Soluciones de exámenes de “Lógica informática”

José A. Alonso Jiménez

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla
Sevilla, 10 de Junio del 2004 (Versión del 4 de Abril de 2005)

Índice General

Examen de Diciembre de 2000

Ejercicio 1 *El ejercicio consta de dos apartados.*

(a) *Probar que la siguiente fórmula es una tautología:* $(p \to \neg q \wedge r) \to (p \to (q \to r))$

(a.1) *Utilizando tableros semánticos.*

(a.2) *Mediante forma normal conjuntiva.*

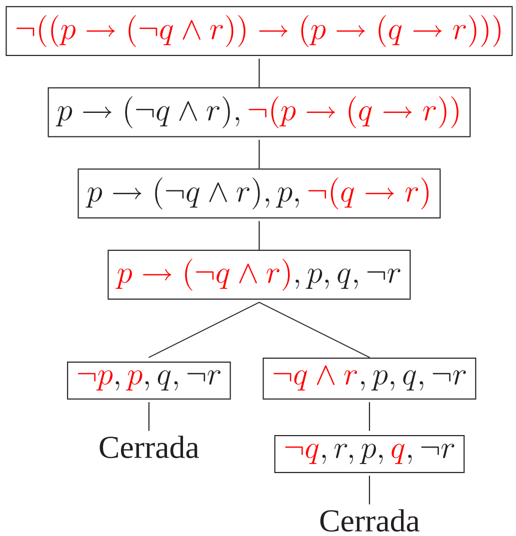
(b) *Sea* $U = \{\neg A_1 \vee \neg B_1 \vee C_2, \neg A_1 \vee B_1, \neg A_2 \vee B_2, A_1, A_2\}$

(b.1) *Probar que* U *es consistente y describir razonadamente todos los modelos de* U*.*

(b.2) *Probar que* $U \models C_2$ *mediante resolución lineal.*

Solución:

Solución del apartado (a.1): Un tablero semántico de $\neg((p \to \neg q \wedge r) \to (p \to (q \to r)))$ es



Como todas las hojas son cerradas, $(p \to \neg q \wedge r) \to (p \to (q \to r))$ es una tautología.

Solución del apartado (a.2): Cálculo de una forma normal conjuntiva de:

$$\begin{array}{lll}
 & (p \to \neg q \wedge r) \to (p \to (q \to r)) & \\
\equiv & \neg(\neg p \vee (\neg q \wedge r)) \vee (\neg p \vee (\neg q \vee r)) & \text{[por (2)]} \\
\equiv & (\neg\neg p \wedge \neg(\neg q \wedge r)) \vee (\neg p \vee \neg q \vee r) & \text{[por (3)]} \\
\equiv & (p \wedge (\neg\neg q \vee \neg r)) \vee (\neg p \vee \neg q \vee r) & \text{[por (3) y (5)]} \\
\equiv & (p \wedge (q \vee \neg r)) \vee (\neg p \vee \neg q \vee r) & \text{[por (5)]} \\
\equiv & (p \vee \neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (q \vee \neg r \vee \neg p \vee \neg q \vee r) & \text{[por (7)]} \\
\equiv & \mathsf{V} \wedge \mathsf{V} & \\
\equiv & \mathsf{V} &
\end{array}$$

Por ser la fórmula equivalente a V, es una tautología.

Solución del apartado (b.1): Vamos a ver qué condiciones tiene que cumplir una valoración v para ser modelo de U. Para verificar las dos últimas fórmulas de U se tiene que

$$v(A_1) = 1 \tag{1}$$

$$v(A_2) = 1 \tag{2}$$

Para verificar $\neg A_1 \vee B_1$, teniendo en cuenta (1), se tiene que

$$v(B_1) = 1 \tag{3}$$

Para verificar $\neg A_2 \vee B_2$, teniendo en cuenta (2), se tiene que

$$v(B_2) = 1 \tag{4}$$

Para verificar $\neg A_1 \vee \neg B_1 \vee C_2$, teniendo en cuenta (1) y (3), se tiene que

$$v(C_2) = 1 \tag{5}$$

En definitiva, cualquier valoración v tal que $v(A_1) = v(A_2) = v(B_1) = v(B_2) = v(C_2) = 1$ es un modelo de U.

Solución del apartado (b.2): Una resolución lineal es

1	$\{\neg A_1, \neg B_1, C_2\}$	
2	$\{\neg A_1, B_1\}$	
3	$\{\neg A_2, B_2\}$	
4	$\{A_1\}$	
5	$\{A_2\}$	
6	$\{\neg C_2\}$	
7	$\{\neg A_1, \neg B_1\}$	Resolvente de 6 y 1
8	$\{\neg B_1\}$	Resolvente de 7 y 4
9	$\{\neg A_1\}$	Resolvente de 8 y 2
10	$\square$	Resolvente de 9 y 4

Ejercicio 2 *(a) Hallar las formas nomal prenexa conjuntiva, de Skolem y clausal de la fórmula:*

$$((\exists z)A(y,z) \to (\exists u)B(y,u)) \to (\exists x)(\forall z)[P(x) \to \neg Q(z)]$$

(b) Sea S el conjunto formado por las fórmulas

$$F_1 : (\forall x)(\forall y)[I(x,y) \to I(y,x)] \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)[I(x,y) \wedge I(y,z) \to I(x,z)]$$
$$F_2 : P(e) \wedge (\forall x)[P(x) \to S(d,x)]$$
$$F_3 : (\forall x)(\forall y_1)(\forall y_2)[P(x) \wedge \neg I(y_1,y_2) \to \neg(S(y_1,x) \wedge S(y_2,x))]$$

Decidir, mediante resolución o construyendo un modelo de Herbrand, si:

(b.1) $S \models (\forall y)[I(y,d) \to (\forall x)[P(x) \to S(y,x)]]$

(b.2) $S \models \neg(\exists x)[S(x,e) \wedge \neg I(x,d)]$

Solución:

Solución del apartado (a):

1.– Forma normal conjuntiva:

$$
\begin{array}{lll}
 & ((\exists z)A(y,z) \to (\exists u)B(y,u)) \to (\exists x)(\forall z)[P(x) \to \neg Q(z)] & \\
\equiv & ((\exists v)A(y,v) \to (\exists u)B(y,u)) \to (\exists x)(\forall z)[P(x) \to \neg Q(z)] & \text{[por rectificación]} \\
\equiv & \neg(\neg(\exists v)A(y,v) \vee (\exists u)B(y,u)) \vee (\exists x)(\forall z)[\neg P(x) \vee \neg Q(z)] & \text{[por (4)]} \\
\equiv & (\neg\neg(\exists v)A(y,v) \wedge \neg(\exists u)B(y,u)) \vee (\exists x)(\forall z)[\neg P(x) \vee \neg Q(z)] & \text{[por (6)]} \\
\equiv & ((\exists v)A(y,v) \wedge (\forall u)\neg B(y,u)) \vee (\exists x)(\forall z)[\neg P(x) \vee \neg Q(z)] & \text{[por (7) y (9)]} \\
\equiv & (\exists v)[A(y,v) \wedge (\forall u)\neg B(y,u)] \vee (\exists x)(\forall z)[\neg P(x) \vee \neg Q(z)] & \text{[por (13)]} \\
\equiv & (\exists v)[(A(y,v) \wedge (\forall u)\neg B(y,u)) \vee (\exists x)(\forall z)[\neg P(x) \vee \neg Q(z)]] & \text{[por (14)]} \\
\equiv & (\exists v)(\exists x)[(A(y,v) \wedge (\forall u)\neg B(y,u)) \vee (\forall z)[\neg P(x) \vee \neg Q(z)]] & \text{[por (18)]} \\
\equiv & (\exists v)(\exists x)(\forall z)[(A(y,v) \wedge (\forall u)\neg B(y,u)) \vee (\neg P(x) \vee \neg Q(z))] & \text{[por (16)]} \\
\equiv & (\exists v)(\exists x)(\forall z)[(\forall u)[A(y,v) \wedge \neg B(y,u)] \vee (\neg P(x) \vee \neg Q(z))] & \text{[por (15)]} \\
\equiv & (\exists v)(\exists x)(\forall z)(\forall u)[(A(y,v) \wedge \neg B(y,u)) \vee (\neg P(x) \vee \neg Q(z))] & \text{[por (12)]} \\
\equiv & (\exists v)(\exists x)(\forall z)(\forall u)[(A(y,v) \vee \neg P(x) \vee \neg Q(z)) \wedge & \\
 & \qquad\qquad (\neg B(y,u) \vee \neg P(x) \vee \neg Q(z))] & \text{[por (20)]}
\end{array}
$$

2.– Forma de Skolem:

$$
\begin{array}{lll}
 & ((\exists z)A(y,z) \to (\exists u)B(y,u)) \to (\exists x)(\forall z)[P(x) \to \neg Q(z)] & \\
\equiv & (\exists v)(\exists x)(\forall z)(\forall u)[(A(y,v) \vee \neg P(x) \vee \neg Q(z)) \wedge & \\
 & \qquad\qquad (\neg B(y,u) \vee \neg P(x) \vee \neg Q(z))] & \\
\equiv_{sat} & (\exists y)(\exists v)(\exists x)(\forall z)(\forall u)[(A(y,v) \vee \neg P(x) \vee \neg Q(z)) \wedge & \\
 & \qquad\qquad (\neg B(y,u) \vee \neg P(x) \vee \neg Q(z))] & \text{[por cierre]} \\
\equiv_{sat} & (\exists v)(\exists x)(\forall z)(\forall u)[(A(a,v) \vee \neg P(x) \vee \neg Q(z)) \wedge (\neg B(a,u) \vee \neg P(x) \vee \neg Q(z))] & \text{[Skolem } a\text{]} \\
\equiv_{sat} & (\exists x)(\forall z)(\forall u)[(A(a,b) \vee \neg P(x) \vee \neg Q(z)) \wedge (\neg B(a,u) \vee \neg P(x) \vee \neg Q(z))] & \text{[Skolem } b\text{]} \\
\equiv_{sat} & (\forall z)(\forall u)[(A(a,b) \vee \neg P(c) \vee \neg Q(z)) \wedge (\neg B(a,u) \vee \neg P(c) \vee \neg Q(z))] & \text{[Skolem } c\text{]}
\end{array}
$$

3.– Forma clausal:

$$
\begin{array}{lll}
 & ((\exists z)A(y,z) \to (\exists u)B(y,u)) \to (\exists x)(\forall z)[P(x) \to \neg Q(z)] & \\
\equiv_{sat} & (\forall z)(\forall u)[(A(a,b) \vee \neg P(c) \vee \neg Q(z)) \wedge (\neg B(a,u) \vee \neg P(c) \vee \neg Q(z))] & \text{[Skolem } c\text{]} \\
\equiv & \{\{(A(a,b), \neg P(c), \neg Q(z)\}, \{\neg B(a,u), \neg P(c), \neg Q(z)\}\} &
\end{array}
$$

Examen de Junio de 2001

Ejercicio 3 *Este ejercicio tiene 3 apartados.*

1. *Decide, utilizando el método que se indica, si cada una de las fórmulas siguientes es insatisfactible o una tautología.*

