \Leftrightarrow\ & \mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y)(P(x) \wedge Q(x,y)) = \mathrm{V} \text{ y} \\ & \mathcal{I}_{A[x/2]}(\exists y)(P(x) \wedge Q(x,y)) = \mathrm{V}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y)(P(x) \wedge Q(x,y)) = \mathrm{V} \Leftrightarrow\ & \mathcal{I}_{A[x/1,y/1]}(P(x) \wedge Q(x,y)) = \mathrm{V} \text{ ó} \\ & \mathcal{I}_{A[x/1,y/2]}(P(x) \wedge Q(x,y)) = \mathrm{V}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{A[x/1,y/1]}(P(x) \wedge Q(x,y)) &= P^I(1) \wedge Q^I(1,1) \\ &= \mathrm{F} \wedge \mathrm{V} \\ &= \mathrm{F}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{A[x/1,y/2]}(P(x) \wedge Q(x,y)) &= P^I(1) \wedge Q^I(1,2) \\ &= \mathrm{F} \wedge \mathrm{V} \\ &= \mathrm{F}\end{aligned}$$

Luego, $\mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y)(P(x) \wedge Q(x,y)) = \mathrm{F}$

Por tanto, $\mathcal{I}_A((\forall x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(x,y))) = \mathrm{V}$.

# Semántica: Evaluación de fórmulas

- Ejemplo: Evaluación de $(\forall x) g(x) = x$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ respecto de la asignación $A$ tales que $U = \{1, 2\}$, $I(a) = 1$, $I(g) = \{(1, 2), (2, 1)\}$, $I(P) = \{2\}$ e $I(Q) = \{(1, 2), (2, 2)\}$.

  $\mathcal{I}_A((\forall x) g(x) = x) = \text{V} \Leftrightarrow \mathcal{I}_{A[x/1]} g(x) = x = \text{V}$ y $\mathcal{I}_{A[x/2]} g(x) = x = \text{V}$

  $$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[x/1]}(g(x) = x) &= (g^I(1) = 1) \\ &= (2 = 1) \\ &= \text{F} \end{aligned}$$

  Por tanto, $\mathcal{I}_A((\forall x) g(x) = x) = \text{F}$.

# Semántica: Evaluación de fórmulas

- **Ejemplo:** Evaluación de $(\forall x) g(g(x)) = x$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ respecto de la asignación $A$ tales que $U = \{1, 2\}$, $I(a) = 1$, $I(g) = \{(1,2),(2,1)\}$, $I(P) = \{2\}$ e $I(Q) = \{(1,2),(2,2)\}$.

  $\mathcal{I}_A((\forall x) g(g(x)) = x) = \text{V} \Leftrightarrow \mathcal{I}_{A[x/1]} g(g(x)) = x = \text{V}$ y $\mathcal{I}_{A[x/2]} g(g(x)) = x = \text{V}$

  $$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[x/1]}(g(g(x)) = x) &= (g^I(g^I(1)) = 1) \\ &= (g^I(2) = 1) \\ &= (1 = 1) \\ &= \text{V} \end{aligned}$$

  $$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[x/2]}(g(g(x)) = x) &= (g^I(g^I(2)) = 2) \\ &= (g^I(1) = 2) \\ &= (2 = 2) \\ &= \text{V} \end{aligned}$$

  Por tanto, $\mathcal{I}_A((\forall x) g(g(x)) = x) = \text{V}$.

## Semántica: Evaluación de fórmulas

- Ejemplo de dependencia del universo: Sea $G$ la fórmula $(\forall x)(\exists y)R(y,x)$, entonces
  - $\mathcal{I}_A(G) =$ V, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{Z}, I), I(R) = <$ y $A$ una asignación en $\mathcal{I}$.
  - $\mathcal{I}_A(G) =$ F, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I), I(R) = <$ y $A$ una asignación en $\mathcal{I}$.
- Ejemplo de dependencia de la estructura: Sea $G$ la fórmula $(\exists x)(\forall y)R(x,y)$, entonces
  - $\mathcal{I}_A(G) =$ V, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I), I(R) = \leq$ y $A$ una asignación en $\mathcal{I}$.
  - $\mathcal{I}_A(G) =$ F, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I), I(R) = \geq$ y $A$ una asignación en $\mathcal{I}$.
- Ejemplo de dependencia de la asignación: Sea $G$ la fórmula $(\forall y)R(x,y)$, entonces
  - $\mathcal{I}_A(G) =$ V, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I), I(R) = \leq$ y $A$ una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = 0$.
  - $\mathcal{I}_A(G) =$ F, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I), I(R) = \leq$ y $A$ una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = 5$.

