Soluciones del examen de *Lógica informática* (Grupos 1 y 2) del 30 de Junio de 2005

José A. Alonso Jiménez

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla
Sevilla, 30 de Junio de 2005

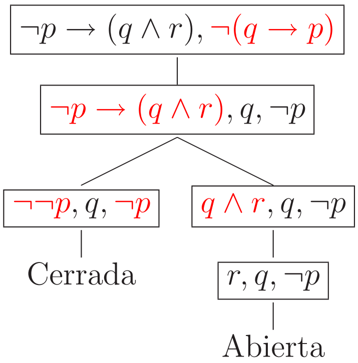
Ejercicio 1 [2.5 puntos] *Decidir, mediante tablero semántico, si*

$$\{\neg p \rightarrow (q \land r)\} \models q \rightarrow p$$

En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir del tablero.

Solución:

El tablero semántico correspondiente a la relación de consecuencia es



A partir de la hoja abierta $\{r, q, \neg p\}$ se tiene que la valoración v tal que

$$v(p) = 0, v(q) = 1, v(r) = 1$$

es un contramodelo de la relación y, por tanto,

$$\{\neg p \rightarrow (q \land r)\} \not\models q \rightarrow p$$

Ejercicio 2 [2.5 puntos] *Decidir, mediante resolución, si*

$(\exists x)(\exists y)[(R(x,y) \lor P(x,y)) \rightarrow (\forall z)(\forall w)[R(z,w) \land Q(z,w)]]$

es consecuencia lógica de

$\neg(\exists x)(\exists y)[Q(x,y) \rightarrow P(x,y)]$

En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir de la resolución.

Solución:

En primer lugar se calcula la forma clausal de la premisa:

$$\begin{array}{ll}
 & \neg(\exists x)(\exists y)[Q(x,y) \rightarrow P(x,y)] \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)\neg(Q(x,y) \rightarrow P(x,y)) \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[Q(x,y) \land \neg P(x,y)] \\
\equiv & \{\{Q(x,y)\}, \{\neg P(x,y)\}\}
\end{array}$$

En segundo lugar se calcula la forma clausal de la negación de la conclusión:

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg(\exists x)(\exists y)[(R(x,y) \lor P(x,y)) \to (\forall z)(\forall w)[R(z,w) \land Q(z,w)]] \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)\neg((R(x,y) \lor P(x,y)) \to (\forall z)(\forall w)[R(z,w) \land Q(z,w)]) \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[(R(x,y) \lor P(x,y)) \land \neg(\forall z)(\forall w)[R(z,w) \land Q(z,w)]] \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[(R(x,y) \lor P(x,y)) \land (\exists z)(\exists w)\neg(R(z,w) \land Q(z,w))] \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[R(x,y) \lor P(x,y)] \land (\exists z)(\exists w)[\neg R(z,w) \lor \neg Q(z,w)]] \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[R(x,y) \lor P(x,y)] \land (\forall x)(\forall y)(\exists z)(\exists w)[\neg R(z,w) \lor \neg Q(z,w)] \\
\equiv_{sat} & (\forall x)(\forall y)[R(x,y) \lor P(x,y)] \land (\forall x)(\forall y)(\exists w)[\neg R(f(x,y),w) \lor \neg Q(f(x,y),w)] \\
\equiv_{sat} & (\forall x)(\forall y)[R(x,y) \lor P(x,y)] \land (\forall x)(\forall y)[\neg R(f(x,y),g(x,y)) \lor \neg Q(f(x,y),g(x,y))] \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[(R(x,y) \lor P(x,y)) \land (\neg R(f(x,y),g(x,y)) \lor \neg Q(f(x,y),g(x,y)))] \\
\equiv & \{\{R(x,y), P(x,y)\}\}, \{\neg R(f(x,y),g(x,y)), \neg Q(f(x,y),g(x,y))\}\}
\end{array}
$$

El problema de decidir si se verifica la relación de consecuencias se reduce al de decidir si el conjunto S de las cláusulas obtenidas es inconsistente. Este último problema se reduce a determinar si se puede obtener la cláusula vacía por resolución a partir de S.