   $A : (p \wedge q \leftrightarrow p \vee q) \to (p \to q)$
   $B : (p \to \neg(q \to \neg r)) \wedge (r \to \neg q)$
   $C : (q \to p \wedge r) \wedge \neg(p \leftrightarrow p \vee q)$

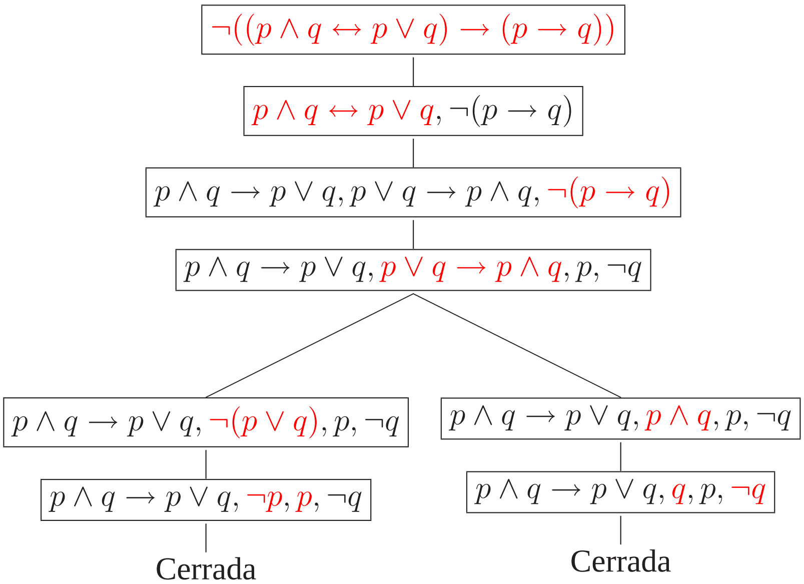
   Los métodos que deben usarse son: tableros semánticos para A, formas normales para B y resolución para C.

2. *Describe, razonadamente, todos los modelos de cada una de las fórmulas anteriores.*

3. *Consideremos el conjunto $U = \{p \vee q \to r \vee s, r \wedge t \to s, r \wedge \neg t \to \neg u\}$. Decide, mediante tableros semánticos, si $U \models p \to s \vee \neg u$.*

Solución:

Solución del apartado (1.a): La fórmula A es una tautología ya que el tablero semántico de $\{\neg A\}$



tiene todas las hojas cerradas.

Solución del apartado (1.b): Vamos a calcular una forma normal disyuntiva de B:

$$
\begin{array}{lll}
 & (p \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg r)) \wedge (r \rightarrow \neg q) & \\
\equiv & (\neg p \vee \neg(\neg q \vee \neg r)) \wedge (\neg r \vee \neg q) & \text{[por (2)]} \\
\equiv & (\neg p \vee (\neg\neg q \wedge \neg\neg r)) \wedge (\neg r \vee \neg q) & \text{[por (4)]} \\
\equiv & (\neg p \vee (q \wedge r)) \wedge (\neg r \vee \neg q) & \text{[por (5)]} \\
\equiv & (\neg p \wedge (\neg r \vee \neg q)) \vee ((q \wedge r) \wedge (\neg r \vee \neg q)) & \text{[por (7)]} \\
\equiv & ((\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee ((q \wedge r) \wedge (\neg r \vee \neg q)) & \text{[por (6)]} \\
\equiv & ((\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee ((q \wedge r \wedge \neg r) \vee (q \wedge r \wedge \neg q)) & \text{[por (6)]} \\
\equiv & ((\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee (\mathsf{F} \vee \mathsf{F}) & \\
\equiv & (\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q) &
\end{array}
$$

Por tanto, la fórmula B es satisfacible (por ejemplo, si $v(p) = v(r) = 0$, entonces $v(B) = 1$), pero no es una tautología (por ejemplo, si $v(p) = 1$, entonces $v(B) = 0$).

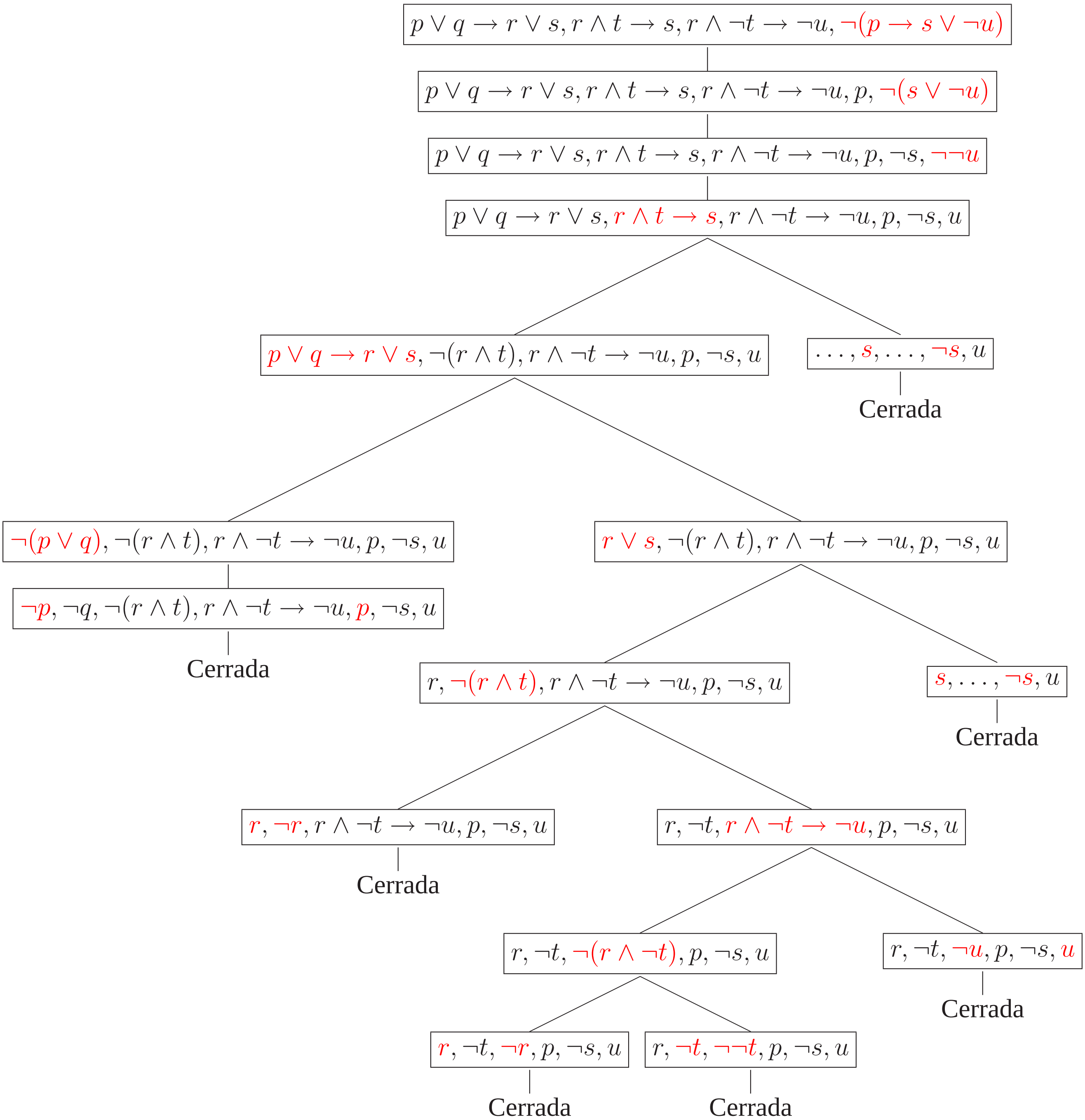
Solución del apartado (1.c): En primer lugar, se calcula una forma clausal de $\neg C$.

$$
\begin{array}{lll}
 & \neg((q \rightarrow p \wedge r) \wedge \neg(p \leftrightarrow p \vee q)) & \\
\equiv & \neg((q \rightarrow p \wedge r) \wedge \neg((p \rightarrow p \vee q) \wedge (p \vee q \rightarrow p))) & \text{[por (1)]} \\
\equiv & \neg((\neg q \vee (p \wedge r)) \wedge \neg((\neg p \vee (p \vee q)) \wedge (\neg(p \vee q) \vee p))) & \text{[por (2)]} \\
\equiv & \neg(\neg q \vee (p \wedge r)) \vee \neg\neg((\neg p \vee (p \vee q)) \wedge (\neg(p \vee q) \vee p))) & \text{[por (3)]} \\
\equiv & (\neg\neg q \wedge \neg(p \wedge r)) \vee ((\neg p \vee (p \vee q)) \wedge (\neg(p \vee q) \vee p))) & \text{[por (4) y (5)]} \\
\equiv & (q \wedge (\neg p \vee \neg r)) \vee ((\neg p \vee (p \vee q)) \wedge (\neg(p \vee q) \vee p))) & \text{[por (3) y (5)]} \\
\equiv & (q \wedge (\neg p \vee \neg r)) \vee (\mathsf{V} \wedge (\neg(p \vee q) \vee p))) & \\
\equiv & (q \wedge (\neg p \vee \neg r)) \vee (\neg(p \vee q) \vee p) & \\
\equiv & (q \wedge (\neg p \vee \neg r)) \vee ((\neg p \wedge \neg q) \vee p) & \text{[por (4)]} \\
\equiv & (q \wedge (\neg p \vee \neg r)) \vee ((\neg p \vee p) \wedge (\neg q \vee p)) & \text{[por (7)]} \\
\equiv & (q \wedge (\neg p \vee \neg r)) \vee (\mathsf{V} \wedge (\neg q \vee p)) & \\
\equiv & (q \wedge (\neg p \vee \neg r)) \vee (\neg q \vee p) & \\
\equiv & (q \vee (\neg q \vee p)) \wedge ((\neg p \vee \neg r) \vee (\neg q \vee p)) & \text{[por (7)]} \\
\equiv & \mathsf{V} \wedge \mathsf{V} & \\
\equiv & \mathsf{V} &
\end{array}
$$

Puesto que $\neg C$ es una tautología, C es insatisfacible.

Solución del apartado (2): Puesto que A es una tautología, todas las valoraciones son modelo de A. Los modelos de B son las valoraciones v tales que $v(p) = v(r) = 0$ o bien $v(p) = v(q) = 0$. Puesto que C es insatisfacible, no tiene modelos.

Solución del apartado (3): Un tablero semántico de $U \cup \{\neg(p \rightarrow s \vee \neg u)\}$ es



Como todas las hojas son cerradas, $U \models p \rightarrow s \vee \neg u$.