# Semántica: Evaluación de fórmulas

- **Evaluación de fórmulas en las estructuras de las páginas ??–??:**

| Fórmula | $\mathcal{I}_1$ | $\mathcal{I}_1$ | $\mathcal{I}_3$ |
|---|---|---|---|
| $(\forall x)0 \leq x$ | V | V | V |
| $(\forall x)x \leq s(x)$ | V | V | F |
| $(\exists x)s(x) = 0$ | F | F | V |
| $(\exists x)s(x) = x$ | F | F | F |

# Semántica: Evaluación variables libres

- **Evaluación y variables libres:**
  - Sea $t$ un término de $L$, $F$ una fórmula de $L$ e $\mathcal{I}$ una estructura de $L$.
    - Si $A$ y $B$ son dos asignaciones en $\mathcal{I}$ que coinciden sobre las variables de $t$, entonces $\mathcal{I}_A(t) = \mathcal{I}_B(t)$.
    - Si $A$ y $B$ son dos asignaciones en $\mathcal{I}$ que coinciden sobre las variables libres de $F$, entonces $\mathcal{I}_A(F) = \mathcal{I}_B(F)$.
    - Si $t$ no tiene variables, entonces $\mathcal{I}_A(F) = \mathcal{I}_B(F)$ para cualesquiera asignaciones $A$ y $B$ en $\mathcal{I}$. Se suele escribir simplemente $\mathcal{I}(t)$.
    - Si $F$ es cerrada, entonces $\mathcal{I}_A(F) = \mathcal{I}_B(F)$ para cualesquiera asignaciones $A$ y $B$ en $\mathcal{I}$. Se suele escribir simplemente $\mathcal{I}(F)$.
    - Si las variables libres de $F$ son $x_1, \dots, x_n$, entonces son equivalentes
      - $\mathcal{I}_A(F) = 1$, para toda asignación $A$ en $\mathcal{I}$.
      - $\mathcal{I}((\forall x_1) \dots (\forall x_n) F) = 1$.

# Semántica: Realización de una fórmula

- **Realización de una fórmula:**
  - **Def.: Sean $F$ una fórmula de $L$, $\mathcal{I}$ una estructura de $L$ y $A$ una asignación en $\mathcal{I}$.**
    - **$(\mathcal{I}, A)$ es una realización de $F$ si $\mathcal{I}_A(F) = 1$.**
      **Se representa por $\mathcal{I}_A \models F$.**
    - **$(\mathcal{I}, A)$ no es una realización de $F$ si $\mathcal{I}_A(F) = 0$.**
      **Se representa por $\mathcal{I}_A \not\models F$.**
    - **$F$ se verifica en $\mathcal{I}$ respecto de $A$ si $\mathcal{I}_A \models F$.**
    - **$F$ no se verifica en $\mathcal{I}$ respecto de $A$ si $\mathcal{I}_A \not\models F$.**
  - **Ejemplos: Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ una estructura tal que $I(R) = \leq$.**
    - **Si $A$ es una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = 0$. entonces**

      $$\mathcal{I}_A \models (\forall y)R(x, y),$$

    - **Si $A$ es una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = 5$, entonces**

