Tema 7: Cálculo deductivo de primer orden

José A. Alonso Jiménez
Andrés Cordón Franco

Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial

Universidad de Sevilla

Reglas del cuantificador universal

- **Regla de eliminación del cuantificador universal**
  - **Regla de eliminación del cuantificador universal:**

    $$\frac{(\forall x)F}{F[x/t]}\ \forall e$$

    donde $[x/t]$ es libre para F.
  - **Nota: Analogía con $\wedge e_1$ y $\wedge e_2$.**
  - **Ejemplo 1: $P(c), (\forall x)(P(x) \rightarrow \neg Q(x)) \vdash \neg Q(c)$**

1 :	actual y , P(y) , ∀x.(P(x)⟶¬Q(x))	premises
2 :	P(y)⟶¬Q(y)	∀e 1.3,1.1
3 :	¬Q(y)	⟶e 2,1.2

  - **Nota: $(\forall x)(\exists y)(x < y) \nvdash (\exists y)(y < y)$.**

Reglas del cuantificador universal

- **Regla de introducción del cuantificador universal**
  - **Regla de introducción del cuantificador universal:**

$$\frac{\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{x_0} \\ \quad\quad\vdots \\ \quad \boldsymbol{F[x/x_0]} \end{array}}}{(\forall \boldsymbol{x})\boldsymbol{F}} \ \forall \boldsymbol{i}$$

donde $\boldsymbol{x_0}$ es una variable nueva, que no aparece fuera de la caja.

  - **Nota: Analogía con $\wedge$i.**
  - **Ejemplo 2: $(\forall x)(P(x) \to Q(x)), (\forall x)P(x) \vdash (\forall x)Q(x)$**

1 :	∀x.(P(x)⟶Q(x)) , ∀x.P(x)	premises
2 :	actual i	assumption
3 :	P(i)⟶Q(i)	∀e 1.1,2
4 :	P(i)	∀e 1.2,2
5 :	Q(i)	⟶e 3,4
6 :	∀x.Q(x)	∀i 2–5

Reglas del cuantificador existencial

- **Regla de introducción del cuantificador existencial**
  - **Regla de introducción del cuantificador existencial:**

    $$\frac{F[x/t]}{(\exists x)F}\ \exists i$$

    donde $[x/t]$ es libre para F.
  - **Nota: Analogía con $\vee i_1$ y $\vee i_2$.**
  - **Ejemplo 3: $(\forall x)P(x) \vdash (\exists x)P(x)$**

1 : actual j , ∀x.P(x)	premises
2 : P(j)	∀e 1.2,1.1
3 : ∃x.P(x)	∃i 2,1.1

Reglas del cuantificador existencial

- **Regla de eliminación del cuantificador existencial**
  - **Regla de eliminación del cuantificador existencial:**

$$\frac{(\exists x)F \qquad \boxed{\begin{array}{ll} x_0 & F[x/x_0] \\ & \vdots \\ & G \end{array}}}{G}\ \exists e$$

  donde x_0 es una variable nueva, que no aparece fuera de la caja.

  - **Nota: Analogía con $\vee$e.**
  - **Ejemplo 4: $(\forall x)(P(x) \to Q(x), (\exists x)P(x) \vdash (\exists x)Q(x)$**

1 :	∀x.(P(x)⟶Q(x)) , ∃x.P(x)	premises
2 :	actual i , P(i)	assumptions
3 :	P(i)⟶Q(i)	∀e 1.1,2.1
4 :	Q(i)	⟶e 3,2.2
5 :	∃x.Q(x)	∃i 4,2.1
6 :	∃x.Q(x)	∃e 1.2,2–5

Reglas del cuantificador existencial

- **Ejemplo 5:** $(\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x)), (\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \vdash (\exists x)(P(x) \wedge R(x))$

1 :	$\forall$x.(Q(x)$\longrightarrow$R(x)) , $\exists$x.(P(x)$\wedge$Q(x))	premises
2 :	actual i , P(i)$\wedge$Q(i)	assumptions
3 :	Q(i)$\longrightarrow$R(i)	$\forall$e 1.1,2.1
4 :	Q(i)	$\wedge$e 2.2
5 :	R(i)	$\longrightarrow$e 3,4
6 :	P(i)	$\wedge$e 2.2
7 :	P(i)$\wedge$R(i)	$\wedge$i 6,5
8 :	$\exists$x.(P(x)$\wedge$R(x))	$\exists$i 7,2.1
9 :	$\exists$x.(P(x)$\wedge$R(x))	$\exists$e 1.2,2$-$8