Ejercicio 4 *Las relaciones de parentesco verifican la siguientes propiedades generales:*

- *Si x es hermano de y, entonces y es hermano de x.*
- *Todo el mundo es hijo de alguien.*
- *Nadie es hijo del hermano de su padre.*

- *Cualquier padre de una persona es también padre de todos los hermanos de esa persona.*
- *Nadie es hijo ni hermano de sí mismo.*

Tenemos los siguientes miembros de la familia Peláez: Don Antonio, Don Luis, Antoñito y Manolito y sabemos que Don Antonio y Don Luis son hermanos, Antoñito y Manolito son hermanos, y Antoñito es hijo de Don Antonio. Se pide:

1. *Formalizar los conocimientos anteriores en un lenguaje de primer orden usando tan solo:*
   - A, L, a, m *como constantes para D. Antonio, D. Luis, Antoñito y Manolito, respectivamente.*
   - *Los predicados:* $\mathsf{Her}(x,y) =$ *"x es hermano de y",* $\mathsf{Hijo}(x,y) =$ *"x es hijo de y".*
2. *Obtener una forma clausal para el conjunto de fórmulas obtenido en el apartado 1.*
3. *Decidir mediante resolución si Don Luis es el padre de Manolito o no.*

Solución:

Solución del apartado (1): Formalización:

- Si x es hermano de y, entonces y es hermano de x.

  $(\forall x)(\forall y)[\mathsf{Her}(x,y) \to \mathsf{Her}(y,x)]$.
- Todo el mundo es hijo de alguien.

  $(\forall x)(\exists y)\mathsf{Hijo}(x,y)$.
- Nadie es hijo del hermano de su padre.

  $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[\mathsf{Hijo}(x,y) \land \mathsf{Her}(z,y) \to \neg\mathsf{Hijo}(x,z)]$.
- Cualquier padre de una persona es también padre de todos los hermanos de esa persona.

  $(\forall x)(\forall y)[\mathsf{Hijo}(x,y) \to (\forall z)[\mathsf{Her}(z,x) \to \mathsf{Hijo}(z,y)]]$.
- Nadie es hijo ni hermano de sí mismo.

  $(\forall x)[\neg\mathsf{Hijo}(x,x) \land \neg\mathsf{Her}(x,x)]$.
- Don Antonio y Don Luis son hermanos.

  $\mathsf{Her}(A,L)$.
- Antoñito y Manolito son hermanos.

  $\mathsf{Her}(a,m)$.
- Antoñito es hijo de Don Antonio.

  $\mathsf{Hijo}(a,A)$.

Solución del apartado (2): Cálculo de formas clausales:

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall x)(\forall y)[\mathsf{Her}(x,y) \to \mathsf{Her}(y,x)] \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg\mathsf{Her}(x,y) \lor \mathsf{Her}(y,x)] \quad \text{[por (4)]} \\
\equiv & \{\{\neg\mathsf{Her}(x,y), \mathsf{Her}(y,x)\}\}
\end{array}
$$

$$\begin{array}{lll}
 & (\forall x)(\exists y)\mathsf{Hijo}(x,y) & \\
\equiv_{sat} & (\forall x)\mathsf{Hijo}(x,f(x)) & \text{[Skolem } f\text{]} \\
\equiv & \{\{\mathsf{Hijo}(x,f(x))\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 & (\forall x)(\forall y)(\forall z)[\mathsf{Hijo}(x,y) \land \mathsf{Her}(z,y) \to \neg\mathsf{Hijo}(x,z)] & \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)(\forall z)[\neg(\mathsf{Hijo}(x,y) \land \mathsf{Her}(z,y)) \lor \neg\mathsf{Hijo}(x,z)] & \text{[por (4)]} \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)(\forall z)[\neg\mathsf{Hijo}(x,y) \lor \neg\mathsf{Her}(z,y) \lor \neg\mathsf{Hijo}(x,z)] & \text{[por (5)]} \\
\equiv & \{\{\neg\mathsf{Hijo}(x,y), \neg\mathsf{Her}(z,y), \neg\mathsf{Hijo}(x,z)\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 & (\forall x)(\forall y)[\mathsf{Hijo}(x,y) \to (\forall z)[\mathsf{Her}(z,x) \to \mathsf{Hijo}(z,y)]] & \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg\mathsf{Hijo}(x,y) \lor (\forall z)[\neg\mathsf{Her}(z,x) \lor \mathsf{Hijo}(z,y)]] & \text{[por (4)]} \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)(\forall z)[\neg\mathsf{Hijo}(x,y) \lor \neg\mathsf{Her}(z,x) \lor \mathsf{Hijo}(z,y)] & \text{[por (16)]} \\
\equiv & \{\{\neg\mathsf{Hijo}(x,y), \neg\mathsf{Her}(z,x), \mathsf{Hijo}(z,y)\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 & (\forall x)[\neg\mathsf{Hijo}(x,x) \land \neg\mathsf{Her}(x,x)] \\
\equiv & \{\{\neg\mathsf{Hijo}(x,x)\}, \{\neg\mathsf{Her}(x,x)\}\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 & \mathsf{Her}(A,L) \\
\equiv & \{\{\mathsf{Her}(A,L)\}\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 & \mathsf{Her}(a,m) \\
\equiv & \{\{\mathsf{Her}(a,m)\}\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 & \mathsf{Hijo}(a,A) \\
\equiv & \{\{\mathsf{Hijo}(a,A)\}\}
\end{array}$$

Solución del apartado (3): Vamos a demostrar que Don Luis no es el padre de Manolito. Para ello suponemos lo contrario lo que da lugar a la cláusula $\{\mathsf{Hijo}(m,L)\}$. Una demostración por resolución de las cláusulas obtennidas es

1	$\{\neg\mathsf{Her}(x,y), \mathsf{Her}(y,x)\}$	
2	$\{\mathsf{Hijo}(x,f(x))\}$	
3	$\{\neg\mathsf{Hijo}(x,y), \neg\mathsf{Her}(z,y), \neg\mathsf{Hijo}(x,z)\}$	
4	$\{\neg\mathsf{Hijo}(x,y), \neg\mathsf{Her}(z,x), \mathsf{Hijo}(z,y)\}$	
5	$\{\neg\mathsf{Hijo}(x,x)\}$	
6	$\{\neg\mathsf{Her}(x,x)\}$	
7	$\{\mathsf{Her}(A,L)\}$	
8	$\{\mathsf{Her}(a,m)\}$	
9	$\{\mathsf{Hijo}(a,A)\}$	
10	$\{\mathsf{Hijo}(m,L)\}$	
11	$\{\neg\mathsf{Hijo}(a,y), \neg\mathsf{Her}(A,y)\}$	Resolvente de 3 y 9 con $\sigma = [x/a, z/A]$
12	$\{\neg\mathsf{Her}(z,m), \mathsf{Hijo}(z,L)\}$	Resolvente de 4 y 10 con $\sigma = [x/m, y/L]$
13	$\{\mathsf{Hijo}(a,L)\}$	Resolvente de 12 y 8 con $\sigma = [z/a]$
14	$\{\neg\mathsf{Her}(A,L)\}$	Resolvente de 13 y 11 con $\sigma = [y/L]$
15	$\square$	Resolvente de 14 y 7 con $\sigma = \epsilon$

Ejercicio 5 *Este ejercicio tiene dos apartados.*

1. *Obténganse formas prenexa conjuntiva, de Skolem y clausal de la siguiente fórmula:*

$$(\exists x)(\forall u)[(\exists y)P(u,f(y),a) \to (Q(u,x) \to (\exists y)[Q(y,z) \land P(u,y,z)])]$$

siendo a un símbolo de constante y f un símbolo de función de aridad 1.

2. *Dada una fórmula proposicional F, sea $T(F) = \{G \in PROP : F \models G\}$. Pruébese que, para cada $A, B \in PROP$,*

   (a) $A \to B$ *es tautología* $\iff$ $T(B) \subseteq T(A)$.

   (b) $A \equiv B$ $\iff$ $T(B) = T(A)$.

Solución:

Solución del apartado (1):

1.– Forma normal prenexa conjuntiva:

$$
\begin{array}{lll}
 & (\exists x)(\forall u)[(\exists y)P(u,f(y),a) \to (Q(u,x) \to (\exists y)[Q(y,z) \land P(u,y,z)])] & \\
\equiv & (\exists x)(\forall u)[(\exists y)P(u,f(y),a) \to (Q(u,x) \to (\exists v)[Q(v,z) \land P(u,v,z)])] & \text{[por rectificación]} \\
\equiv & (\exists x)(\forall u)[\neg(\exists y)P(u,f(y),a) \lor (\neg Q(u,x) \lor (\exists v)[Q(v,z) \land P(u,v,z)])] & \text{[por (4)]} \\
\equiv & (\exists x)(\forall u)[(\forall y)\neg P(u,f(y),a) \lor (\neg Q(u,x) \lor (\exists v)[Q(v,z) \land P(u,v,z)])] & \text{[por (9)]} \\
\equiv & (\exists x)(\forall u)(\exists v)[(\forall y)\neg P(u,f(y),a) \lor (\neg Q(u,x) \lor (Q(v,z) \land P(u,v,z)))] & \text{[por (18)]} \\
\equiv & (\exists x)(\forall u)(\exists v)(\forall y)[\neg P(u,f(y),a) \lor (\neg Q(u,x) \lor (Q(v,z) \land P(u,v,z)))] & \text{[por (12)]} \\
\equiv & (\exists x)(\forall u)(\exists v)(\forall y)[(\neg P(u,f(y),a) \lor \neg Q(u,x) \lor Q(v,z)) \land & \\
 & \qquad (\neg P(u,f(y),a) \lor \neg Q(u,x) \lor P(u,v,z))] & \text{[por (19)]}
\end{array}
$$

2.– Forma de Skolem:

$$
\begin{array}{lll}
 & (\exists x)(\forall u)[(\exists y)P(u,f(y),a) \to (Q(u,x) \to (\exists y)[Q(y,z) \land P(u,y,z)])] & \\
\equiv & (\exists x)(\forall u)(\exists v)(\forall y)[(\neg P(u,f(y),a) \lor \neg Q(u,x) \lor Q(v,z)) \land & \\
 & \qquad (\neg P(u,f(y),a) \lor \neg Q(u,x) \lor P(u,v,z))] & \\
\equiv_{sat} & (\exists z)(\exists x)(\forall u)(\exists v)(\forall y)[(\neg P(u,f(y),a) \lor \neg Q(u,x) \lor Q(v,z)) \land & \\
 & \qquad (\neg P(u,f(y),a) \lor \neg Q(u,x) \lor P(u,v,z))] & \text{[por cierre]} \\
\equiv_{sat} & (\exists x)(\forall u)(\exists v)(\forall y)[(\neg P(u,f(y),a) \lor \neg Q(u,x) \lor Q(v,b)) \land & \\
 & \qquad (\neg P(u,f(y),a) \lor \neg Q(u,x) \lor P(u,v,b))] & \text{[Skolem } b\text{]} \\
\equiv_{sat} & (\forall u)(\exists v)(\forall y)[(\neg P(u,f(y),a) \lor \neg Q(u,c) \lor Q(v,b)) \land & \\
 & \qquad (\neg P(u,f(y),a) \lor \neg Q(u,c) \lor P(u,v,b))] & \text{[Skolem } c\text{]} \\
\equiv_{sat} & (\forall u)(\forall y)[(\neg P(u,f(y),a) \lor \neg Q(u,c) \lor Q(g(u),b)) \land & \\
 & \qquad (\neg P(u,f(y),a) \lor \neg Q(u,c) \lor P(u,g(u),b))] & \text{[Skolem } g\text{]}
\end{array}
$$

3.– Forma clausal:

$$
\begin{array}{lll}
 & (\exists x)(\forall u)[(\exists y)P(u,f(y),a) \to (Q(u,x) \to (\exists y)[Q(y,z) \land P(u,y,z)])] & \\
\equiv_{sat} & (\forall u)(\forall y)[(\neg P(u,f(y),a) \lor \neg Q(u,c) \lor Q(g(u),b)) \land & \\
 & \qquad (\neg P(u,f(y),a) \lor \neg Q(u,c) \lor P(u,g(u),b))] & \text{[Skolem } g\text{]} \\
\equiv & \{\{\neg P(u,f(y),a), \neg Q(u,c), Q(g(u),b)\}, & \\
 & \ \{\neg P(u,f(y),a), \neg Q(u,c), P(u,g(u),b)\}\} &
\end{array}
$$

Solución del apartado (2a):

1.– Demostración de que si $\models A \to B$, entonces $T(B) \subseteq T(A)$: Supongamos que

$$\models A \to B \tag{1}$$

Sea $G \in T(P)$. Tenemos que demostrar que $G \in T(A)$. Por la elección de G y la definición de $T(P)$, se tiene que

$$G \in PROP \tag{2}$$

$$B \models G \tag{3}$$

Para probar que $A \models G$, consideremos una valoración v tal que

$$v(A) = 1 \tag{4}$$

Entonces, por (4) y (1)

$$v(B) = 1 \tag{5}$$

Por (5) y (3)

$$v(G) = 1 \tag{6}$$

Luego,

$$A \models G \tag{7}$$

Por (2), (7) y la definición de $T(A)$, se tiene que $G \in T(A)$.

