Tema 8: Formas normales. Cláusulas

José A. Alonso Jiménez
Andrés Cordón Franco

Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial

Universidad de Sevilla

Equivalencias

- **Equivalencia lógica**
  - Prop.: $F \equiv G$ syss $\models F \leftrightarrow G$.
- **Propiedades básicas de la equivalencia lógica:**
  - Reflexiva: $F \equiv F$
  - Simétrica: Si $F \equiv G$, entonces $G \equiv F$
  - Transitiva: Si $F \equiv G$ y $G \equiv H$, entonces $F \equiv H$
- **Principio de sustitución de fórmulas equivalentes:**
  - Prop.: Si en la fórmula F se sustituye una de sus subfórmulas G por una fórmula G' lógicamente equivalente a G, entonces la fórmula obtenida, F', es lógicamente equivalente a F.
  - Ejemplo: $$\begin{aligned} F &= (\forall x)P(x) \to (\exists x)Q(x) \\ G &= (\forall x)P(x) \\ G' &= (\forall y)P(y) \\ F' &= (\forall y)P(y) \to (\exists x)Q(x) \end{aligned}$$

Forma rectificada

- **Fórmula en forma rectificada:**
  - **Def.:** F está en forma rectificada si ninguna variable aparece libre y ligada y cada cuantificador se refiere a una variable diferente.
  - **Ejemplos:** $(\forall x)P(x) \to (\forall y)Q(z,y)$ está en forma rectificada
    $(\forall x)P(x) \to (\forall y)Q(x,y)$ no está en forma rectificada
    $(\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(z,x)$ no está en forma rectificada
  - **Prop.:** Para toda fórmula F existe una fórmula equivalente G en forma rectificada.
  - **Lema del renombramiento:** Si y no aparece libre en F, entonces

$$(\forall x)F \equiv (\forall y)F[x/y]$$

$$(\exists x)F \equiv (\exists y)F[x/y].$$

  - **Ejemplos de rectificación:**

$$(\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(z,x) \equiv (\forall x)P(x) \to (\forall u)Q(z,u)$$
$$(\forall x)P(x) \to (\forall y)Q(x,y) \equiv (\forall z)P(z) \to (\forall y)Q(x,y)$$

Forma normal prenexa

- **Fórmula en forma normal prenexa**
  - **Def.: La fórmula F está en forma normal prenexa (FNP) si es de la forma $(Q_1x_1)\dots(Q_nx_n)G$, donde $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $n \geq 0$ y G no tiene cuantificadores.**

    $(Q_1x_1)\dots(Q_nx_n)$ se llama el prefijo de F y G se llama la matriz de F.

  - **Ejemplos:**

Fórmula	¿está en FNP?
$\neg(\exists x)[P(x) \rightarrow (\forall x)P(x)]$	no
$(\forall x)(\exists y)[P(x) \wedge \neg P(y)]$	sí
$(\forall x)P(x) \vee (\exists y)Q(y)$	no
$(\forall x)(\exists y)[P(x) \vee Q(y)]$	sí
$(\exists y)(\forall x)[P(x) \vee Q(y)]$	sí
$\neg((\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge (\forall x)[Q(x) \rightarrow R(x)] \rightarrow (\forall x)[P(x) \rightarrow R(x)])$	no
$(\exists z)(\forall x)(\forall y)[((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(y) \vee R(y))) \wedge (P(z) \wedge \neg R(z))]$	sí

Forma normal prenexa: Cálculo de forma normal prenexa

- **Algoritmo de cálculo de forma normal prenexa:**
  - **Algoritmo:** Aplicando a una fórmula los siguientes pasos se obtiene otra fórmula equivalente y que está en forma normal prenexa rectificada:

    1. Rectificar la fórmula usando las equivalencias
    $$(\forall x)F \equiv (\forall y)F[x/y] \tag{1}$$
    $$(\exists x)F \equiv (\exists y)F[x/y] \tag{2}$$
    donde y es una variable que no ocurre libre en F.