Reglas del cuantificador existencial

- **Ejemplo 6:** $(\exists x)P(x), (\forall x)(\forall y)(P(x) \to Q(y)) \vdash (\forall y)Q(y)$

1 :	∃x.P(x) , ∀x.∀y.(P(x)⟶Q(y))	premises
2 :	actual i	assumption
3 :	actual i1 , P(i1)	assumptions
4 :	∀y.(P(i1)⟶Q(y))	∀e 1.2,3.1
5 :	P(i1)⟶Q(i)	∀e 4,2
6 :	Q(i)	⟶e 5,3.2
7 :	Q(i)	∃e 1.1,3−6
8 :	∀y.Q(y)	∀i 2−7

Equivalencias

- **Equivalencias:**
  - **Sean F y G fórmulas.**

    [1(a)] $\neg(\forall x)F \equiv (\exists x)\neg F$

    [1(b)] $\neg(\exists x)F \equiv (\forall x)\neg F$

  - **Sean F y G fórmulas y x una varible no libre en G.**

    [2(a)] $(\forall x)F \wedge G \equiv (\forall x)(F \wedge G)$

    [2(b)] $(\forall x)F \vee G \equiv (\forall x)(F \vee G)$

    [2(c)] $(\exists x)F \wedge G \equiv (\exists x)(F \wedge G)$

    [2(d)] $(\exists x)F \vee G \equiv (\exists x)(F \vee G)$

Equivalencias

- **Sean F y G fórmulas.**

  [3(a)] $(\forall x)F \land (\forall x)G \equiv (\forall x)(F \land G)$

  [3(b)] $(\exists x)F \lor (\exists x)G \equiv (\exists x)(F \lor G)$

- **Sean F y G fórmulas.**

  [4(a)] $(\forall x)(\forall y)F \equiv (\forall y)(\forall x)F$

  [4(b)] $(\exists x)(\exists y)F \equiv (\exists y)(\exists x)F$

Equivalencias

- **Equivalencia 1(a):** $\neg(\forall x)F \vdash (\exists x)\neg F$

1 :	$\neg\forall x.P(x)$	premise
2 :	$\neg\exists x.\neg P(x)$	assumption
3 :	actual i	assumption
4 :	$\neg P(i)$	assumption
5 :	$\exists x.\neg P(x)$	$\exists$i 4,3
6 :	$\bot$	$\neg$e 5,2
7 :	$P(i)$	RAA 4−6
8 :	$\forall x.P(x)$	$\forall$i 3−7
9 :	$\bot$	$\neg$e 8,1
10 :	$\exists x.\neg P(x)$	RAA 2−9

Equivalencias

- **Equivalencia 1(a):** $(\exists x)\neg F \vdash \neg(\forall x)F$

1 :	$\exists x.\neg P(x)$	premise
2 :	$\neg\neg\forall x.P(x)$	assumption
3 :	$\forall x.P(x)$	$\neg\neg$e 2
4 :	actual i, $\neg P(i)$	assumptions
5 :	$P(i)$	$\forall$e 3,4.1
6 :	$\bot$	$\neg$e 5,4.2
7 :	$\bot$	$\exists$e 1,4–6
8 :	$\neg\forall x.P(x)$	RAA 2–7

Equivalencias

- **Equivalencia 1(a):** $\neg(\forall x)F \equiv (\exists x)\neg F$

1 :	$\boxed{\neg\forall x.P(x)}$	assumption
2 :	$\boxed{\exists x.\neg P(x)}$	Conjecture $\neg\forall x.P(x) \vdash \exists x.\neg P(x)$ 1
3 :	$\neg\forall x.P(x) \longrightarrow \exists x.\neg P(x)$	$\longrightarrow$i 1–2
4 :	$\boxed{\exists x.\neg P(x)}$	assumption
5 :	$\boxed{\neg\forall x.P(x)}$	Theorem $\exists x.\neg P(x) \vdash \neg\forall x.P(x)$ 4
6 :	$\exists x.\neg P(x) \longrightarrow \neg\forall x.P(x)$	$\longrightarrow$i 4–5
7 :	$\neg\forall x.P(x) \longleftrightarrow \exists x.\neg P(x)$	$\longleftrightarrow$i 3,6