2.– Demostración de que si $T(B) \subseteq T(A)$, entonces $\models A \to B$: Supongamos que

$$T(B) \subseteq T(A) \tag{8}$$

Puesto que $B \models B$, se tiene que $B \in T(B)$ y, por (8), $B \in T(A)$. Luego, por la definición de $T(A)$, $A \models B$ y, por tanto, $\models A \to B$.

Solución del apartado (2b):

$$\begin{array}{rcl}
A \equiv B & \Longleftrightarrow & A \models B \text{ y } B \models A \\
& \Longleftrightarrow & \models A \to B \text{ y } \models B \to A \\
& \Longleftrightarrow & T(B) \subseteq T(A) \text{ y } T(A) \subseteq T(B) \\
& \Longleftrightarrow & T(A) = T(B)
\end{array}$$

Ejercicio 6 *Sea S el conjunto formado por las siguientes fórmulas*

(a) $(\forall x)P(x,x)$.

(b) $(\forall x)(\forall y)[P(x,y) \lor P(y,x)]$.

(c) $(\forall x)[P(x,f(x)) \land \neg P(f(x),x) \land P(a,x)]$.

(d) $(\forall x)\neg(\exists y)[P(x,y) \land P(y,f(x)) \land \neg P(y,x) \land \neg P(f(x),y)]$.

Probar mediante resolución básica o construyendo un modelo de Herbrand, que

1. $S \models (\forall x)(\exists y)[P(x,y) \land \neg P(y,x)]$.
2. $S \not\models (\forall x)[\neg P(x,a) \to (\exists y)P(y,x)]$.

Examen de Septiembre de 2001

Ejercicio 7 *Este ejercicio tiene dos apartados.*

(a) *Pruébese que la siguiente fórmula es una tautología:*

$$(p \to r) \to ((q \to r) \to (p \lor q \to r))$$

Primero utilizando tableros semánticos y después mediante resolución proposicional.

(b) *Pruébese que:*

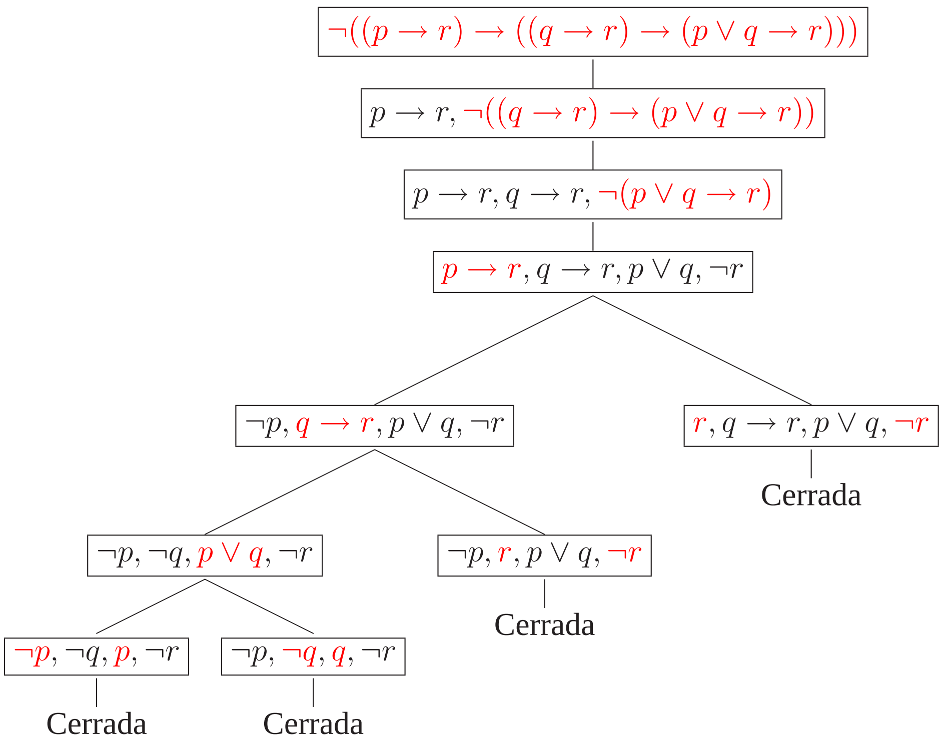
(b.1) *Si U es un conjunto de tautologías y A es una fórmula proposicional tal que $U \models A$, entonces A es una tautología.*

(b.2) *Si A y B son dos cláusulas proposicionales y F es la fórmula $\neg(A \land B)$, entonces*

F es insatisfactible syss A y B contienen ambas un par complementario.

Solución:

Solución del apartado (a.1): Un tablero semántico de $\{\neg((p \to r) \to ((q \to r) \to (p \lor q \to r)))\}$ es



Como todas sus hojas son cerradas, la fórmula es una tautología.

Solución del apartado (a.2): En primer lugar, se calcula una forma clausal de $\neg((p \to r) \to ((q \to r) \to (p \lor q \to r)))$.

$$
\begin{array}{lll}
 & \neg((p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r))) & \\
\equiv & \neg(\neg(\neg p \vee r) \vee (\neg(\neg q \vee r) \vee (\neg(p \vee q) \vee r))) & \text{[por (2)]} \\
\equiv & \neg\neg(\neg p \vee r) \wedge \neg(\neg(\neg q \vee r) \vee (\neg(p \vee q) \vee r)) & \text{[por (4)]} \\
\equiv & (\neg p \vee r) \wedge \neg\neg(\neg q \vee r) \wedge \neg(\neg(p \vee q) \vee r) & \text{[por (5) y (4)]} \\
\equiv & (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg\neg(p \vee q) \wedge \neg r) & \text{[por (5) y (4)]} \\
\equiv & (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (p \vee q) \wedge \neg r & \text{[por (5)]} \\
\equiv & \{\{\neg p, r\}, \{\neg q, r\}, \{p, q\}, \{\neg r\}\} &
\end{array}
$$

Una demostración por resolución es

$$
\begin{array}{lll}
1 & \{\neg p, r\} & \\
2 & \{\neg q, r\} & \\
3 & \{p, q\} & \\
4 & \{\neg r\} & \\
5 & \{\neg p\} & \text{Resolvente de } 1 \text{ y } 4 \\
6 & \{\neg q\} & \text{Resolvente de } 2 \text{ y } 4 \\
7 & \{q\} & \text{Resolvente de } 3 \text{ y } 5 \\
8 & \square & \text{Resolvente de } 7 \text{ y } 6
\end{array}
$$

Solución del apartado (b.1): Sea v una valoración. Entonces, $v \models U$ (por ser los elementos de U tautologías), y $v \models A$ (porque $U \models A$). Por tanto, A es una tautología.

Solución del apartado (b.2):

$$
\begin{array}{ll}
 & F \text{ es insatisfacible} \\
\iff & \neg(A \wedge B) \text{ es insatisfacible} \\
\iff & \text{para toda valoración } v,\ v(\neg(A \wedge B)) = 0 \\
\iff & \text{para toda valoración } v,\ v(A \wedge B) = 1 \\
\iff & \text{para toda valoración } v,\ v(A) = v(B) = 1 \\
\iff & A \text{ y } B \text{ contienen ambas un par de literales complementarios} \quad \text{[por ser } A \text{ y } B \text{ cláusulas]}
\end{array}
$$

Ejercicio 8 *Sea*

$$S = \{(\forall x)\neg P(x,x), (\forall x)(\forall y)[P(x,y) \vee P(y,x)], (\forall x)P(x,f(x))\}$$

y sea F la fórmula

$$(\forall x)(\forall y)[P(x,y) \rightarrow (\exists z)[P(x,z) \wedge P(z,y)]].$$

(a) Hállese una forma clausal de F y otra de $\neg F$.

(b) Pruébese, utilizando un modelo de Herbrand, que $S \not\models F$.

Solución:

Solución del apartado (a.1): Cálculo de una forma clausal de F:

$$
\begin{array}{lll}
 & (\forall x)(\forall y)[P(x,y) \rightarrow (\exists z)[P(x,z) \wedge P(z,y)]] & \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg P(x,y) \vee (\exists z)[P(x,z) \wedge P(z,y)]] & \text{[por (4)]} \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)(\exists z)[\neg P(x,y) \vee (P(x,z) \wedge P(z,y))] & \text{[por (18)]} \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)(\exists z)[(\neg P(x,y) \vee P(x,z)) \wedge (\neg P(x,y) \vee P(z,y))] & \text{[por (19)]} \\
\equiv_{sat} & (\forall x)(\forall y)[(\neg P(x,y) \vee P(x,f(x,y))) \wedge (\neg P(x,y) \vee P(f(x,y),y))] & \text{[Skolem } f\text{]} \\
\equiv & \{\{\neg P(x,y), P(x,f(x,y))\}, \{\neg P(x,y), P(f(x,y),y)\}\} &
\end{array}
$$

Solución del apartado (a.2): Cálculo de una forma clausal de $\neg F$:

$$
\begin{array}{lll}
 & \neg(\forall x)(\forall y)[P(x,y) \rightarrow (\exists z)[P(x,z) \wedge P(z,y)]] & \\
\equiv & \neg(\forall x)(\forall y)(\exists z)[\neg P(x,y) \vee (P(x,z) \wedge P(z,y))] & \text{[por (a.1)]} \\
\equiv & (\exists x)(\exists y)(\forall z)\neg(\neg P(x,y) \vee (P(x,z) \wedge P(z,y))) & \text{[por (8) y (9)]} \\
\equiv & (\exists x)(\exists y)(\forall z)[\neg\neg P(x,y) \wedge \neg(P(x,z) \wedge P(z,y))] & \text{[por (6)]} \\
\equiv & (\exists x)(\exists y)(\forall z)[P(x,y) \wedge (\neg P(x,z) \vee \neg P(z,y))] & \text{[por (7) y (5)]} \\
\equiv_{sat} & (\forall z)[P(a,b) \wedge (\neg P(a,z) \vee \neg P(z,b))] & \text{[Skolem } a \text{ y } b\text{]} \\
\equiv & \{\{P(a,b)\}, \{\neg P(a,z), \neg P(z,b)\}\} &
\end{array}
$$

Ejercicio 9 *Se conocen los siguientes hechos:*

1. *Todos los ordenadores son máquinas.*
2. *El TX–150 es un ordenador.*
3. *Félix puede arreglar, o bien estropear, cualquier máquina.*
4. *Cada cosa puede ser arreglada por alguien.*
5. *Las cosas solamente desesperan a quienes no son capaces de arreglarlas.*
6. *El TX–150 desespera a Félix.*
7. *Ninguna máquina puede ser arreglada por sí misma.*

Se pide:

(a) *Formalizar los hechos anteriores utilizando los siguientes símbolos de predicado: $O(x)$: “x es un ordenador”, $M(x)$: “x es una máquina”, $A(x,y)$: “x puede arreglar y”, $E(x,y)$: “x estropea y” y $D(x,y)$: “x desespera a y” . Y a, b como constantes para TX–150 y Félix, respectivamente.*

(b) *Utilizando resolución responder a las siguientes preguntas: ¿Puede arreglar Félix el TX–150? ¿Estropea Félix el TX–150?*

Solución:

Solución del apartado (a): Formalización:

1. Todos los ordenadores son máquinas.

   $(\forall x)[O(x) \rightarrow M(x)]$.