    2. Eliminar los bicondicionales usando la equivalencia
    $$F \leftrightarrow G \equiv (F \to G) \land (G \to F) \tag{3}$$

    3. Eliminar los condicionales usando la equivalencia
    $$F \to G \equiv \neg F \lor G \tag{4}$$

Forma normal prenexa: Cálculo de forma normal prenexa

- **Algoritmo (cont.)**

4. Interiorizar las negaciones usando las equivalencias

$$\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G \tag{5}$$
$$\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G \tag{6}$$
$$\neg\neg F \equiv F \tag{7}$$
$$\neg(\forall x)F \equiv (\exists x)\neg F \tag{8}$$
$$\neg(\exists x)F \equiv (\forall x)\neg F \tag{9}$$

5. Exteriorizar los cuantificadores usando las equivalencias

$$(\forall x)F \wedge G \equiv (\forall x)(F \wedge G) \qquad \text{con } x \text{ no libre en } G. \tag{11}$$
$$(\forall x)F \vee G \equiv (\forall x)(F \vee G) \qquad \text{con } x \text{ no libre en } G. \tag{12}$$
$$(\exists x)F \wedge G \equiv (\exists x)(F \wedge G) \qquad \text{con } x \text{ no libre en } G. \tag{13}$$
$$(\exists x)F \vee G \equiv (\exists x)(F \vee G) \qquad \text{con } x \text{ no libre en } G. \tag{14}$$
$$G \wedge (\forall x)F \equiv (\forall x)(G \wedge F) \qquad \text{con } x \text{ no libre en } G. \tag{15}$$
$$G \vee (\forall x)F \equiv (\forall x)(G \vee F) \qquad \text{con } x \text{ no libre en } G. \tag{16}$$
$$G \wedge (\exists x)F \equiv (\exists x)(G \wedge F) \qquad \text{con } x \text{ no libre en } G. \tag{17}$$
$$G \vee (\exists x)F \equiv (\exists x)(G \vee F) \qquad \text{con } x \text{ no libre en } G. \tag{18}$$

Forma normal prenexa: Cálculo de forma normal prenexa

- **Ejemplo de cálculo de una forma normal prenexa de**

$$
\begin{array}{lll}
& \neg(\exists x)[P(x) \rightarrow (\forall x)P(x)] & \\
\equiv & \neg(\exists x)[P(x) \rightarrow (\forall y)P(y)] & \text{[por (1)]} \\
\equiv & \neg(\exists x)[\neg P(x) \vee (\forall y)P(y)] & \text{[por (4)]} \\
\equiv & (\forall x)[\neg(\neg P(x) \vee (\forall y)P(y))] & \text{[por (9)]} \\
\equiv & (\forall x)[\neg\neg P(x) \wedge \neg(\forall y)P(y)] & \text{[por (6)]} \\
\equiv & (\forall x)[P(x) \wedge (\exists y)\neg P(y)] & \text{[por (7 y 8)]} \\
\equiv & (\forall x)(\exists y)[P(x) \wedge \neg P(y)] & \text{[por (17)]}
\end{array}
$$

- **Ejemplo de cálculo de una forma normal prenexa de**

$$
\begin{array}{lll}
& (\forall x)P(x) \vee (\exists y)Q(y) & \\
\equiv & (\forall x)[P(x) \vee (\exists y)Q(y)] & \text{[por (12)]} \\
\equiv & (\forall x)(\exists y)[P(x) \vee Q(y)] & \text{[por (18)]}
\end{array}
$$

- **Ejemplo de cálculo de otra forma normal prenexa de**

$$
\begin{array}{lll}
& (\forall x)P(x) \vee (\exists y)Q(y) & \\
\equiv & (\exists y)[(\forall x)P(x) \vee Q(y)] & \text{[por (18)]} \\
\equiv & (\exists y)(\forall x)[P(x) \vee Q(y)] & \text{[por (12)]}
\end{array}
$$