Equivalencias

- **Equivalencia 3(a):** $(\forall x)(F \land G) \vdash (\forall x)F \land (\forall x)G$

1 :	∀x.(P(x)∧Q(x))	premise
2 :	actual i1	assumption
3 :	P(i1)∧Q(i1)	∀e 1,2
4 :	P(i1)	∧e1 3
5 :	∀x.P(x)	∀i 2−4
6 :	actual i	assumption
7 :	P(i)∧Q(i)	∀e 1,6
8 :	Q(i)	∧e2 7
9 :	∀x.Q(x)	∀i 6−8
10 :	∀x.P(x)∧∀x.Q(x)	∧i 5,9

Equivalencias

- **Equivalencia 3(a):** $(\forall \boldsymbol{x})\boldsymbol{F} \wedge (\forall \boldsymbol{x})\boldsymbol{G} \vdash (\forall \boldsymbol{x})(\boldsymbol{F} \wedge \boldsymbol{G})$

1 :	∀x.P(x)∧∀x.Q(x)	premise
2 :	actual i	assumption
3 :	∀x.P(x)	∧e 1
4 :	P(i)	∀e 3,2
5 :	∀x.Q(x)	∧e 1
6 :	Q(i)	∀e 5,2
7 :	P(i)∧Q(i)	∧i 4,6
8 :	∀x.(P(x)∧Q(x))	∀i 2−7

Equivalencias

- **Equivalencia 3(a):** $(\forall x)(F \wedge G) \equiv (\forall x)F \wedge (\forall x)G$

1 :	$\boxed{\forall x.(P(x) \wedge Q(x))}$	assumption
2 :	$\boxed{\forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x)}$	Theorem $\forall x.(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x)$ 1
3 :	$\forall x.(P(x) \wedge Q(x)) \longrightarrow \forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x)$	$\longrightarrow$i 1–2
4 :	$\boxed{\forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x)}$	assumption
5 :	$\boxed{\forall x.(P(x) \wedge Q(x))}$	Theorem $\forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x) \vdash \forall x.(P(x) \wedge Q(x))$ 4
6 :	$\forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x) \longrightarrow \forall x.(P(x) \wedge Q(x))$	$\longrightarrow$i 4–5
7 :	$\forall x.(P(x) \wedge Q(x)) \longleftrightarrow \forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x)$	$\longleftrightarrow$i 3,6

Equivalencias

- **Equivalencia 3(b):** $(\exists x)F \lor (\exists x)G \vdash (\exists x)(F \lor G)$

1 :	∃x.P(x)∨∃x.Q(x)	premise
2 :	∃x.P(x)	assumption
3 :	actual i , P(i)	assumptions
4 :	P(i)∨Q(i)	∨i1 3.2
5 :	∃x.(P(x)∨Q(x))	∃i 4,3.1
6 :	∃x.(P(x)∨Q(x))	∃e 2,3−5
7 :	∃x.Q(x)	assumption
8 :	actual i1 , Q(i1)	assumptions
9 :	P(i1)∨Q(i1)	∨i2 8.2
10 :	∃x.(P(x)∨Q(x))	∃i 9,8.1
11 :	∃x.(P(x)∨Q(x))	∃e 7,8−10
12 :	∃x.(P(x)∨Q(x))	∨e 1,2−6,7−11

Equivalencias

- **Equivalencia 3(b):** $(\exists x)(F \vee G) \vdash (\exists x)F \vee (\exists x)G$

1 :	∃x.(P(x)∨Q(x))	premise
2 :	actual i, P(i)∨Q(i)	assumptions
3 :	P(i)	assumption
4 :	∃x.P(x)	∃i 3,2.1
5 :	∃x.P(x)∨∃x.Q(x)	∨ intro 4
6 :	Q(i)	assumption
7 :	∃x.Q(x)	∃i 6,2.1
8 :	∃x.P(x)∨∃x.Q(x)	∨ intro 7
9 :	∃x.P(x)∨∃x.Q(x)	∨e 2.2,3−5,6−8
10 :	∃x.P(x)∨∃x.Q(x)	∃e 1,2−9

Equivalencias

- **Equivalencia 3(b):** $(\exists x)F \lor (\exists x)G \equiv (\exists x)(F \lor G)$