      $$\mathcal{I}_A \not\models (\forall y)R(x, y),$$

# Semántica: Satisfacibilidad en una estructura

- **Satisfacibilidad en una estructura**
  - Def.: Sean $F$ una fórmula de $L$ e $\mathcal{I}$ una estructura de $L$.
    - $F$ es satisfacible en $\mathcal{I}$ si existe alguna asignación $A$ en $I$ tal que $\mathcal{I}_A \models F$.
    - $F$ es insatisfacible en $\mathcal{I}$ si no existe ninguna asignación $A$ en $I$ tal que $\mathcal{I}_A \models F$.
  - Ejemplos: Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ una estructura tal que $I(R) = \leq$.
    - $(\forall y)R(x, y)$ es satisfacible en $\mathcal{I}$.
      $\mathcal{I}_A \models (\forall y)R(x, y)$, con $A(x) = 0$.
    - $(\forall x)R(x, y)$ es insatisfacible en $\mathcal{I}$.
      No existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$, se tenga $m \leq n$.
  - Ejemplos: Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ una estructura tal que $I(R) = \geq$.
    - $(\forall y)R(x, y)$ es insatisfacible en $\mathcal{I}$.
      No existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tenga $m \geq n$.
    - $(\forall x)R(x, y)$ es satisfacible en $\mathcal{I}$.
      $\mathcal{I}_A \models (\forall y)R(x, y)$, con $A(x) = 0$.

# Semántica: Validez en una estructura

- **Validez en una estructura**
  - Def.: Sean $F$ una fórmula de $L$ e $\mathcal{I}$ una estructura de $L$.
    - $F$ es válida en $\mathcal{I}$ si, para toda asignación $A$ en $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}_A \models F$.
      Se representa por $\mathcal{I} \models F$.
    - $F$ no es válida en $\mathcal{I}$ si, para alguna asignación $A$ en $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}_A \not\models F$.
      Se representa por $\mathcal{I} \not\models F$.
  - Ejemplos: Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ una estructura tal que $I(R) = <$.
    - $\mathcal{I} \models (\exists y)R(x,y)$.

      Si $A$ es una asignación en $\mathcal{I}$, entonces $\mathcal{I}_A \models (\exists y)R(x,y)$

      $I_{A[y/A(x)+1]}(R(x,y)) = \mathrm{V}$
    - $\mathcal{I} \not\models (\forall y)R(x,y)$.

      Sea $A$ una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = 5$. Entonces $\mathcal{I}_A \not\models (\forall y)R(x,y)$

      $I_{A[y/3]}(R(x,y)) = \mathrm{F}$

# Semántica: Satisfacibilidad y validez en una estructura

- **Satisfacibilidad y validez en una estructura para sentencias**
  - Sea $F$ una sentencia de $L$ e $\mathcal{I}$ una estructura de $L$.
    - $F$ es válida en $\mathcal{I}$ syss $F$ es satisfacible en $\mathcal{I}$.
    - Se cumple una, y sólo una, de las siguientes condiciones
      1. $F$ es válida en $\mathcal{I}$.
      2. $\neg F$ es válida en $\mathcal{I}$.

- **Cierres cuantificacionales:**
  - Sea $F$ una fórmula de $L$, $\mathcal{I}$ una estructura de $L$ y $\{x_1, \dots, x_n\}$ el conjunto de las variables libres de $F$.
    - $F$ es válida en $\mathcal{I}$ syss $(\forall x_1) \dots (\forall x_n) F$ es válida en $\mathcal{I}$
    - $F$ es satisfacible en $\mathcal{I}$ syss $(\exists x_1) \dots (\exists x_n) F$ es satisfacible en $\mathcal{I}$

# Semántica: Modelo de una fórmula

- **Modelo de una fórmula:**
  - Def.: Sean $F$ una fórmula de $L$ e $\mathcal{I}$ una estructura de $L$.
    - $\mathcal{I}$ es un modelo de $F$ si $\mathcal{I} \models F$.
    - $\mathcal{I}$ no es un modelo de $F$ si $\mathcal{I} \not\models F$.
  - Ejemplos: Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ una estructura tal que $I(R) = <$. Entonces
    $\mathcal{I} \models (\exists y)R(x, y)$. $\qquad \mathcal{I} \not\models (\forall y)R(x, y)$.
  - Ejemplos: Sea $F$ la fórmula $(\forall x)f(x, e) = x$. Las siguientes estructuras son modelos de $F$.
    - $(U, I)$ con $U = \mathbb{N}$, $I(e) = 0$ e $I(f)$ como la suma.
    - $(U, I)$ con $U = \{0, 1\}^*$, $I(e) = \epsilon$ e $I(f)$ la concatenación.
    - $(U, I)$ con $U = \mathbb{B}$, $I(e) = 1$ e $I(f) = H_\wedge$

    Las siguientes estructuras no son modelo de $F$

    - $(U, I)$ con $U = \mathbb{N}$, $I(e) = 5$ e $I(f)$ como la suma.
    - $(U, I)$ con $U = \mathbb{N}$, $I(e) = 0$ e $I(f)$ como el producto.