Forma normal prenexa: Cálculo de forma normal prenexa

- Ejemplo de cálculo de una forma normal prenexa de

$$\neg((\forall x)[P(x) \to Q(x)] \land (\forall x)[Q(x) \to R(x)] \to (\forall x)[P(x) \to R(x)])$$

$\equiv \neg((\forall x)[P(x) \to Q(x)] \land (\forall y)[Q(y) \to R(y)] \to (\forall z)[P(z) \to R(z)])$ [por (1)]

$\equiv \neg(\neg((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land (\forall y)[\neg Q(y) \lor R(y)]) \lor (\forall z)[\neg P(z) \lor R(z)])$ [por (4)]

$\equiv \neg\neg((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land (\forall y)[\neg Q(y) \lor R(y)]) \land \neg(\forall z)[\neg P(z) \lor R(z)]$ [por (6)]

$\equiv ((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land (\forall y)[\neg Q(y) \lor R(y)]) \land (\exists z)[\neg(\neg P(z) \lor R(z))]$ [por (7, 8)]

$\equiv ((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land (\forall y)[\neg Q(y) \lor R(y)]) \land (\exists z)[\neg\neg P(z) \land \neg R(z)]$ [por (6)]

$\equiv ((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land (\forall y)[\neg Q(y) \lor R(y)]) \land (\exists z)[P(z) \land \neg R(z)]$ [por (7)]

$\equiv (\exists z)[((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land (\forall y)[\neg Q(y) \lor R(y)]) \land (P(z) \land \neg R(z))]$ [por (17)]

$\equiv (\exists z)[(\forall x)[(\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\forall y)[\neg Q(y) \lor R(y)]] \land (P(z) \land \neg R(z))]$ [por (11)]

$\equiv (\exists z)(\forall x)[((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\forall y)[\neg Q(y) \lor R(y)]) \land (P(z) \land \neg R(z))]$ [por (11)]

$\equiv (\exists z)(\forall x)[(\forall y)[(\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg Q(y) \lor R(y))] \land (P(z) \land \neg R(z))]$ [por (15)]

$\equiv (\exists z)(\forall x)(\forall y)[((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg Q(y) \lor R(y))) \land (P(z) \land \neg R(z))]$ [por (11)]

Forma normal prenexa conjuntiva

- **Fórmula en forma normal prenexa conjuntiva**
  - **Def.:** La fórmula F está en forma normal prenexa conjuntiva (FNPC) si es de la forma $(Q_1 x_1) \dots (Q_n x_n) G$, donde $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $n \geq 0$, G no tiene cuantificadores y G está en forma normal conjuntiva.

- **Algoritmo de cálculo de forma normal prenexa conjuntiva:**
  - **Algoritmo:** Aplicando a una fórmula los siguientes pasos se obtiene otra fórmula equivalente y que está en forma normal prenexa conjuntiva rectificada:

    1. Calcular una forma normal prenexa rectificada usando las equivalencias (1)–(18)
    2. Interiorizar las disyunciones usando las equivalencias

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) \tag{19}$$

$$(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C) \tag{20}$$

  - Ejemplo de cálculo de una FNPC de $(\forall x)(\exists y)[P(x) \vee (Q(y) \wedge \neg R(y))]$:

$$\begin{aligned} & (\forall x)(\exists y)[P(x) \vee (Q(y) \wedge \neg R(y))] \\ \equiv\ & (\forall x)(\exists y)[(P(x) \vee Q(y)) \wedge (P(x) \vee \neg R(y))] \ \text{[por (19)]} \end{aligned}$$

Forma de Skolem

- **Forma de Skolem:**
  - **Def.:** La fórmula F está en forma de Skolem (FS) si es de la forma $(\forall x_1) \dots (\forall x_n) G$, donde $n \geq 0$ y G no tiene cuantificadores.
  - **Ejemplos:**