Veamos cómo puede obtenerse la cláusula vacía por resolución a partir de S. Los elementos de S son

$$
\begin{array}{ll}
C_1 & := \{Q(x,y)\} \\
C_2 & := \{\neg P(x,y)\} \\
C_3 & := \{R(x,y), P(x,y)\} \\
C_4 & := \{\neg R(f(x,y),g(x,y)), \neg Q(f(x,y),g(x,y))\}
\end{array}
$$

Por resolución de C_2 y C_3 se obtiene

$$C_5 := \{R(x,y)\}$$

Por resolución de C_5 y C_4 aplicando a C_5 el renombramiento $\{x/x', y/y'\}$ y usando el unificador $\{x'/f(x,y), y'/g(x,y)\}$ se obtiene

$$C_6 := \{\neg Q(f(x,y),g(x,y))\}$$

Por resolución de C_6 y C_1 aplicando a C_1 el renombramiento $\{x/x', y/y'\}$ y usando el unificador $\{x'/f(x,y), y'/g(x,y)\}$ se obtiene

$$C_7 := \square$$

Ejercicio 3 [2.5 puntos] *Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:*

1. *Si F es una fórmula satisfacible, entonces todas las subfórmulas de F son satisfacibles.*
2. *Existen fórmulas válidas tales que todas sus subfórmulas son válidas.*

Solución:

Solución del apartado 1: La proposición es falsa. Un contraejemplo es la fórmula $F := \neg(p \land \neg p)$. La fórmula F es satisfacible (de hecho, F es válida) y la subfórmula $p \land \neg p$ de F no es satisfacible.

Solución del apartado 1: La proposición es falsa ya que toda fórmula tiene alguna subfórmula atómica y para cada fórmula atómica existe alguna interpretación en la que no se verifica.

Ejercicio 4 [2.5 puntos] *Se sabe que:*

- *Si todo el que estudia aprueba, entonces todo el que estudia recibe un regalo.*
- *Hay quien estudia y no recibe ningún regalo.*
- *No es verdad que todo el que estudia aprueba.*

Formalizar los conocimientos anteriores y probar que el conjunto de fórmulas obtenidas es consistente, proporcionando una estructura que sea modelo de cada una de las fórmulas.

Solución:

Para la formalización, usaremos el siguiente lenguaje:

$$\begin{array}{rcl} E(x) & : & \text{“}x\text{ estudia”} \\ A(x) & : & \text{“}x\text{ aprueba”} \\ R(x) & : & \text{“}x\text{ recibe un regalo”} \end{array}$$

Las fórmulas correspondientes a los conocimientos del problema son:

$$\begin{array}{l} (\forall x)[E(x) \rightarrow A(x)] \rightarrow (\forall y)[E(y) \rightarrow R(y)] \\ (\exists x)[E(x) \land \neg R(x)] \\ \neg(\forall x)[E(x) \rightarrow A(x)] \end{array}$$

Buscaremos el modelo mediante el método de los tableros semánticos:

$$\begin{array}{rl} 1. & (\forall x)[E(x) \rightarrow A(x)] \rightarrow (\forall y)[E(y) \rightarrow R(y)] \\ 2. & (\exists x)[E(x) \land \neg R(x)] \\ 3. & \neg(\forall x)[E(x) \rightarrow A(x)] \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \begin{array}{rl} 4. & \neg(\forall x)[E(x) \rightarrow A(x)]\ (1) \\ 6. & E(a) \land \neg R(a)\ (2) \\ 7. & E(a)\ (6) \\ 8. & \neg R(a)\ (6) \\ 9. & \neg(E(b) \rightarrow A(b))\ (3) \\ 10. & E(b)\ (9) \\ 11. & \neg A(b)\ (9) \end{array} & \begin{array}{l} 5.\ (\forall y)[E(y) \rightarrow R(y)]\ (1) \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

La rama izquierda es una rama completa y abierta. Por tanto, se puede extraer un modelo a partir de dicha rama. El universo es $U = \{a, b\}$ y la interpretación de las relaciones es $I(E) = \{a, b\}$, $I(A) = \emptyset$, $I(R) = \emptyset$. Además, al no distinguirse b de a en las interpretaciones puede identificarse con a dando lugar a un nuevo modelo con universo $U' = \{a\}$ e interpretaciones $I'(E) = \{a\}$, $I'(A) = \emptyset$, $I'(R) = \emptyset$.