# Semántica: Satisfacibilidad de una fórmula

- **Satisfacibilidad de una fórmula:**
  - Def.: Sea $F$ una fórmula de $L$.
    - $F$ es satisfacible si tiene alguna realización (i.e. existe una estructura $\mathcal{I}$ y una asignación $A$ en $\mathcal{I}$ tales que $\mathcal{I}_A(F) = 1$).
    - $F$ es insatisfacible si no tiene ninguna realización (i.e. para toda estructura $\mathcal{I}$ y toda asignación $A$ se tiene que $\mathcal{I}_A(F) = 0$).
  - Ejemplos:
    - $(\forall y)R(x,y)$ es satisfacible

      $\mathcal{I}_A((\forall y)R(x,y)) = 1$, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$, $I(R) = \leq$ y $A(x) = 0$.
    - $(\exists x)P(x) \wedge (\forall x)\neg P(x)$ es insatisfacible.

# Semántica: Satisfacibilidad y modelo

- **Propiedades:**
  - **Sea $F$ una fórmula cerrada. Son equivalentes:**
    - **$F$ es satisfacible.**
    - **$F$ tiene modelo.**
  - **Si $F$ es insatisfacible, entonces no tiene ningún modelo.**
  - **Existen fórmulas satisfacibles que tienen realizaciones, pero no tienen modelos.**

    **Por ejemplo, sea $F$ la fórmula $x \neq y$.**

    **La fórmula $F$ es satisfacible**

    $\mathcal{I}_A(F) = 1$, **siendo** $\mathcal{I} = (\{p, q\}, I)$, $A(x) = p$, $A(y) = q$

    **La fórmula $F$ no tiene modelo**

    **Sea $\mathcal{I}$ una estructura. Existe una asignación $A$ en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = A(y)$. Luego, $\mathcal{I}_A(F) = 0$ y $\mathcal{I} \not\models F$.**

# Semántica: Validez de una fórmula

- **Validez de una fórmula:**
  - Def.: Sea $F$ una fórmula de $L$.
    - $F$ es válida si toda estructura de $L$ es modelo de $F$ (i.e. para toda estructura $\mathcal{I}$ y toda asignación $A$ se tiene que $\mathcal{I}_A(F) = 1$). Se representa por $\models F$.
    - $F$ no es válida si alguna estructura de $L$ no es modelo de $F$ (i.e. existe alguna estructura $\mathcal{I}$ y alguna asignación $A$ tales que $\mathcal{I}_A(F) = 0$). Se representa por $\not\models F$.
  - Ejemplos:
    - $(\exists x)P(x) \vee (\forall x)\neg P(x)$ es válida.
    - $(\forall y)R(x,y)$ no es válida.

      $\mathcal{I}_A((\forall y)R(x,y)) = 0$, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$, $I(R) = \leq$ y $A(x) = 5$.
    - $(\exists x)(P(x) \rightarrow (\forall y)P(y))$ es válida.

# Semántica: Satisfacibilidad y validez

- **Relaciones entre satisfacibilidad y validez:**
  - Prop.: $F$ es válida syss $\neg F$ es insatisfacible.

    $F$ es válida
    $\iff$ para toda estructura $\mathcal{I}$ y toda asignación $A$ se tiene que $\mathcal{I}_A(F) = 1$
    $\iff$ para toda estructura $\mathcal{I}$ y toda asignación $A$ se tiene que $\mathcal{I}_A(\neg F) = 0$
    $\iff$ $\neg F$ es insatisfacible.

  - Si $F$ es válida, entonces $F$ es satisfacible.

    $F$ es válida
    $\Longrightarrow$ para toda estructura $\mathcal{I}$ y toda asignación $A$ se tiene que $\mathcal{I}_A(F) = 1$
    $\Longrightarrow$ existe una estructura $\mathcal{I}$ y una asignación $A$ tales que $\mathcal{I}_A(F) = 1$
    $\Longrightarrow$ $F$ es satisfacible.

  - $F$ es satisfacible $\not\Longrightarrow$ $\neg F$ es insatisfacible.