2. El TX–150 es un ordenador.

   $O(a)$.

3. Félix puede arreglar, o bien estropear, cualquier máquina.

   $(\forall x)[M(x) \to A(b,x) \lor E(b,x)]$.

4. Cada cosa puede ser arreglada por alguien.

   $(\forall x)(\exists y)A(y,x)$.

5. Las cosas solamente desesperan a quienes no son capaces de arreglarlas.

   $(\forall x)(\forall y)[D(x,y) \to \neg A(y,x)]$.

6. El TX–150 desespera a Félix.

   $D(a,b)$.

7. Ninguna máquina puede ser arreglada por sí misma.

   $\neg(\exists x)[M(x) \land A(x,x)]$.

Solución del apartado (b): En primer lugar, se calculan formas clausales de las fórmulas anteriores.

$$
\begin{array}{lll}
 & (\forall x)[O(x) \to M(x)] & \\
\equiv & (\forall x)[\neg O(x) \lor M(x)] & \text{[por (4)]} \\
\equiv & \{\{\neg O(x), M(x)\}\} & \\
 & O(a) & \\
\equiv & \{\{O(a)\}\} & \\
 & (\forall x)[M(x) \to A(b,x) \lor E(b,x)] & \\
\equiv & (\forall x)[\neg M(x) \lor A(b,x) \lor E(b,x)] & \text{[por (4)]} \\
\equiv & \{\{\neg M(x), A(b,x), E(b,x)\}\} & \\
 & (\forall x)(\exists y)A(y,x) & \\
\equiv_{sat} & (\forall x)A(f(x),x) & \text{[Skolem } f\text{]} \\
\equiv & \{\{A(f(x),x)\}\} & \\
 & (\forall x)(\forall y)[D(x,y) \to \neg A(y,x)] & \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg D(x,y) \lor \neg A(y,x)] & \text{[por (4)]} \\
\equiv & \{\{\neg D(x,y), \neg A(y,x)\}\} & \\
 & D(a,b) & \\
\equiv & \{\{D(a,b)\}\} & \\
 & \neg(\exists x)[M(x) \land A(x,x)] & \\
\equiv & (\forall x)\neg(M(x) \land A(x,x)) & \text{[por (8)]} \\
\equiv & (\forall x)[\neg M(x) \lor \neg A(x,x)] & \text{[por (5)]} \\
\equiv & \{\{\neg M(x), \neg A(x,x)\}\} &
\end{array}
$$

Las cláusulas obtenidas son

1	$\{\neg O(x), M(x)\}$
2	$\{O(a)\}$
3	$\{\neg M(x), A(b,x), E(b,x)\}$
4	$\{A(f(x), x)\}$
5	$\{\neg D(x,y), \neg A(y,x)\}$
6	$\{D(a,b)\}$
7	$\{\neg M(x), \neg A(x,x)\}$

Vamos a demostrar que Félix no puede arreglar el TX-150. Para ello, suponemos lo contrario, lo que da lugar a la cláusula

8 $A(b,a)$

Una refutación por resolución de las cláusulas anteriores es

5	$\{\neg D(x,y), \neg A(y,x)\}$	
6	$\{D(a,b)\}$	
8	$\{A(b,a)\}$	
9	$\{\neg A(b,a)\}$	Resolvente de 5 y 5
10	$\square$	Resolvente de 9 y 8

Vamos a demostrar que Félix estropea el TX-150. Para ello, suponemos lo contrario, lo que da lugar a la cláusula

11 $\neg E(b,a)$

Una refutación por resolución de la cláusula 11 junto con 1–7 es

1	$\{\neg O(x), M(x)\}$	
2	$\{O(a)\}$	
3	$\{\neg M(x), A(b,x), E(b,x)\}$	
5	$\{\neg D(x,y), \neg A(y,x)\}$	
6	$\{D(a,b)\}$	
10	$\{\neg E(b,a)\}$	
11	$\{M(a)\}$	Resolvente de 1 y 2
12	$\{\neg A(b,a)\}$	Resolvente de 5 y 6
13	$\{A(b,a), E(b,a)\}$	Resolvente de 3 y 11
14	$\{E(b,a)\}$	Resolvente de 13 y 12
15	$\square$	Resolvente de 14 y 10

Examen de Diciembre de 2001

Ejercicio 10 *Sea A la fórmula proposicional*

$$(p \lor q \leftrightarrow \neg r) \land (\neg p \to s) \land (\neg t \to q) \land (s \land t \to u).$$

(a) Pruébese que A es satisfactible.

(b) Demuéstrese por el método de tableros semánticos que $A \models r \to u$.

(c) Pruébese por resolución proposicional que

$$\{p \lor q \leftrightarrow \neg r, \neg p \to s, \neg t \to q, s \land t \to u\} \models r \to u.$$

Solución:

Solución del apartado (a): Vamos a demostrar la satisfacibildad de A mostrando un modelo de A. Sea v una valoración. Para que v verifique las implicaciones de A basta que no verifique sus consecuentes; es decir, $v(s) = 0$, $v(q) = 0$ y $v(u) = 0$. Si $v(q) = 0$, para que v verifique $(p \lor q \leftrightarrow \neg r)$, basta que $v(p) \neq v(r)$ (por ejemplo, $v(p) = 1$ y $v(r) = 0$). Por tanto, la valoración v tal que

$$v(p) = 1, v(q) = 0, v(r) = 0, v(s) = 0 \text{ y } v(u) = 0.$$

es un modelo de A.

Solución del apartado (b): Un tablero semántico de $\{A, \neg(r \to u\}$ se muestra en la Figura 1 (página 20). Puesto que todas sus hojas son cerradas, se tiene que $A \models r \to u$.

Solución del apartado (c): En primer lugar, se calcula formas clausales de las fórmulas de las hipótesis y de la negación de la conclusión:

$$\begin{array}{lll}
 & p \lor q \leftrightarrow \neg r & \\
\equiv & (p \lor q \to \neg r) \land (\neg r \to p \lor q) & \text{[por (1)]} \\
\equiv & (\neg(p \lor q) \lor \neg r) \land (\neg\neg r \lor p \lor q) & \text{[por (2)]} \\
\equiv & ((\neg p \land \neg q) \lor \neg r) \land (r \lor p \lor q) & \text{[por (3) y (5)]} \\
\equiv & ((\neg p \lor \neg r) \land (\neg q \lor \neg r)) \land (r \lor p \lor q) & \text{[por (7)]} \\
\equiv & \{\{\neg p, \neg r\}, \{\neg q, \neg r\}, \{r, p, q\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 & \neg p \to s & \\
\equiv & \neg\neg p \lor s & \text{[por (2)]} \\
\equiv & p \lor s & \text{[por (5)]} \\
\equiv & \{\{p, s\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 & \neg t \to q & \\
\equiv & \neg\neg t \lor q & \text{[por (2)]} \\
\equiv & t \lor q & \text{[por (5)]} \\
\equiv & \{\{t, q\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 & s \land t \to u & \\
\equiv & \neg(s \land t) \lor u & \text{[por (2)]} \\
\equiv & (\neg s \lor \neg t) \lor u & \text{[por (3)]} \\
\equiv & \{\{\neg s, \neg t, u\}\} &
\end{array}$$