$(\forall x)(\exists y)P(x,y)$	no está en forma de Skolem
$(\forall x)P(x,f(x))$	sí está en forma de Skolem
$(\exists x)Q(x)$	no está en forma de Skolem
$Q(a)$	sí está en forma de Skolem

- **Equisatisfacibilidad:**
  - **Def.:** Las fórmulas F y G son equisatisfacible si:
    F es satisfacible syss G es satisfacible.
    Se representa por $F \equiv_{sat} G$
  - **Ejemplos:**

$$
\begin{array}{lll}
(\exists x)Q(x) & \equiv_{sat} & Q(a) \\
(\exists x)Q(x) & \not\equiv & Q(a) \\
(\forall x)(\exists y)P(x,y) & \equiv_{sat} & (\forall x)P(x,f(x)) \\
(\forall x)(\exists y)P(x,y) & \not\equiv & (\forall x)P(x,f(x))
\end{array}
$$

Forma de Skolem

- **Propiedades:**
  - Si a es una constante que no ocurre en F, entonces $(\exists x)F \equiv_{sat} F[x/a]$.
  - Si g es un símbolo de función n–aria que no ocurre en F, entonces $(\forall x_1)\dots(\forall x_n)(\exists x)F \equiv_{sat} (\forall x_1)\dots(\forall x_n)F[x/g(x_1,\dots,x_n)]$.
- **Algoritmo de cálculo de forma de Skolem:**
  - Algoritmo: Sea F una fórmula en forma normal prenexa rectificada, la forma de Skolem de F es

$$\mathrm{Sko}(F) = \begin{cases} \mathrm{Sko}(G[x/a]), & \text{si } F \text{ es } (\exists x)G \text{ y } a \text{ es una nueva constante} \\ & \quad \text{que no ocurre en } F \text{ (constante de Skolem);} \\ \mathrm{Sko}(G[x/f(x_1,\dots,x_n)]), & \text{si } F \text{ es } (\forall x_1)\dots(\forall x_n)(\exists x)G \text{ y } f \text{ es un símbolo} \\ & \quad \text{de función } n\text{–aria que no ocurre en } F \\ & \quad \text{(función de Skolem);} \\ F, & \text{si } F \text{ está en forma de Skolem} \end{cases}$$

  - Propiedad: Si F es una fórmula en forma normal prenexa rectificada, entonces $\mathrm{Sko}(F)$ está en forma de Skolem y $\mathrm{Sko}(F) \equiv_{sat} F$.

Forma de Skolem: Cálculo de forma de Skolem

- **Ejemplos de cálculo de forma de Skolem:**
  - **Ejemplo 1:**

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Sko}((\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(x,y,z,u,v,w))\\
&= \mathrm{Sko}((\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(a,y,z,u,v,w))\\
&= \mathrm{Sko}((\forall y)(\forall z)(\forall v)(\exists w)P(a,y,z,f(y,z),v,w))\\
&= \mathrm{Sko}((\forall y)(\forall z)(\forall v)P(a,y,z,f(y,z),v,g(y,z,v)))\\
&= (\forall y)(\forall z)(\forall v)P(a,y,z,f(y,z),v,g(y,z,v))
\end{aligned}
$$

  - **Ejemplo 2:**

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Sko}((\forall x)(\exists y)(\forall z)(\exists w)[\neg P(a,w) \lor Q(f(x),y)])\\
&= \mathrm{Sko}((\forall x)(\forall z)(\exists w)[\neg P(a,w) \lor Q(f(x),g_1(h(x)))])\\
&= \mathrm{Sko}((\forall x)(\forall z)[\neg P(a,g_2(x,z)) \lor Q(f(x),g_1(h(x)))])\\
&= (\forall x)(\forall z)[\neg P(a,g_2(x,z)) \lor Q(f(x),g_1(h(x)))]
\end{aligned}
$$