1 :	$\boxed{\exists x.P(x) \lor \exists x.Q(x)}$	assumption
2 :	$\boxed{\exists x.(P(x) \lor Q(x))}$	Theorem $\exists x.P(x) \lor \exists x.Q(x) \vdash \exists x.(P(x) \lor Q(x))$ 1
3 :	$\exists x.P(x) \lor \exists x.Q(x) \longrightarrow \exists x.(P(x) \lor Q(x))$	$\longrightarrow$i 1–2
4 :	$\boxed{\exists x.(P(x) \lor Q(x))}$	assumption
5 :	$\boxed{\exists x.P(x) \lor \exists x.Q(x)}$	Conjecture $\exists x.(P(x) \lor Q(x)) \vdash \exists x.P(x) \lor \exists x.Q(x)$ 4
6 :	$\exists x.(P(x) \lor Q(x)) \longrightarrow \exists x.P(x) \lor \exists x.Q(x)$	$\longrightarrow$i 4–5
7 :	$\exists x.P(x) \lor \exists x.Q(x) \longleftrightarrow \exists x.(P(x) \lor Q(x))$	$\longleftrightarrow$i 3,6

Equivalencias

- **Equivalencia 4(b):** $(\exists x)(\exists y)F \vdash (\exists y)(\exists x)F$

1 :	∃x.∃y.P(x,y)	premise
2 :	actual i , ∃y.P(i,y)	assumptions
3 :	actual i1 , P(i,i1)	assumptions
4 :	∃x.P(x,i1)	∃i 3.2,2.1
5 :	∃y.∃x.P(x,y)	∃i 4,3.1
6 :	∃y.∃x.P(x,y)	∃e 2.2,3–5
7 :	∃y.∃x.P(x,y)	∃e 1,2–6

Equivalencias

- **Equivalencia 4(b):** $(\exists x)(\exists y)F \equiv (\exists y)(\exists x)F$

1 :	$\boxed{\exists x.\exists y.P(x,y)}$	assumption
2 :	$\boxed{\exists y.\exists x.P(x,y)}$	Conjecture $\exists x.\exists y.P(x,y) \vdash \exists y.\exists x.P(x,y)$ 1
3 :	$\exists x.\exists y.P(x,y) \longrightarrow \exists y.\exists x.P(x,y)$	$\longrightarrow$i 1–2
4 :	$\boxed{\exists y.\exists x.P(x,y)}$	assumption
5 :	$\boxed{\exists x.\exists y.P(x,y)}$	Conjecture $\exists x.\exists y.P(x,y) \vdash \exists y.\exists x.P(x,y)$ 4
6 :	$\exists y.\exists x.P(x,y) \longrightarrow \exists x.\exists y.P(x,y)$	$\longrightarrow$i 4–5
7 :	$\exists x.\exists y.P(x,y) \longleftrightarrow \exists y.\exists x.P(x,y)$	$\longleftrightarrow$i 3,6

Reglas de la igualdad

- **Regla de eliminación de la igualdad:**

  $$\frac{t_1 = t_2 \quad F[x/t_1]}{F[x/t_2]} =e$$

  donde $[x/t_1]$ y $[x/t_2]$ son libres para F.

- **Ejemplo:**

1	$(x + 1) = (1 + x)$	**premisa**
2	$(x + 1 > 1) \rightarrow (x + 1 > 0)$	**premisa**
3	$(1 + x > 1) \rightarrow (1 + x > 0)$	**=e 1,2**

- **Ejemplo:** $t_1 = t_2, t_2 = t_3 \vdash t_1 = t_3$

1	$t_1 = t_2$	**premisa**
2	$t_2 = t_3$	**premisa**
3	$t_1 = t_3$	**=e 2,1**

Reglas de la igualdad

- **Regla de introducción de la igualdad:**

$$\frac{}{t = t} =i$$

- **Ejemplo:** $t_1 = t_2, \vdash t_2 = t_1$

1	$t_1 = t_2$	premisa
2	$t_1 = t_1$	=i
3	$t_2 = t_1$	=e 1,2

Bibliografía

- C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal.* (Ariel, 2000) pp. 259–287.
- R. Bornat *Using ItL Jape with X* (Department of Computer Science, QMW, 1998)
- J. Dingel *Propositional and predicate logic: a review.* (2000) pp. 28–33.
- J.L. Fernández, A. Manjarrés y F.J. Díez *Lógica computacional.* (UNED, 2003) pp. 88–94.
- M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems.* (Cambridge University Press, 2000) pp. 109-127.