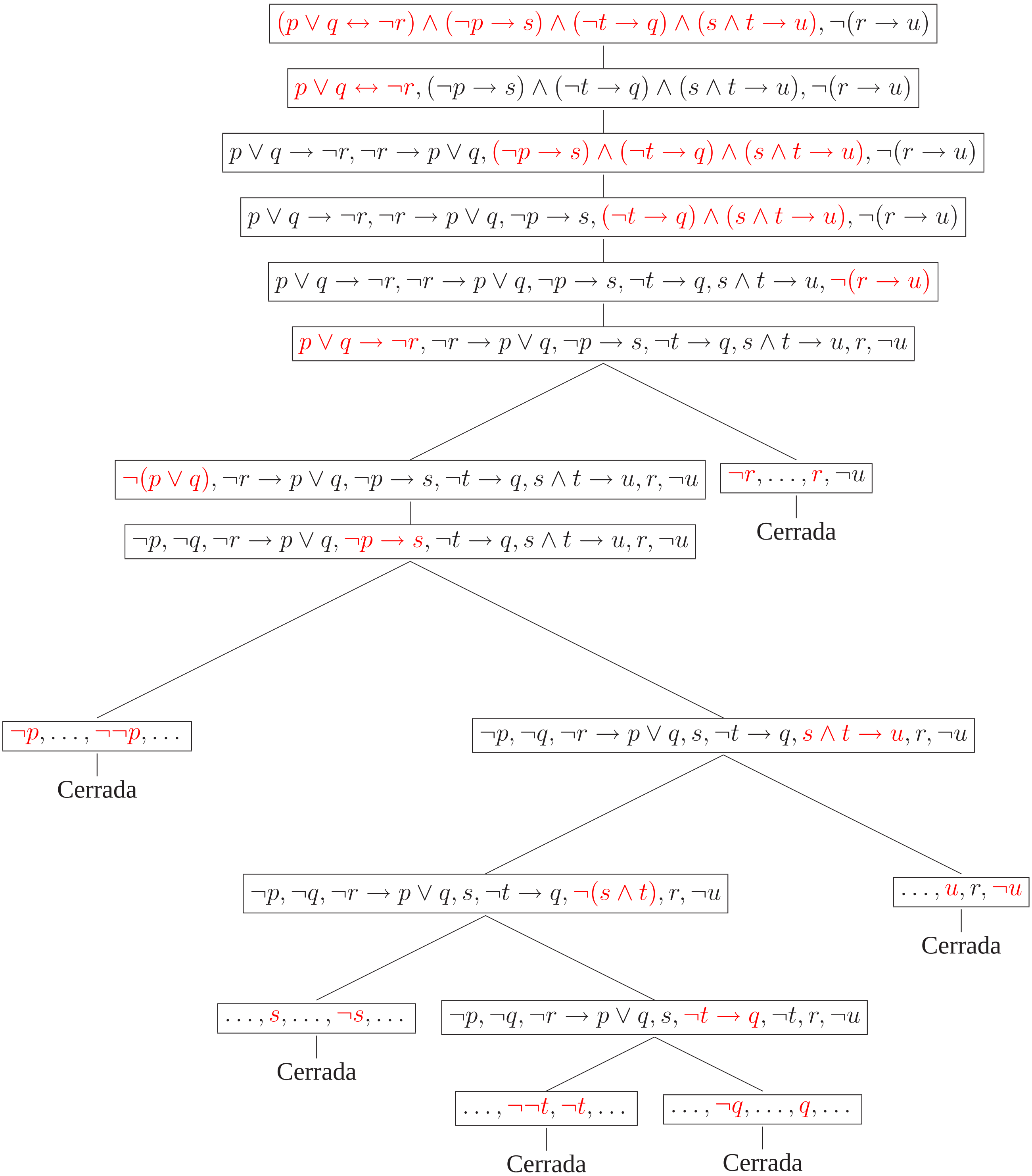


Figura 1: Árbol semántico

$$\begin{array}{lll} & \neg(r \to u) & \\ \equiv & \neg(\neg r \lor u) & \text{[por (2)]} \\ \equiv & \neg\neg r \land \neg u & \text{[por (4)]} \\ \equiv & r \land \neg u & \text{[por (5)]} \\ \equiv & \{\{r\}, \{\neg u\}\} & \end{array}$$

Una resolución de las cláusulas obtenidas es

$$\begin{array}{rll} 1 & \{\neg p, \neg r\} & \\ 2 & \{\neg q, \neg r\} & \\ 3 & \{r, p, q\} & \\ 4 & \{p, s\} & \\ 5 & \{t, q\} & \\ 6 & \{\neg s, \neg t, u\} & \\ 7 & \{r\} & \\ 8 & \{\neg u\} & \\ 9 & \{\neg q\} & \text{Resolvente de } 7 \text{ y } 2 \\ 10 & \{\neg p\} & \text{Resolvente de } 7 \text{ y } 1 \\ 11 & \{\neg s, \neg t\} & \text{Resolvente de } 8 \text{ y } 6 \\ 12 & \{t\} & \text{Resolvente de } 9 \text{ y } 5 \\ 13 & \{s\} & \text{Resolvente de } 10 \text{ y } 4 \\ 14 & \{\neg t\} & \text{Resolvente de } 11 \text{ y } 13 \\ 15 & \square & \text{Resolvente de } 14 \text{ y } 12 \end{array}$$

Ejercicio 11 *Sea S el conjunto formado por las siguientes fórmulas:*

$F_1 : P(a) \land (\forall x)[P(x) \to Q(f(x), x)]$
$F_2 : (\forall x)(\forall y)[Q(x, y) \to (R(f(x)) \land \neg R(f(f(x))))]$
$F_3 : (\forall x)[P(x) \lor R(x)]$
$F_4 : (\forall x)\neg(P(x) \land R(x))$

Se pide:

(a) Probar mediante resolución que $S \models P(f(f(f(a))))$.

(b) Probar, utilizando un modelo de Herbrand, que $S \not\models (\forall x)[Q(f(x), x) \to P(x)]$.

Solución:

Solución del apartado (a): En primer lugar, se calculan formas clausales de las hipótesis y de la negación de la conclusión:

$$\begin{array}{lll} F_1: & P(a) \land (\forall x)[P(x) \to Q(f(x), x)] & \\ \equiv & P(a) \land (\forall x)[\neg P(x) \lor Q(f(x), x)] & \text{[por (2)]} \\ \equiv & (\forall x)[P(a) \land (\neg P(x) \lor Q(f(x), x))] & \text{[por (15)]} \\ \equiv & \{\{P(a)\}, \{\neg P(x), Q(f(x), x)\}\} & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} F_2: & (\forall x)(\forall y)[Q(x, y) \to (R(f(x)) \land \neg R(f(f(x))))] & \\ \equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg Q(x, y) \lor (R(f(x)) \land \neg R(f(f(x))))] & \text{[por (2)]} \\ \equiv & (\forall x)(\forall y)[(\neg Q(x, y) \lor R(f(x))) \land (\neg Q(x, y) \lor \neg R(f(f(x))))] & \text{[por (19)]} \\ \equiv & \{\{\neg Q(x, y), R(f(x))\}, \{\neg Q(x, y), \neg R(f(f(x)))\}\} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
F_3: & (\forall x)[P(x) \vee R(x)] \\
\equiv & \{\{P(x), R(x)\}\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
F_4: & (\forall x)\neg(P(x) \wedge R(x)) & \\
\equiv & (\forall x)[\neg P(x) \vee \neg R(x)] & \text{[por (5)]} \\
\equiv & \{\{\neg P(x), \neg R(x)\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 & \neg P(f(f(f(a)))) \\
\equiv & \{\{\neg P(f(f(f(a))))\}\}
\end{array}$$

Una resolución de las cláusulas obtenidas es

$$\begin{array}{rll}
1 & \{P(a)\} & \\
2 & \{\neg P(x), Q(f(x), x)\} & \\
3 & \{\neg Q(x, y), R(f(x))\} & \\
4 & \{\neg Q(x, y), \neg R(f(f(x)))\} & \\
5 & \{P(x), R(x)\} & \\
6 & \{\neg P(x), \neg R(x)\} & \\
7 & \{\neg P(f(f(f(a))))\} & \\
8 & \{R(f(f(f(a))))\} & \text{Resolvente de } 7 \text{ y } 5 \\
9 & \{\neg Q(f(a), y)\} & \text{Resolvente de } 8 \text{ y } 4 \\
10 & \{\neg P(a)\} & \text{Resolvente de } 9 \text{ y } 2 \\
11 & \square & \text{Resolvente de } 10 \text{ y } 1
\end{array}$$

Solución del apartado (b): Vamos a obtener consecuencias que nos permitan contruir el modelo de Herbrand.

$$\begin{array}{rll}
1 & (\forall x)[P(x) \to R(f(f(x)))] & \text{[por } F_1 \text{ y } F_2\text{]} \\
2 & (\forall x)(\forall y)[Q(x, y) \to P(f(f(x)))] & \text{[por } F_2 \text{ y } F_3\text{]} \\
3 & (\forall x)[R(x) \vee R(f(f(x)))] & \text{[por } 1 \text{ y } F_3\text{]} \\
4 & P(a) & \text{[por } F_1\text{]} \\
5 & Q(f(a), a) & \text{[por } 4 \text{ y } F_1\text{]} \\
6 & \neg R(f(f(f(a)))) & \text{[por } 5 \text{ y } F_2\text{]} \\
7 & R(f(a)) & \text{[por 6 y 3]} \\
8 & R(f(f(a))) & \text{[por 1 y 4]} \\
9 & P(f(f(f(a)))) & \text{[por 2 y 5]} \\
10 & Q(f(f(f(f(a)))), f(f(f(a)))) & \text{[por } 9 \text{ y } F_1\text{]} \\
11 & \neg R(f(f(f(f(f(f(a))))))) & \text{[por } 10 \text{ y } F_2\text{]} \\
12 & R(f(f(f(f(a))))) & \text{[por 11 y 3]} \\
13 & R(f(f(f(f(f(a)))))) & \text{[por 1 y 9]}
\end{array}$$

Se observa que la ley de formación es

$$P(a), Q(f(a), a), R(f(a)), R(f(f(a))),$$
$$P(f(f(f(a)))), Q(f(f(f(f(a)))), f(f(f(a)))), R(f(f(f(f(a))))), R(f(f(f(f(f(a)))))), \dots$$

Sea

$$I_1 = \{P(f^{3n}(a)), Q(f^{3n+1}(a), f^{3n}(a)), R(f^{3n+1}(a)), R(f^{3n+2}(a)) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Se comprueba fácilmente que $I_1 \models S$ e $I_1 \models (\forall x)[Q(f(x), x) \to P(x)]$. Para extender I_1 a un modelo de S en el que no se verifique $(\forall x)[Q(f(x), x) \to P(x)]$, introducimos una nueva variable b y suponemos que

$Q(f(b), b)$. De manera análoga a la anterior, se obtiene

$$\begin{array}{l}
Q(f(b), b)\\
R(f(f(b)))\\
P(f(f(f(b))))\\
Q(f(f(f(f(b)))), f(f(f(b))))\\
R(f(f(f(f(f(b))))))\\
R(f(b))\\
P(f(f(f(f(f(f(b)))))))\\
Q(f(f(f(f(f(f(f(b))))))), f(f(f(f(f(f(b)))))))\\
P(f(f(f(f(f(f(f(f(f(b))))))))))\\
R(f(f(f(f(b)))))\\
R(f(f(f(f(f(f(f(f(b)))))))))
\end{array}$$

Sea

$$I_2 = I_1 \cup \{P(f^{3(n+1)}(b)), Q(f^{3n+1}(b), f^{3n}(b)), R(f^{3n+1}(b)), R(f^{3n+2}(b)) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Se comprueba fácilmente que $I_2 \models S$ e $I_2 \not\models (\forall x)[Q(f(x), x) \to P(x)]$.

Ejercicio 12 *Este ejercicio tiene dos apartados.*

(a) Hállense las formas prenexa conjuntiva, de Skolem y clausal de la fórmula:

$$(\exists x)(\exists y)(\forall z)[(\forall v)[Q(x, v) \vee R(x, y)] \to \neg(\exists v)\neg(\exists u)[Q(x, v) \wedge \neg R(x, u)]].$$

(b) Sean A y B fórmulas proposicionales y C una tautología. Pruébese que son equivalentes:

(1) $\models A \to (B \wedge C)$.

(2) Para cada valoración v , si $v \models A \wedge C$ entonces $v \models B$.