Forma de Skolem: Cálculo de forma de Skolem

- **Ejemplo de cálculo de una forma de Skolem de**

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg(\exists x)[P(x) \to (\forall x)P(x)] \\
\equiv & (\forall x)(\exists y)[P(x) \land \neg P(y)] \quad \text{[por página ??]} \\
\equiv_{sat} & (\forall x)[P(x) \land \neg P(f(x))]
\end{array}
$$

- **Ejemplo de cálculo de una forma de Skolem de**

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall x)P(x) \lor (\exists y)Q(y) \\
\equiv & (\forall x)(\exists y)[P(x) \lor Q(y)] \quad \text{[por página ??]} \\
\equiv_{sat} & (\forall x)[P(x) \lor Q(f(x)))]
\end{array}
$$

- **Ejemplo de cálculo de otra forma de Skolem de**

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall x)P(x) \lor (\exists y)Q(y) \\
\equiv & (\exists y)(\forall x)[P(x) \lor Q(y)] \quad \text{[por página ??]} \\
\equiv_{sat} & (\forall x)[P(x) \lor Q(a)]
\end{array}
$$

- **Ejemplo de cálculo de una forma de Skolem de**

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg((\forall x)[P(x) \to Q(x)] \land (\forall x)[Q(x) \to R(x)] \to (\forall x)[P(x) \to R(x)]) \\
\equiv & (\exists z)(\forall x)(\forall y)[((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg Q(y) \lor R(y))) \land (P(z) \land \neg R(z))] \quad \text{[por p. ??]} \\
\equiv_{sat} & (\forall x)(\forall y)[((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg Q(y) \lor R(y))) \land (P(a) \land \neg R(a))]
\end{array}
$$

Lógica clausal: sintaxis

- **Sintaxis de la lógica clausal**
  - **Un átomo es una fórnula atómica.**

    Variables sobre átomos: $\boldsymbol{A, B, C, \dots, A_1, A_2, \dots}$.
  - **Un literal es un átomo** ($\boldsymbol{A}$) **o la negación de un átomo** ($\boldsymbol{\neg A}$).

    Variables sobre literales: $\boldsymbol{L, L_1, L_2, \dots}$.
  - **Una cláusula es un conjunto finito de literales.**

    Variables sobre cláusulas: $\boldsymbol{C, C_1, C_2, \dots}$.
  - **La cláusula vacía es el conjunto vacío de literales.**

    La cláusula vacía se representa por $\square$.
  - **Conjuntos finitos de cláusulas.**

    Variables sobre conjuntos finitos de cláusulas: $\boldsymbol{S, S_1, S_2, \dots}$.

Lógica clausal: semántica

- **Fórmulas correspondientes:**
  - Def.: La fórmula correspondiente a la cláusula $\{L_1, \dots, L_n\}$ es
    $$(\forall x_1) \dots (\forall x_p)[L_1 \vee \dots \vee L_n],$$
    donde $x_1, \dots, x_p$ son las variables libres de $L_1 \vee \dots \vee L_n$.
  - Def.: La fórmula correspondiente a la cláusula $\square$ es $\perp$.
  - Def.: La fórmula correspondiente al conjunto de cláusulas $\{\{L^1_1, \dots, L^1_{n_1}\}, \dots, \{L^m_1, \dots, L^m_{n_m}\}\}$ es
    $$(\forall x_1) \dots (\forall x_p)[(L^1_1 \vee \dots \vee L^1_{n_1}) \wedge \dots \wedge (L^m_1 \vee \dots \vee L^m_{n_m})],$$
    donde $x_1, \dots, x_p$ son las variables libres de $(L^1_1 \vee \dots \vee L^1_{n_1}) \wedge \dots \wedge (L^m_1 \vee \dots \vee L^m_{n_m})$.
  - Def.: La fórmula correspondiente al conjunto de cláusulas $\emptyset$ es $\top$.
- **Semántica:**
  - Def.: En cualquier interpretación $\mathcal{I} = (U, I)$, $I(\top) = 1$ e $I(\perp) = 0$.
  - Def.: Los conceptos semánticos relativos a las cláusulas y a los conjuntos de cláusulas son los de sus correspondientes fórmulas.