    $(\forall x)P(x)$ es satisfacible.
    modelo $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{1, 2\}$ e $I(P) = \{a\}$

    $\neg(\forall x)P(x)$ es satisfacible.
    modelo $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{1, 2\}$ e $I(P) = \{a\}$

# Semántica: Realización de un conjunto de fórmulas

- **Notación:**
  - $S, S_1, S_2, \dots$ representarán conjuntos de fórmulas.
- **Realización de un conjunto de fórmulas:**
  - Def.: Sean $S$ un conjunto de fórmulas de $L$, $\mathcal{I}$ una estructura de $L$ y $A$ una asignación en $\mathcal{I}$.
    - $(\mathcal{I}, A)$ es una realización de $S$ si para toda $F \in S$ se tiene que $\mathcal{I}_A(F) = 1$.
      Se representa por $\mathcal{I}_A \models S$.
    - $(\mathcal{I}, A)$ no es una realización de $S$ si para alguna $F \in S$ se tiene que $\mathcal{I}_A(F) = 0$.
      Se representa por $\mathcal{I}_A \not\models S$.
  - Ejemplos: Sea $S = \{(\forall y)R(x, y),\ (\forall y)f(x, y) = y\}$.
    - $(\mathcal{I}, A)$ con $\mathcal{I} = (U, I), U = \mathbb{N}, R^I = \leq, f^I = +, A(x) = 0$ es realización de $S$.
    - $(\mathcal{I}, A)$ con $\mathcal{I} = (U, I), U = \mathbb{N}, R^I = <, f^I = +, A(x) = 0$ no es realización de $S$.
    - $(\mathcal{I}, A)$ con $\mathcal{I} = (U, I), U = \mathbb{N}, R^I = \leq, f^I = *, A(x) = 0$ no es realización de $S$.

# Semántica: Consistencia de un conjunto de fórmulas

- **Consistencia de un conjunto de fórmulas:**
  - **Def.: Sea $S$ un conjunto de fórmulas de $L$.**
    - $S$ es consistente si $S$ tiene alguna realización (i.e. existe alguna estructura $\mathcal{I}$ de $L$ y alguna asignación $A$ en $\mathcal{I}$ tales que, para toda $F \in S$, $I_A(F) = 1$).
    - $S$ es inconsistente si $S$ no tiene ninguna realización (i.e. para toda estructura $\mathcal{I}$ de $L$ y toda asignación $A$ en $\mathcal{I}$, existe alguna $F \in S$, tal que $I_A(F) = 0$).
  - **Ejemplos:**
    - $S = \{(\forall y)R(x,y),\ (\forall y)f(x,y) = y\}$ es consistente .

      $(\mathcal{I}, A)$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I), R^I = \leq, f^I = +, A(x) = 0$ es realización de $S$.
    - $S = \{P(x) \rightarrow Q(x),\ (\exists y)P(y),\ \neg Q(x)\}$ es inconsistente.

# Semántica: Modelo de un conjunto de fórmulas

- **Modelo de un conjunto de fórmulas:**
  - Def.: Sean $S$ un conjunto de fórmulas de $L$ e $\mathcal{I}$ una estructura de $L$.
    - $\mathcal{I}$ es un modelo de $S$ si para toda $F \in S$ se tiene que $\mathcal{I} \models F$
      (i.e. para toda $F \in S$ y toda asignación $A$ en $\mathcal{I}$ se tiene $\mathcal{I}_A(F) = 1$).
      Se representa por $\mathcal{I} \models S$.
    - $\mathcal{I}$ no es un modelo de $S$ si para alguna $F \in S$ se tiene que $\mathcal{I} \not\models F$
      (i.e. para alguna $F \in S$ y alguna asignación $A$ en $\mathcal{I}$ se tiene $\mathcal{I}_A(F) = 0$).
      Se representa por $\mathcal{I} \not\models S$.
  - Ejemplos: Sea $S = \{R(e,y),\ f(e,y) = y\}$.
    - $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ con $R^I = \leq, f^I = +, e^I = 0$ es modelo de $S$.
    - $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ con $R^I = <, f^I = +, e^I = 0$ no es modelo de $S$.
    - $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ con $R^I = \leq, f^I = *, e^I = 0$ no es modelo de $S$.
    - $\mathcal{I} = (\{0,1\}^*, I)$ con $R^I =$ prefijo, $f^I =$ concatenación y $e^I = \epsilon$ es modelo de $S$.