Solución del apartado (a):

1.– Forma prenexa conjuntiva:

$$\begin{array}{lll}
 & (\exists x)(\exists y)(\forall z)[(\forall v)[Q(x, v) \vee R(x, y)] \to \neg(\exists v)\neg(\exists u)[Q(x, v) \wedge \neg R(x, u)]] & \\
\equiv & (\exists x)(\exists y)(\forall z)[(\forall v)[Q(x, v) \vee R(x, y)] \to \neg(\exists w)\neg(\exists u)[Q(x, w) \wedge \neg R(x, u)]] & \text{[por rectificación]}\\
\equiv & (\exists x)(\exists y)(\forall z)[\neg(\forall v)[Q(x, v) \vee R(x, y)] \vee \neg(\exists w)\neg(\exists u)[Q(x, w) \wedge \neg R(x, u)]] & \text{[por (4)]}\\
\equiv & (\exists x)(\exists y)(\forall z)[(\exists v)\neg(Q(x, v) \vee R(x, y)) \vee (\forall w)\neg\neg(\exists u)[Q(x, w) \wedge \neg R(x, u)]] & \text{[por (8) y (9)]}\\
\equiv & (\exists x)(\exists y)(\forall z)[(\exists v)(\neg Q(x, v) \wedge \neg R(x, y)) \vee (\forall w)(\exists u)[Q(x, w) \wedge \neg R(x, u)]] & \text{[por (6) y (7)]}\\
\equiv & (\exists x)(\exists y)(\forall z)(\exists v)(\forall w)[(\neg Q(x, v) \wedge \neg R(x, y)) \vee (\exists u)[Q(x, w) \wedge \neg R(x, u)]] & \text{[por (16)]}\\
\equiv & (\exists x)(\exists y)(\forall z)(\exists v)(\forall w)(\exists u)[(\neg Q(x, v) \wedge \neg R(x, y)) \vee (Q(x, w) \wedge \neg R(x, u))] & \text{[por (18)]}\\
\equiv & (\exists x)(\exists y)(\forall z)(\exists v)(\forall w)(\exists u)[\ (\neg Q(x, v) \vee Q(x, w)) \wedge (\neg Q(x, v) \vee \neg R(x, u)) \wedge & \text{[por (19) y (20)]}\\
 & \qquad (\neg R(x, y) \vee Q(x, w)) \wedge (\neg R(x, y) \vee \neg R(x, u))] &
\end{array}$$

2.– Forma de Skolem:

$$\begin{array}{lll}
 & (\exists x)(\exists y)(\forall z)(\exists v)(\forall w)(\exists u)[\ (\neg Q(x, v) \vee Q(x, w)) \wedge (\neg Q(x, v) \vee \neg R(x, u)) \wedge & \\
 & \qquad (\neg R(x, y) \vee Q(x, w)) \wedge (\neg R(x, y) \vee \neg R(x, u))] & \\
\equiv_{sat} & (\exists y)(\forall z)(\exists v)(\forall w)(\exists u)[\ (\neg Q(a, v) \vee Q(a, w)) \wedge (\neg Q(a, v) \vee \neg R(a, u)) \wedge & \text{[Skolem } a\text{]}\\
 & \qquad (\neg R(a, y) \vee Q(a, w)) \wedge (\neg R(a, y) \vee \neg R(a, u))] & \\
\equiv_{sat} & (\forall z)(\exists v)(\forall w)(\exists u)[\ (\neg Q(a, v) \vee Q(a, w)) \wedge (\neg Q(a, v) \vee \neg R(a, u)) \wedge & \text{[Skolem } b\text{]}\\
 & \qquad (\neg R(a, b) \vee Q(a, w)) \wedge (\neg R(a, b) \vee \neg R(a, u))] &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \equiv_{sat} & (\forall z)(\forall w)(\exists u)[\ (\neg Q(a,f(z)) \vee Q(a,w)) \wedge (\neg Q(a,f(z)) \vee \neg R(a,u)) \wedge & \text{[Skolem } f\text{]} \\ & \quad (\neg R(a,b) \vee Q(a,w)) \wedge (\neg R(a,b) \vee \neg R(a,u))] & \\ \equiv_{sat} & (\forall z)(\forall w)[\ (\neg Q(a,f(z)) \vee Q(a,w)) \wedge (\neg Q(a,f(z)) \vee \neg R(a,g(z,w))) \wedge & \text{[Skolem } g\text{]} \\ & \quad (\neg R(a,b) \vee Q(a,w)) \wedge (\neg R(a,b) \vee \neg R(a,g(z,w)))] & \end{array}$$

3.– Forma clausal:

$$\begin{array}{ll} & (\forall z)(\forall w)[\ (\neg Q(a,f(z)) \vee Q(a,w)) \wedge (\neg Q(a,f(z)) \vee \neg R(a,g(z,w))) \wedge \\ & \quad (\neg R(a,b) \vee Q(a,w)) \wedge (\neg R(a,b) \vee \neg R(a,g(z,w)))] \\ \equiv & \{\ \{\neg Q(a,f(z)), Q(a,w)\}, \\ & \ \ \{\neg Q(a,f(z)), \neg R(a,g(z,w))\}, \\ & \ \ \{\neg R(a,b), Q(a,w)\}, \\ & \ \ \{\neg R(a,b), \neg R(a,g(z,w))\}\ \} \end{array}$$

Solución del apartado (b): [(1) $\Longrightarrow$ (2)] Sea v una valoración. Entonces,

$$\begin{array}{lll} & v \models A \wedge C & \\ \Longrightarrow & v \models A & \\ \Longrightarrow & v \models B \wedge C & \text{[por (1)]} \\ \Longrightarrow & v \models B & \end{array}$$

[(2) $\Longrightarrow$ (1)] Sea v una valoración. Entonces,

$$\begin{array}{lll} & v \models A & \\ \Longrightarrow & v \models A \wedge C & \text{[por ser } C \text{ tautología]} \\ \Longrightarrow & v \models B & \text{[por (2)]} \\ \Longrightarrow & v \models B \wedge C & \text{[por ser } C \text{ tautología]} \end{array}$$

Luego, $v \models A \to B \wedge C$ y, por tanto, $\models A \to B \wedge C$.

Examen de Junio de 2002

Ejercicio 13 *Consideremos la fórmula proposicional*

$$A : (r \to p) \land (\neg r \to q \lor s) \to p \lor q \lor s$$

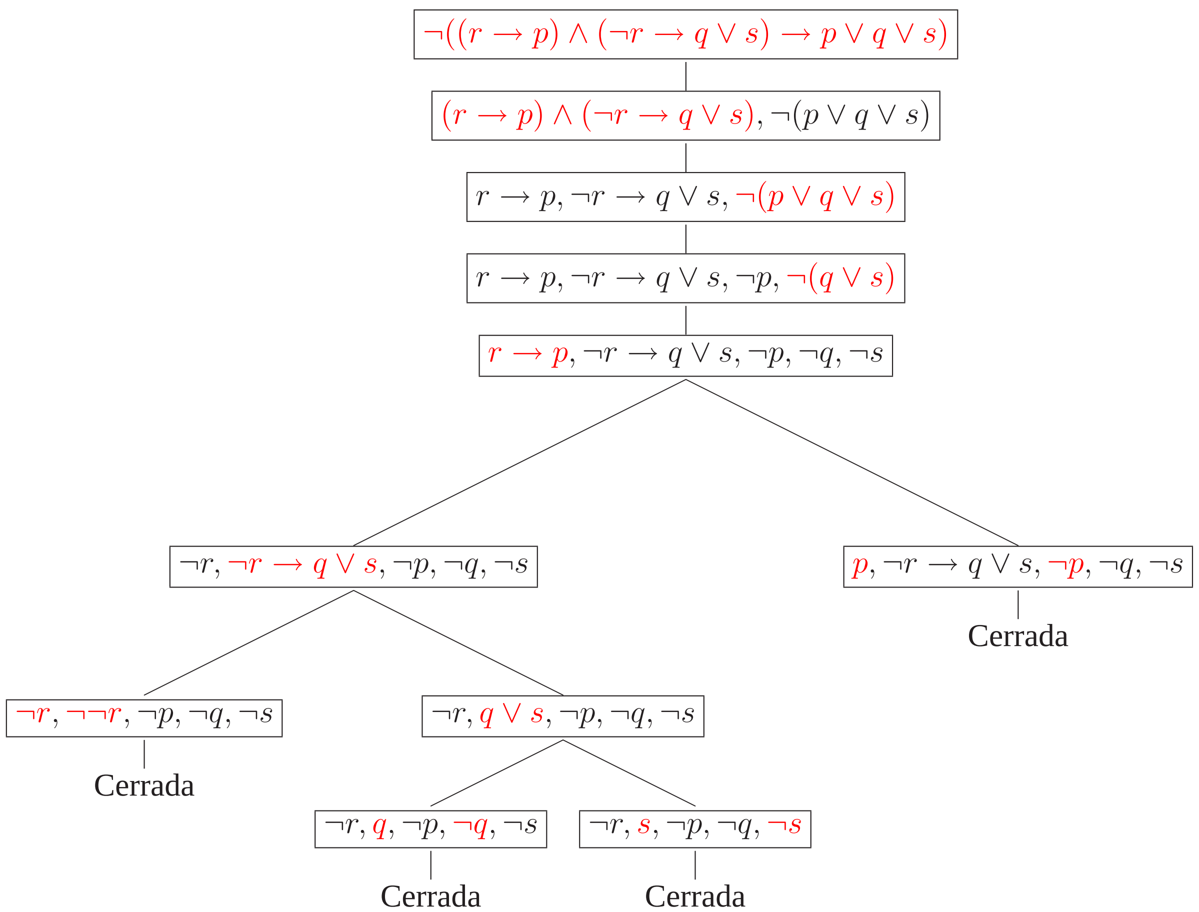
y el conjunto de fórmulas

$$U = \{r \leftrightarrow p \lor q, s \to p, \neg s \land \neg r \to s \lor t\}.$$

1. *Pruébese, mediante tableros semánticos, que A es una tautología.*
2. *Pruébese, razonadamente, que U es consistente, mostrando para ello un modelo de U.*
3. *Pruébese, mediante resolución lineal, que $U \models \neg p \to (q \lor t)$.*
4. *Sea B la fórmula anterior $\neg p \to (q \lor t)$. ¿Podemos eliminar alguna fórmula de U de manera que la fórmula B sea consecuencia lógica del conjunto de fórmulas restante?*

Solución:

Solución del apartado 1: El tablero semántico de $\neg A$ es



Como todas las hojas son cerradas, A es una tautología.

Solución del apartado 2: Sea v una valoración. Para que v sea modelo de las dos implicaciones de U basta que sus consecuentes sean falsos en v; es decir, $v(p) = 0$ y $v(s) = v(t) = 0$. Sean v tal que

$v(p) = 0$, para que v sea modelo de la equivalencia, basta que $v(r) = v(q)$. Por tanto, una valoración v tal que $v(p) = 0$, $v(q) = 0$, $v(r) = 0$, $v(s) = 0$ y $v(t) = 0$ es un modelo de U.

