Soluciones del examen de *Lógica informática* (Grupos 1 y 2) del 23 de Septiembre de 2005

José A. Alonso Jiménez

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla
Sevilla, 23 de Septiembre de 2005

Ejercicio 1 [2 puntos] *Decidir, mediante tablero semántico, si*

1. $\{r \to \neg(p \land \neg q),\ ((p \to r) \to (\neg q \leftrightarrow r)) \land \neg r\} \models q$
2. $\models ((p \to q) \to r) \to (q \to r)$

En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir del tablero.

Solución:

Apartado 1. El tablero correpondiente al primer apartado es

1. $r \to \neg(p \land \neg q)$]
2. $((p \to r) \to (\neg q \leftrightarrow r)) \land \neg r$
3. $\neg q$
4. $(p \to r) \to (\neg q \leftrightarrow r)$ (2)
5. $\neg r$ (2)

6. $\neg(p \to r)$ (4)
8. p (6)
9. $\neg r$ (6)

10. $\neg r$ (1)
Abierta
$\{p, \neg q, \neg r\}$

11. $\neg(p \land \neg q)$ (1)

7. $\neg q \leftrightarrow r$ (4)

Puesto que el tablero tiene una rama abierta, resulta que

$$\{r \to \neg(p \land \neg q),\ ((p \to r) \to (\neg q \leftrightarrow r)) \land \neg r\} \not\models q$$

Un contramodelo es la valoración v tal que $v(p) = 1$, $v(q) = 0$ y $v(r) = 0$.

Apartado 2. El tablero correpondiente al segundo apartado es

1. $\neg(((p \to q) \to r) \to (q \to r))$
2. $(p \to q) \to r$ (1)
3. $\neg(q \to r)$ (1)
4. q (3)
5. $\neg r$ (3)

6. $\neg(p \to q)$ (2)
8. p (6)
9. $\neg q$ (6)
Cerrada
(4 y 9)

7. r (2)
Cerrada
(5 y 7)

Puesto que el tablero es cerrado, resulta que

$$\models ((p \to q) \to r) \to (q \to r)$$

Ejercicio 2 [2 puntos] *Decidir, mediante resolución, si*

$$\models (\exists x)(\forall y)(\forall z)[(P(y) \to Q(z)) \to (P(x) \to Q(x))]$$

En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir de la resolución.

Solución:

La fórmula

$$(\exists x)(\forall y)(\forall z)[(P(y) \to Q(z)) \to (P(x) \to Q(x))]$$

es válida syss

$$\{\neg(\exists x)(\forall y)(\forall z)[(P(y) \to Q(z)) \to (P(x) \to Q(x))]\}$$

es inconsistente. Para decidir su consistencia, empezamos calculando su forma clausular.

$$\begin{array}{ll} & \neg(\exists x)(\forall y)(\forall z)[(P(y) \to Q(z)) \to (P(x) \to Q(x))] \\ \equiv & (\forall x)(\exists y)(\exists z)[\neg((P(y) \to Q(z)) \to (P(x) \to Q(x)))] \\ \equiv & (\forall x)(\exists y)(\exists z)[(P(y) \to Q(z)) \land \neg(P(x) \to Q(x))] \\ \equiv & (\forall x)(\exists y)(\exists z)[(\neg P(y) \lor Q(z)) \land (P(x) \land \neg Q(x))] \\ \equiv_{sat} & (\forall x)[(\neg P(f(x)) \lor Q(g(x))) \land (P(x) \land \neg Q(x))] \\ \equiv & \{\{\neg P(f(x)), Q(g(x))\}, \{P(x)\}, \{\neg Q(x)\}\} \end{array}$$

Una demostración por resolución es

1	$\{\neg P(f(x)), Q(g(x))\}$	Hipótesis
2	$\{P(x)\}$	Hipótesis
3	$\{\neg Q(x)\}$	Hipótesis
4	$\{Q(g(x))\}$	Resolvente de 1 y 2 con $\theta_2 = [x/x_2]$ y $\sigma = [x_2/f(x)]$
5	$\square$	Resolvente de 3 y 4 con $\theta_1 = [x/x_3]$ y $\sigma = [x_3/g(x)]$

Al obtenerse la cláusula vacía por resolución a partir de la forma clausular de

$$\{\neg(\exists x)(\forall y)(\forall z)[(P(y) \to Q(z)) \to (P(x) \to Q(x))]\}$$

resulta que el conjunto es inconsistente y, por tanto,

$$\models (\exists x)(\forall y)(\forall z)[(P(y) \to Q(z)) \to (P(x) \to Q(x))]$$

Ejercicio 3 [2 puntos] *Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:*

1. *Para todo conjunto de fórmula S y para toda fórmula F se verifica que si $S \not\models F$ entonces $S \models \neg F$.*
2. *Para toda fórmula F se tiene que si G es una forma de Skolem de F entonces $\models F \leftrightarrow G$.*

Solución:

Solución del apartado 1. El apartado 1 es falso. Un ejemplo que lo refuta consiste en tomar como S el conjunto $\emptyset$ y como F la fórmula p, ya que $\emptyset \not\models p$ (un contramodelo es la valoración v tal que $v(p) = 0$) y $\emptyset \not\models \neg p$ (un contramodelo es la valoración v tal que $v(p) = 1$).