Forma clausal de una fórmula

- **Forma clausal de una fórmula**
  - **Def.:** Una forma clausal de una fórmula F es un conjunto de cláusulas S tal que $F \equiv_{sat} S$.
  - **Algoritmo:** Aplicando a la fórmula F los siguientes pasos se obtiene S que una forma clausal de F:
    1. Sea $F_1 = (\exists y_1) \dots (\exists y_n) F$, donde $y_1, \dots, y_n$ son las variables libres de F.
    2. Sea F_2 una forma normal prenexa conjuntiva rectificada de F_1 calculada mediante el algoritmo de la página ??.
    3. Sea $F_3 = \text{Sko}(F_2)$, que tiene la forma
       $$(\forall x_1) \dots (\forall x_p)[(L_1^1 \vee \dots \vee L_{n_1}^1) \wedge \dots \wedge (L_1^m \vee \dots \vee L_{n_m}^m)],$$
    4. Sea $S = \{\{L_1^1, \dots, L_{n_1}^1\}, \dots, \{L_1^m, \dots, L_{n_m}^m\}\}$.
  - **Prop.:** $F \equiv_{sat} F_1 \equiv F_2 \equiv_{sat} F_3 \equiv S$.

Forma clausal de una fórmula: Ejemplos

- **Ejemplo de cálculo de una forma clausal de**

$$\begin{array}{ll} & \neg(\exists x)[P(x) \rightarrow (\forall x)P(x)] \\ \equiv_{sat} & (\forall x)[P(x) \wedge \neg P(f(x))] \quad \text{[pág. ??]} \\ \equiv & \{\{P(x)\}, \{\neg P(f(x))\}\} \end{array}$$

- **Ejemplo de cálculo de una forma clausal de**

$$\begin{array}{ll} & (\forall x)P(x) \vee (\exists y)Q(y) \\ \equiv_{sat} & (\forall x)[P(x) \vee Q(f(x)))] \quad \text{[pág. ??]} \\ \equiv & \{\{P(x), Q(f(x)))\}\} \end{array}$$

- **Ejemplo de cálculo de otra forma clausal de**

$$\begin{array}{ll} & (\forall x)P(x) \vee (\exists y)Q(y) \\ \equiv_{sat} & (\forall x)[P(x) \vee Q(a)] \quad \text{[pág. ??]} \\ \equiv & \{\{P(x), Q(a)\}\} \end{array}$$

- **Ejemplo de cálculo de una forma clausal de**

$$\begin{array}{ll} & \neg((\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge (\forall x)[Q(x) \rightarrow R(x)] \rightarrow (\forall x)[P(x) \rightarrow R(x)]) \\ \equiv_{sat} & (\forall x)(\forall y)[((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(y) \vee R(y))) \wedge (P(a) \wedge \neg R(a))] \quad \text{[pág. ??]} \\ \equiv & \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(y), R(y)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\} \end{array}$$