# Semántica: Consistencia y modelo

- **Propiedades:**
  - Sea $S$ un conjunto de fórmulas cerradas. Son equivalentes:
    - $S$ es consistente.
    - $S$ tiene modelo.
  - Si $S$ es inconsistente, entonces no tiene ningún modelo.
  - Existen conjuntos de fórmulas consistentes que tienen realizaciones, pero no tienen modelos.

    Por ejemplo, sea $S = \{x \neq y\}$.

    El conjunto $S$ es consistente

    $\mathcal{I}_A \models S$, siendo $\mathcal{I} = (\{p, q\}, I), A(x) = p, A(y) = q$

    El conjunto $S$ no tiene modelo

    Sea $\mathcal{I}$ una estructura. Existe una asignación $A$ en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = A(y)$. Luego, $\mathcal{I}_A(x \neq y) = 0$ y $\mathcal{I} \not\models F$.

# Semántica: Consecuencia lógica

- **Consecuencia lógica:**
  - **Def.: Sean $F$ una fórmula de $L$ y $S$ un conjunto de fórmulas de $L$.**
    - **$F$ es consecuencia lógica de $S$ si todas las realizaciones de $S$ lo son de $F$.**
      **(i.e. para toda estructura $\mathcal{I}$ de $L$ y toda asignación $A$ en $\mathcal{I}$,**
      **si $\mathcal{I}_A \models S$ entonces $\mathcal{I}_A \models F$).**
      **(i.e. para toda estructura $\mathcal{I}$ de $L$ y toda asignación $A$ en $\mathcal{I}$,**
      **si, para todo $G \in S$, $\mathcal{I}_A(G) = 1$ entonces $\mathcal{I}_A(F) = 1$).**
      **Se representa por $S \models F$.**
    - **$F$ no es consecuencia lógica de $S$ si alguna realización de $S$ no lo es de $F$.**
      **(i.e. para alguna estructura $\mathcal{I}$ de $L$ y alguna asignación $A$ en $\mathcal{I}$ se tiene que**
      **$\mathcal{I}_A \models S$ y $\mathcal{I}_A \not\models F$).**
      **(i.e. para alguna estructura $\mathcal{I}$ de $L$ y alguna asignación $A$ en $\mathcal{I}$ se tiene que,**
      **para todo $G \in S$, $\mathcal{I}_A(G) = 1$ y $\mathcal{I}_A(F) = 0$).**
      **Se representa por $S \not\models F$.**
    - **Se escribe $G \models F$ en lugar de $\{G\} \models F$.**
    - **Se escribe $G \not\models F$ en lugar de $\{G\} \not\models F$.**

# Semántica: Consecuencia lógica

- **Ejemplos:**
  - $(\forall x)P(x) \models P(y)$
  - $P(y) \not\models (\forall x)P(x)$

    $(\mathcal{I}, A)$ con $\mathcal{I} = (U, I), U = \{1, 2\}, P^I = \{1\}, A(y) = 1.$
  - $(\forall x)P(x) \models (\exists y)P(y)$
  - $(\exists x)P(x) \not\models (\forall y)P(y)$

    $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{1, 2\}, P^I = \{1\}$

    $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \mathbb{N}$ y $P^I = \{n \in \mathbb{N} : n$ es par
  - $(\exists x)(\forall y)Q(x, y) \models (\forall y)(\exists x)Q(x, y)$
  - $(\forall y)(\exists x)Q(x, y) \not\models (\exists x)(\forall y)Q(x, y)$

    $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{1, 2\}, Q^I = \{(1, 1), (2, 2)\}$

    $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \mathbb{N}, Q^I = <$

# Semántica: Consecuencia lógica

- **Ejemplos:**
  - $\{P(x) \to Q(x),\ P(c)\} \models Q(c)$
  - $\{P(x) \to Q(x),\ Q(c)\} \not\models P(c)$
  - $\{P(x) \to Q(x),\ \neg Q(c)\} \models \neg P(c)$
  - $\{P(c),\ \neg P(d)\} \models c \neq d$

- **Ejemplos: Se consideran las fórmulas**

  $F_1 : (\forall x) R(x,x)$,

  $F_2 : (\forall x)(\forall y)(R(x,y) \to R(y,x))$.