Solución del apartado 2. El apartado 2 es falso. Un ejemplo que lo refuta consiste en tomar como F la fórmula $(\exists x)P(x)$ y como G la fórmula $P(a)$, ya que $\not\models (\exists x)P(x) \leftrightarrow P(a)$ (un contramodelo es la interpretación $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{1, 2\}$, $a^I = 1$ y $P^I = \{2\}$).

Ejercicio 4 [2 puntos] *En una pecera nadan una serie de peces. Se observa que:*

1. *Hay algún pez x que para cualquier pez y, si el pez x no se come al pez y entonces existe un pez z tal que z es un tiburón o bien z protege al pez y.*
2. *No hay ningún pez que se coma a todos los demás.*
3. *Ningún pez protege a ningún otro.*

Decidir, utilizando el método de resolución, si de las observaciones se deduce que existe algún tiburón en la pecera.
*(*NOTA*: En la formalización, usar el siguiente glosario $C(x, y)$ significa que "x se come a y", $P(x, y)$ significa que "x protege a y" y $T(x)$ significa que "x es un tiburón".)*

Solución:

La formalización de las observaciones y de la negación de la conclusión es:

1. Hay algún pez x que para cualquier pez y, si el pez x no se come al pez y entonces existe un pez z tal que z es un tiburón o bien z protege al pez y.
$$(\exists x)(\forall y)[\neg C(x, y) \to (\exists z)[T(z) \lor P(z, y)]].$$
2. No hay ningún pez que se coma a todos los demás.
$$\neg(\exists x)(\forall y)C(x, y).$$
3. Ningún pez protege a ningún otro.
$$\neg(\exists x)(\exists y)P(x, y).$$
4. No existe ningún tiburón en la pecera.
$$\neg(\exists x)T(x).$$

Para aplicar la resolución, se necesita calcular las formas clausulares de las fórmulas anteriores.

$$\begin{array}{lll}
 & (\exists x)(\forall y)[\neg C(x, y) \to (\exists z)[T(z) \lor P(z, y)]] & \\
\equiv & (\exists x)(\forall y)[\neg\neg C(x, y) \lor (\exists z)[T(z) \lor P(z, y)]] & \\
\equiv & (\exists x)(\forall y)[C(x, y) \lor (\exists z)[T(z) \lor P(z, y)]] & \\
\equiv & (\exists x)(\forall y)(\exists z)[C(x, y) \lor T(z) \lor P(z, y)] & \\
\equiv_{sat} & (\forall y)(\exists z)[C(a, y) \lor T(z) \lor P(z, y)] & a \text{ constante de Skolem} \\
\equiv_{sat} & (\forall y)[C(a, y) \lor T(f(y)) \lor P(f(y), y)] & f \text{ función de Skolem} \\
\equiv & \{\{C(a, y), T(f(y)), P(f(y), y)\}\} &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg(\exists x)(\forall y)C(x,y) \\
\equiv & (\forall x)(\exists y)\neg C(x,y) \\
\equiv_{sat} & (\forall x)\neg C(x,g(x)) \qquad g \text{ función de Skolem} \\
\equiv & \{\{\neg C(x,g(x))\}\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg(\exists x)(\exists y)P(x,y) \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)\neg P(x,y) \\
\equiv & \{\{\neg P(x,y)\}\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg(\exists x)T(x) \\
\equiv & (\forall x)\neg T(x) \\
\equiv & \{\{\neg T(x)\}\}
\end{array}
$$

Una demostración por resolución a partir de las cláusulas anteriores es

1	$\{C(a,y), T(f(y)), P(f(y),y)\}$	Hipótesis
2	$\{\neg C(x,g(x))\}$	Hipótesis
3	$\{\neg P(x,y)\}$	Hipótesis
4	$\{\neg T(x)\}$	Hipótesis
5	$\{C(a,y), P(f(y),y)\}$	Resolvente de 4 y 1 con $\sigma = [x/f(y)]$
6	$\{P(f(g(a)),g(a))\}$	Resolvente de 5 y 2 con $\sigma = [x/a, y/g(a)]$
7	$\square$	Resolvente de 6 y 3 con $\sigma = [x/g(a), y/g(a)]$

Por tanto, de las observaciones se deduce que existe algún tiburón en la pecera.