Forma clausal de una fórmula: Ejemplos

- Ejemplo de cálculo de una forma clausal de
  $\neg(\exists x)[P(x,z) \lor (\forall y)Q(x,f(y))] \lor (\forall y)P(g(x,y),z)$

$$
\begin{array}{lll}
\equiv_{sat} & (\exists z)[\neg(\exists x)[P(x,z) \lor (\forall y)Q(x,f(y))] \lor (\forall y)P(g(x,y),z)] & [1] \\
\equiv & (\exists z)[\neg(\exists x)[P(x,z) \lor (\forall y)Q(x,f(y))] \lor (\forall w)P(g(x,w),z)] & [(1)] \\
\equiv & (\exists z)[(\forall x)[\neg(P(x,z) \lor (\forall y)Q(x,f(y)))] \lor (\forall w)P(g(x,w),z)] & [(9)] \\
\equiv & (\exists z)[(\forall x)[\neg P(x,z) \land \neg(\forall y)Q(x,f(y))] \lor (\forall w)P(g(x,w),z)] & [(6)] \\
\equiv & (\exists z)[(\forall x)[\neg P(x,z) \land (\exists y)\neg Q(x,f(y))] \lor (\forall w)P(g(x,w),z)] & [(8)] \\
\equiv & (\exists z)(\forall x)[(\neg P(x,z) \land (\exists y)\neg Q(x,f(y))) \lor (\forall w)P(g(x,w),z)] & [(12)] \\
\equiv & (\exists z)(\forall x)[(\exists y)[\neg P(x,z) \land \neg Q(x,f(y))] \lor (\forall w)P(g(x,w),z)] & [(17)] \\
\equiv & (\exists z)(\forall x)(\exists y)[(\neg P(x,z) \land \neg Q(x,f(y))) \lor (\forall w)P(g(x,w),z)] & [(14)] \\
\equiv & (\exists z)(\forall x)(\exists y)(\forall w)[(\neg P(x,z) \land \neg Q(x,f(y))) \lor P(g(x,w),z)] & [(16)] \\
\equiv & (\exists z)(\forall x)(\exists y)(\forall w)[(\neg P(x,z) \lor P(g(x,w),z)) \land (\neg Q(x,f(y)) \lor P(g(x,w),z))] & [(20)] \\
\equiv_{sat} & (\forall x)(\exists y)(\forall w)[(\neg P(x,a) \lor P(g(x,w),a)) \land (\neg Q(x,f(y)) \lor P(g(x,w),a))] & [\text{Sko}] \\
\equiv_{sat} & (\forall x)(\forall w)[(\neg P(x,a) \lor P(g(x,w),a)) \land (\neg Q(x,f(h(x))) \lor P(g(x,w),a))] & [\text{Sko}] \\
\equiv & \{\{\neg P(x,a), P(g(x,w),a))\}, \{\neg Q(x,f(h(x))), P(g(x,w),a))\}\} &
\end{array}
$$

Forma clausal de una fórmula: Ejemplos

- **Ejemplo de cálculo de una forma clausal de**

$$
\begin{array}{lll}
 & \neg((\forall x)[P(x) \to Q(x)] \land (\exists x)P(x) \to (\exists x)Q(x)) & \\
\equiv & \neg((\forall x)[P(x) \to Q(x)] \land (\exists y)P(y) \to (\exists z)Q(z)) & [(2)] \\
\equiv & \neg(\neg((\forall x)[P(x) \to Q(x)] \land (\exists y)P(y)) \lor (\exists z)Q(z)) & [(4)] \\
\equiv & \neg(\neg((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land (\exists y)P(y)) \lor (\exists z)Q(z)) & [(4)] \\
\equiv & \neg\neg((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land (\exists y)P(y)) \land \neg(\exists z)Q(z) & [(6)] \\
\equiv & ((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land (\exists y)P(y)) \land \neg(\exists z)Q(z) & [(7)] \\
\equiv & ((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land (\exists y)P(y)) \land (\forall z)\neg Q(z) & [(9)] \\
\equiv & (\exists y)[(\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land P(y)] \land (\forall z)\neg Q(z) & [(17)] \\
\equiv & (\exists y)[((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land P(y)) \land (\forall z)\neg Q(z)] & [(13)] \\
\equiv & (\exists y)[(\forall x)[(\neg P(x) \lor Q(x)) \land P(y))] \land (\forall z)\neg Q(z)] & [(11)] \\
\equiv & (\exists y)(\forall x)[((\neg P(x) \lor Q(x)) \land P(y)) \land (\forall z)\neg Q(z)] & [(11)] \\
\equiv & (\exists y)(\forall x)(\forall z)[(\neg P(x) \lor Q(x)) \land P(y) \land \neg Q(z)] & [(15)] \\
\equiv_{sat} & (\forall x)(\forall z)[(\neg P(x) \lor Q(x) \land P(a)) \land \neg Q(z)] & [(15)] \\
\equiv & \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\} &
\end{array}
$$