Ejercicio 5 [2.5 puntos] *Probar mediante deducción natural:*

1. $p \land \neg(q \rightarrow r) \vdash (p \land q) \land \neg r$
2. $\neg(\forall x)P(x) \vdash (\exists x)\neg P(x)$
3. $\{(\forall x)(\forall y)[((\exists z)R(y,z)) \rightarrow R(x,y)],\ (\exists x)(\exists y)R(x,y)\} \ \vdash\ (\forall x)(\forall y)R(x,y)$

Solución:

Solución del apartado 1: $p \land \neg(q \rightarrow r) \vdash (p \land q) \land \neg r$

1	$p \land \neg(q \rightarrow r)$	premisa
2	p	$\mathcal{E}_\land$ 1
3	$\neg q$	supuesto
4	$\neg(q \rightarrow r)$	$\mathcal{E}_\land$ 1
5	q	supuesto
6	$\neg r$	supuesto
7	$\perp$	$\mathcal{E}_\neg$ $5, 3$
8	r	RAA $6 - 7$
9	$q \rightarrow r$	$\mathcal{I}_\rightarrow$ $5 - 8$
10	$\perp$	$\mathcal{E}_\neg$ $4, 9$
11	q	RAA $3 - 10$
12	$p \land q$	$\mathcal{I}_\land$ $2, 11$
13	r	supuesto
14	$\neg(q \rightarrow r)$	$\mathcal{E}_\land$ 1
15	q	supuesto
16	r	hipotesis 13
17	$q \rightarrow r$	$\mathcal{I}_\rightarrow$ $15 - 16$
18	$\perp$	$\mathcal{E}_\neg$ $14, 17$
19	$\neg r$	$\mathcal{I}_\neg$ $13 - 18$
20	$(p \land q) \land \neg r$	$\mathcal{I}_\land$ $12, 19$

Solución del apartado 2: $\neg(\forall x)P(x) \vdash (\exists x)\neg P(x)$

1	$\neg(\forall x)P(x)$	premisa
2	$\neg(\exists x)\neg P(x)$	supuesto
3	actual i	supuesto
4	$\neg P(i)$	supuesto
5	$(\exists x)\neg P(x)$	$\mathcal{I}_\exists\ 4,3$
6	$\perp$	$\mathcal{E}_\neg\ 2,5$
7	$P(i)$	RAA $4-6$
8	$(\forall x)P(x)$	$\mathcal{I}_\forall\ 3-7$
9	$\perp$	$\mathcal{E}_\neg\ 1,8$
10	$(\exists x)\neg P(x)$	RAA $2-9$

Solución del apartado 3:

$$\{(\forall x)(\forall y)[((\exists z)R(y,z)) \to R(x,y)],\ (\exists x)(\exists y)R(x,y)\}\ \vdash\ (\forall x)(\forall y)R(x,y)$$

1	$(\forall x)(\forall y)[((\exists z)R(y,z)) \to R(x,y)]$	premisa
2	$(\exists x)(\exists y)R(x,y)$	supuesto
3	actual a	supuesto
4	actual b	supuesto
5	actual $c, (\exists y)R(c,y)$	supuestos
6	actual $d, R(c,d)$	supuestos
7	$(\forall y)[((\exists z)R(y,z)) \to R(a,y)]$	$\mathcal{E}_\forall\ 1,3$
8	$((\exists z)R(b,z)) \to R(a,b)$	$\mathcal{E}_\forall\ 7,4$
9	$(\forall y)[((\exists z)R(y,z)) \to R(b,y)]$	$\mathcal{E}_\forall\ 1,4$
10	$((\exists z)R(c,z)) \to R(b,c)]$	$\mathcal{E}_\forall\ 9,5.1$
11	$R(b,c)$	$\mathcal{E}_\to\ 10,5.2$
12	$(\exists z)R(b,z)$	$\mathcal{I}_\exists\ 11,5.1$
13	$R(a,b)$	$\mathcal{E}_\to\ 8,12$
14	$R(a,b)$	$\mathcal{E}_\exists\ 5.2, 6-13$
15	$R(a,b)$	$\mathcal{E}_\exists\ 2, 5-14$
16	$(\forall y)R(a,y)$	$\mathcal{I}_\forall\ 4-15$
17	$(\forall x)(\forall y)R(x,y)$	$\mathcal{I}_\forall\ 3-16$