  $F_3 : (\forall x)(\forall y)(R(x,y) \wedge R(y,x) \to x = y)$,

  - $\{F_2, F_3\} \not\models F_1$

    Contraejemplo: $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{a,b\}$ y $R^I = \{(a,a)\}$
  - $\{F_1, F_2\} \not\models F_3$

    Contraejemplo: $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{a,b\}$ y $R^I = U^2$
  - $\{F_1, F_3\} \models F_2$

# Semántica: Consecuencia lógica

- **Propiedades:**
  - $S \models F$ syss $S \cup \{\neg F\}$ es inconsistente.

    $S \models F$
    $\iff$ para toda estructura $\mathcal{I}$ de $L$ y toda asignación $A$ en $\mathcal{I}$,
    si, para todo $G \in S$, $\mathcal{I}_A(G) = 1$ entonces $\mathcal{I}_A(F) = 1$.
    $\iff$ para toda estructura $\mathcal{I}$ de $L$ y toda asignación $A$ en $\mathcal{I}$,
    si, para todo $G \in S$, $\mathcal{I}_A(G) = 1$ entonces $\mathcal{I}_A(\neg F) = 0$.
    $\iff$ para toda estructura $\mathcal{I}$ de $L$ y toda asignación $A$ en $\mathcal{I}$,
    existe alguna $H \in S \cup \{\neg F\}$ tal que $\mathcal{I}_A(\neg H) = 0$.
    $\iff$ $S \cup \{\neg F\}$ es inconsistente.
  - Sean $F$ una fórmula cerrada de $L$ y $S$ un conjunto de fórmulas cerradas de $L$. Entonces, $F$ es consecuencia lógica de $S$ syss todos los modelos de $S$ lo son de $F$.

# Semántica: Equivalencia lógica

- **Equivalencia lógica**
  - Def.: Sean $F$ y $G$ fórmulas de $L$. $F$ y $G$ son equivalentes si para toda estructura $\mathcal{I}$ de $L$ y toda asignación $A$ en $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}_A(F) = \mathcal{I}_A(G)$.
    Se representa por $F \equiv G$.
  - Ejemplos:
    - $P(x) \not\equiv P(y)$.

      $\mathcal{I} = (\{1,2\}, I)$ con $P^I = \{1\}$ y $A(x) = 1, A(y) = 2$.
    - $(\forall x)P(x) \equiv (\forall y)P(y)$.
    - $(\forall x)(P(x) \land Q(x)) \equiv (\forall x)P(x) \land (\forall x)Q(x)$.
    - $(\exists x)(P(x) \land Q(x)) \not\equiv (\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x)$.

      $\mathcal{I} = (\{1,2\}, I)$ con $P^I = \{1\}$ y $Q^I = \{2\}$.
  - Propiedades: Sean $F$ y $G$ fórmulas cerradas de $L$.
    - $F \equiv G$ syss $\models F \leftrightarrow G$.
    - $F \equiv G$ syss $F \models G$ y $G \models F$.

# Bibliografía


- C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal.* (Ariel, 2000) pp. 195–259 y 323–326.
- M.L. Bonet *Apuntes de LPO.* (Univ. Politécnica de Cataluña, 2003) pp. 17–26.
- C.–L. Chang y R.C.–T. Lee *Symbolic logic and mechanical theorem proving* (Academic Press, 1973) pp. 26–35.
- J. Dingel *Propositional and predicate logic: a review.* (2000) pp. 21-27.
- J.L. Fernández, A. Manjarrés y F.J. Díez *Lógica computacional.* (UNED, 2003) pp. 64–87.
- J.H. Gallier *Logic for computer science (foundations of automatic theorem Proving)* (June 2003) pp. 146–186.
- M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems.* (Cambridge University Press, 2000) pp. 90–109 y 128–140.
- M. Ojeda e I. Pérez de Guzmán *Lógica para la computación (Vol. 2: Lógica de primer orden)* (Ágora, 1997) pp. 1–37 y 49–51.
- L. Paulson *Logic and proof* (U. Cambridge, 2002) pp. 22–29.