Forma clausal de un conjunto de fórmulas

- **Equisatisfacibilidad de conjuntos de fórmulas:**
  - **Def.: Los conjuntos de fórmulas S_1 y S_2 son equisatisfacible si:**

    S_1 es satisfacible syss S_2 es satisfacible.

    Se representa por $S_1 \equiv_{sat} S_2$

- **Forma clausal de un conjunto de fórmulas**
  - **Def.: Una forma clausal de un conjunto de fórmulas S es un conjunto de cláusulas equisatisfacible con S.**
  - **Prop.: Si $S_1, \dots, S_n$ son formas clausales de $F_1, \dots, F_n$, entonces $S_1 \cup \dots \cup S_n$ es una forma clausal de $\{F_1, \dots, F_n\}$.**
  - **Ejemplo: Una forma clausal de**

    $$\{(\forall x)[P(x) \to Q(x)], (\exists x)P(x), \neg(\exists x)Q(x)\}$$

    es

    $$\{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\}.$$

Reducción de consecuencia a insatisfacibilidad de cláusulas

- **Reducción de consecuencia a insatisfacibilidad de cláusulas:**
  - **Prop:** Sean $S_1, \dots, S_n$ formas clausales de las fórmulas $F_1, \dots, F_n$. Si S es una forma clausal de $\neg G$, entonces son equivalentes
    1. $\{F_1, \dots, F_n\} \models G$.
    2. $\{F_1, \dots, F_n, \neg G\}$ es insatisfacible.
    3. $S_1 \cup \ldots \cup S_n \cup S$ es insatisfacible.
  - **Ejemplos:**
    - Ejemplo 1:

      $\{(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)], (\exists x)P(x)\} \models (\exists x)Q(x)$

      syss $\{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\}$ es insatisfacible.
    - Ejemplo 2:

      $\{(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)], (\forall x)[Q(x) \rightarrow R(x)]\} \models (\forall x)[P(x) \rightarrow R(x)]$

      syss $\{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(y), R(y)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}$ es insatisfacible.

Bibliografía

- M.L. Bonet *Apuntes de LPO.* (Univ. Politécnica de Cataluña, 2003) pp. 26–31.
- C.L. Chang y R.C.T. Lee *Symbolic logic and mechanical theorem proving* (Academic Press, 1973) pp. 35–39 y 46–51.
- J.L. Fernández, A. Manjarrés y F.J. Díez *Lógica computacional.* (UNED, 2003) pp. 101–106.
- S. Hölldobler *Computational logic.* (U. de Dresden, 2004) pp. 62–67.
- A. Leitsch *The resolution calculus* (Springer–Verlag, 1997) pp. 11–22.
- R. Nieuwenhuis *Lógica de primer orden.* (U. Politénica de Cataluña, 2003) pp. 16–17
- M. Ojeda e I. Pérez *Lógica para la computación (Vol. 2: Lógica de Primer Orden)* (Ágora, 1997) pp. 37–49
- E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003) pp. 153–160.
- L. Paulson *Logic and proof* (U. Cambridge, 2002) pp. 43–47.
- U. Schöning *Logic for computer scientists* (Birkäuser, 1989) pp. 51–61.

Bibliografía complementaria

- **A. Leitsch *Resolution calculus and proof complexity* (Technische Universität Wien, Austria, 1994) pp. 8–12.**