Ejercicio 5 [2 puntos] *Probar mediante deducción natural:*

1. $\vdash ((p \rightarrow (q \land \neg r)) \rightarrow p) \rightarrow p$

2. $\exists x.(P(x) \land \neg Q(x)) \rightarrow \forall y.(P(y) \rightarrow R(y))$,
$\exists x.(P(x) \land S(x))$,
$\forall x.(P(x) \rightarrow \neg R(x))$
$\vdash \exists x.(S(x) \land Q(x))$

3. $\vdash \neg\exists x.\forall y.(P(y,x) \leftrightarrow \neg P(y,y))$

Solución:

Solución del apartado 1: $\vdash ((p \to (q \wedge \neg r)) \to p) \to p$

1	$p \vee \neg p$	LEM
2	p	supuesto
3	$(p \to (q \wedge \neg r)) \to p$	supuesto
4	p	hyp2
5	$((p \to (q \wedge \neg r)) \to p) \to p$	$\mathcal{I}_\to\ 3-4$
6	$\neg p$	supuesto
7	$(p \to (q \wedge \neg r)) \to p$	supuesto
8	$\neg(p \to (q \wedge \neg r))$	MT$6,7$
9	p	supuesto
10	$\bot$	$\mathcal{E}_\neg\ 9,6$
11	$q \wedge \neg r$	$\mathcal{E}_\bot\ 10$
12	$p \to (q \wedge \neg r)$	$\mathcal{I}_\to\ 9-11$
13	$\bot$	$\mathcal{E}_\neg\ 12,8$
14	p	$\mathcal{E}_\bot\ 13$
15	$((p \to (q \wedge \neg r)) \to p) \to p$	$\mathcal{I}_\to\ 7-14$
16	$((p \to (q \wedge \neg r)) \to p) \to p$	$\mathcal{E}_\vee\ 1,2-5,6-15$

Solución del apartado 2: $\exists x.(P(x) \land \neg Q(x)) \to \forall y.(P(y) \to R(y))$,
$\exists x.(P(x) \land S(x))$,
$\forall x.(P(x) \to \neg R(x))$
$\vdash \exists x.(S(x) \land Q(x))$

1	$(\exists x)[P(x) \land \neg Q(x)] \to (\forall y)[P(y) \to R(y)]$	premisa
2	$(\exists x)[P(x) \land S(x)]$	premisa
3	$(\forall x)[P(x) \to \neg R(x)]$	premisa
4	actual $i, P(i) \land S(i)$	supuesto
5	$S(i)$	$\mathcal{E}_\land$ 4
6	$\neg Q(i)$	supuesto
7	$P(i)$	$\mathcal{E}_\land$ 4
8	$P(i) \land \neg Q(i)$	$\mathcal{I}_\land$ $7, 6$
9	$(\exists x)[P(x) \land \neg Q(x)]$	$\mathcal{I}_\exists$ $7, 6$
10	$(\forall y)[P(y) \to R(y)]$	$\mathcal{E}_\to$ $1, 9$
11	$P(i) \to R(i)$	$\mathcal{E}_\forall$ $10, 4$
12	$P(i) \to \neg R(i)$	$\mathcal{E}_\forall$ $3, 4$
13	$R(i)$	$\mathcal{E}_\to$ $11, 7$
14	$\neg R(i)$	$\mathcal{E}_\to$ $12, 7$
15	$\bot$	$\mathcal{E}_\neg$ $13, 14$
16	$Q(i)$	RAA $6 - 15$
17	$S(i) \land Q(i)$	$\mathcal{I}_\land$ $5, 16$
18	$(\exists x)[S(x) \land Q(x)]$	$\mathcal{I}_\exists$ $17, 4$
19	$(\exists x)[S(x) \land Q(x)]$	$\mathcal{E}_\exists$ $2, 4 - 18$

Solución del apartado 3: $\vdash \neg\exists x.\forall y.(P(y,x) \leftrightarrow \neg P(y,y))$

1	$(\exists x)(\forall y)[P(y,x) \leftrightarrow \neg P(y,y)]$	supuesto
2	actual $i, (\forall y)[P(y,i) \leftrightarrow \neg P(y,y)]$	supuestos
3	$P(i,i) \leftrightarrow \neg P(i,i)$	$\mathcal{E}_\forall$ 2
4	$P(i,i) \vee \neg P(i,i)$	LEM
5	$P(i,i)$	supuesto
6	$P(i,i) \rightarrow \neg P(i,i)$	$\mathcal{E}_\leftrightarrow$ 3
7	$\neg P(i,i)$	$\mathcal{E}_\rightarrow$ 6, 5
8	$\perp$	$\mathcal{E}_\neg$ 5, 7
9	$\neg P(i,i)$	supuesto
10	$\neg P(i,i) \rightarrow P(i,i)$	$\mathcal{E}_\leftrightarrow$ 3
11	$P(i,i)$	$\mathcal{E}_\rightarrow$ 10, 9
12	$\perp$	$\mathcal{E}_\neg$ 11, 9
13	$\perp$	$\mathcal{E}_\vee$ 4, 5 − 8, 9 − 12
14	$\perp$	$\mathcal{E}_\exists$ 1, 2 − 13
15	$\neg(\exists x)(\forall y)[P(y,x) \leftrightarrow \neg P(y,y)]$	$\mathcal{E}_\neg$ 1 − 14