Solución del apartado 3: En primer lugar, calculamos formas clausales de las fórmulas de U y de la negación de la conclusión:

$$\begin{array}{lll}
& r \leftrightarrow p \lor q & \\
\equiv & (r \to p \lor q) \land (p \lor q \to r) & \text{[por (1)]} \\
\equiv & (\neg r \lor (p \lor q)) \land (\neg(p \lor q) \lor r) & \text{[por (2)]} \\
\equiv & (\neg r \lor (p \lor q)) \land ((\neg p \land \neg q) \lor r) & \text{[por (4)]} \\
\equiv & (\neg r \lor p \lor q) \land ((\neg p \lor r) \land (\neg q \lor r)) & \text{[por (7)]} \\
\equiv & \{\{\neg r, p, q\}, \{\neg p, r\}, \{\neg q, r\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
& s \to p & \\
\equiv & \neg s \lor p & \text{[por (2)]} \\
\equiv & \{\{\neg s, p\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
& \neg s \land \neg r \to s \lor t & \\
\equiv & \neg(\neg s \land \neg r) \lor (s \lor t) & \text{[por (2)]} \\
\equiv & (\neg\neg s \lor \neg\neg r) \lor (s \lor t) & \text{[por (3)]} \\
\equiv & (s \lor r) \lor (s \lor t) & \text{[por (5)]} \\
\equiv & \{\{s, r, t\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
& \neg(\neg p \to (q \lor t)) & \\
\equiv & \neg(\neg\neg p \lor (q \lor t)) & \text{[por (2)]} \\
\equiv & \neg(p \lor (q \lor t)) & \text{[por (5)]} \\
\equiv & \neg p \land \neg(q \lor t) & \text{[por (4)]} \\
\equiv & \neg p \land (\neg q \land \neg t) & \text{[por (4)]} \\
\equiv & \{\{\neg p\}, \{\neg q\}, \{\neg t\}\} &
\end{array}$$

Una resolución lineal con las cláusulas obtenidas es

1	$\{\neg r, p, q\}$	
2	$\{\neg p, r\}$	
3	$\{\neg q, r\}$	
4	$\{\neg s, p\}$	
5	$\{s, r, t\}$	
6	$\{\neg p\}$	
7	$\{\neg q\}$	
8	$\{\neg t\}$	
9	$\{s, r\}$	Resolvente de 5 y 8
10	$\{r, p\}$	Resolvente de 9 y 4
11	$\{p, q\}$	Resolvente de 10 y 1
12	$\{p\}$	Resolvente de 11 y 7
13	$\square$	Resolvente de 12 y 6

Solución del apartado 4: Sean

$F_1 : r \leftrightarrow p \lor q$
$F_2 : s \to p$
$F_3 : \neg s \land \neg r \to s \lor t$

las fórmulas de U. Veamos que no puede eliminarse ninguna sin perder la consecuencia:

- $\{F_2, F_3\} \not\models B$: Sea v_1 tal que

  $v_1(p)0 =$, $v_1(q) = 0$, $v_1(r) = 1$, $v_1(s) = 0$ y $v_1(t) = 0$.

  Entonces, $v_1(F_2) = v_1(F_3) = 1$ y $v_1(B) = 0$.

- $\{F_1, F_3\} \not\models B$: Sea v_2 tal que

  $v_2(p)0 =$, $v_2(q) = 0$, $v_2(r) = 0$, $v_2(s) = 1$ y $v_2(t) = 0$.

  Entonces, $v_2(F_1) = v_2(F_3) = 1$ y $v_2(B) = 0$.

- $\{F_1, F_2\} \not\models B$: Sea v_3 tal que

  $v_3(p)0 =$, $v_3(q) = 0$, $v_3(r) = 0$, $v_3(s) = 0$ y $v_3(t) = 0$.

  Entonces, $v_3(F_1) = v_3(F_2) = 1$ y $v_3(B) = 0$.

Ejercicio 14 *En cierto país oriental se ha celebrado la fase final del campeonato mundial de fútbol. Cierto diario deportivo ha publicado las siguientes estadísticas de tan magno acontecimiento:*

- *A todos los porteros que no vistieron camiseta negra les marcó un gol algún delantero europeo.*
- *Algún portero jugó con botas blancas y sólo le marcaron goles jugadores con botas blancas.*
- *Ningún portero se marcó un gol a sí mismo.*
- *Ningún jugador con botas blancas vistió camiseta negra.*

Se pide:

1. *Formalizar los enunciados anteriores en un lenguaje de primer orden usando los siguientes símbolos de predicado: $P(x)$: "x es portero", $D(x)$: "x es delantero europeo", $N(x)$: "x viste camiseta negra", $B(x)$: "x juega con botas blancas", $M(x,y)$: "x marcó un gol a y".*
2. *Obtener una forma clausal para el conjunto de fórmulas del apartado anterior.*
3. *Probar, mediante resolución, que algún delantero europeo jugó con botas blancas.*

Solución:

Solución del apartado 1:

- A todos los porteros que no vistieron camiseta negra les marcó un gol algún delantero europeo.

  $(\forall x)[P(x) \land \neg N(x) \to (\exists y)[D(y) \land M(y,x)]]$.

- Algún portero jugó con botas blancas y sólo le marcaron goles jugadores con botas blancas.

  $(\exists x)[P(x) \land B(x) \land (\forall y)[M(y,x) \to B(y)]]$.

- Ningún portero se marcó un gol a sí mismo.

  $\neg(\exists x)[P(x) \land M(x,x)]$.

- Ningún jugador con botas blancas vistió camiseta negra.

$$\neg(\exists x)[B(x) \wedge N(x)]$$

Solución del apartado 2: Cálculo de formas clausales:

$$\begin{array}{lll}
 & (\forall x)[P(x) \wedge \neg N(x) \rightarrow (\exists y)[D(y) \wedge M(y,x)]] & \\
\equiv & (\forall x)[\neg(P(x) \wedge \neg N(x)) \vee (\exists y)[D(y) \wedge M(y,x)]] & \text{[por (2)]} \\
\equiv & (\forall x)[(\neg P(x) \vee \neg\neg N(x)) \vee (\exists y)[D(y) \wedge M(y,x)]] & \text{[por (5)]} \\
\equiv & (\forall x)[(\neg P(x) \vee N(x)) \vee (\exists y)[D(y) \wedge M(y,x)]] & \text{[por (7)]} \\
\equiv & (\forall x)(\exists y)[(\neg P(x) \vee N(x)) \vee (D(y) \wedge M(y,x))] & \text{[por (18)]} \\
\equiv & (\forall x)(\exists y)[((\neg P(x) \vee N(x)) \vee D(y)) \wedge ((\neg P(x) \vee N(x)) \vee M(y,x))] & \text{[por (19)]} \\
\equiv_{sat} & (\forall x)[((\neg P(x) \vee N(x)) \vee D(f(x))) \wedge ((\neg P(x) \vee N(x)) \vee M(f(x),x))] & \text{[por Skolem]} \\
\equiv & \{\{\neg P(x), N(x), D(f(x))\}, \{\neg P(x), N(x), M(f(x),x)\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 & (\exists x)[P(x) \wedge B(x) \wedge (\forall y)[M(y,x) \rightarrow B(y)]] & \\
\equiv & (\exists x)[P(x) \wedge B(x) \wedge (\forall y)[\neg M(y,x) \vee B(y)]] & \text{[por (2)]} \\
\equiv & (\exists x)(\forall y)[P(x) \wedge B(x) \wedge (\neg M(y,x) \vee B(y))] & \text{[por (15)]} \\
\equiv_{sat} & (\forall y)[P(a) \wedge B(a) \wedge (\neg M(y,a) \vee B(y))] & \text{[por Skolem]} \\
\equiv & \{\{P(a)\}, \{B(a)\}, \{\neg M(y,a), B(y)\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 & \neg(\exists x)[P(x) \wedge M(x,x)] & \\
\equiv & (\forall x)\neg(P(x) \wedge M(x,x)) & \text{[por (9)]} \\
\equiv & (\forall x)[\neg P(x) \vee \neg M(x,x)] & \text{[por (5)]} \\
\equiv & \{\{\neg P(x), \neg M(x,x)\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 & \neg(\exists x)[B(x) \wedge N(x)] & \\
\equiv & (\forall x)\neg(B(x) \wedge N(x)) & \text{[por (9)]} \\
\equiv & (\forall x)[\neg B(x) \vee \neg N(x)] & \text{[por (5)]} \\
\equiv & \{\{\neg B(x), \neg N(x)\}\} &
\end{array}$$

Solución del apartado 3: Para demostrar que "algún delantero europeo jugó con botas blancas" se calcula una forma clausal de su negación:

$$\begin{array}{lll}
 & \neg(\exists x)[D(x) \wedge B(x)] & \\
\equiv & (\forall x)\neg(D(x) \wedge B(x)) & \text{[por (9)]} \\
\equiv & (\forall x)[\neg D(x) \vee \neg B(x)] & \text{[por (5)]} \\
\equiv & \{\{\neg D(x), \neg B(x)\}\} &
\end{array}$$

Una refutación por resolución de las cláusulas obtenidas es

1	$\{\neg P(x), N(x), D(f(x))\}$	
2	$\{\neg P(x), N(x), M(f(x), x)\}$	
3	$\{P(a)\}$	
4	$\{B(a)\}$	
5	$\{\neg M(y, a), B(y)\}$	
6	$\{\neg P(x), \neg M(x, x)\}$	
7	$\{\neg B(x), \neg N(x)\}$	
8	$\{\neg D(x), \neg B(x)\}$	
9	$\{\neg D(x), \neg M(x, a)\}$	Resolvente de 8 y 5 con $\sigma = [y/x]$
10	$\{\neg D(f(a)), \neg P(a), N(a)\}$	Resolvente de 9 y 2 con $\theta_2 = [x/y]$ y $\sigma = [y/a, x/f(a)]$
11	$\{\neg D(f(a)), N(a)\}$	Resolvente de 10 y 3
12	$\{\neg P(a), N(a)\}$	Resolvente de 11 y 1
13	$\{N(a)\}$	Resolvente de 12 y 3
14	$\{\neg B(a)\}$	Resolvente de 13 y 7
15	$\square$	Resolvente de 14 y 4

Ejercicio 15 *Este ejercicio tiene dos apartados.*

1. *Consideremos el lenguaje de primer orden $L_1 = \{P, f\}$ y las fórmulas de L_1:*

   $F_1 : (\forall x)(\exists y)P(x, f(y))$, $F_2 : (\exists y)(\forall x)P(x, f(y))$ *y* $F_3 : (\exists y)(\forall x)P(x, y)$.

   (a) Hállese una L_1 estructura, $\mathcal{I}$, tal que $\mathcal{I} \models F_1$ pero $\mathcal{I} \not\models F_2$.

   (b) Hállese una L_1 estructura, $\mathcal{I}'$, tal que $\mathcal{I}' \models F_3$ pero $\mathcal{I}' \not\models F_2$.

2. *Consideremos ahora el lenguaje $L_2 = \{a, b, P, Q\}$ y la fórmula, F, siguiente:*

   $(\forall x)(\exists y)[P(x, y) \wedge \neg Q(x, a)]$.

   Hállese un modelo de Herbrand de F.

Solución:

Solución del apartado (1a): Sea $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{1, 2\}$, $f^I = \{(1, 1), (2, 2)\}$ (es decir, la identidad en U) y $P^I = \{(1, 1), (2, 2)\}$ (es decir, la igualdad en U). Entonces, $\mathcal{I} \models F_1$ pero $\mathcal{I} \not\models F_2$.

Solución del apartado (1b): Sea $\mathcal{I}' = (U', I')$ con $U' = \{1, 2\}$, $f^{I'} = \{(1, 2), (2, 2)\}$ (es decir, la constante 2 en U) y $P^{I'} = \{(1, 2), (2, 2)\}$ (es decir, la relación menor o igual en U). Entonces, $\mathcal{I}' \models F_3$ pero $\mathcal{I}' \not\models F_2$.

Solución del apartado (2a): El universo de Herbrand de L_2 es $\text{UH} = \{a, b\}$. Un modelo de Herbrand de F es $I = \{P(a, a), P(a, b), P(b, a), P(b, b)\}$.

Examen de Septiembre de 2002

Ejercicio 16 *Sean* $A : \neg r \to s \wedge \neg u$, $B : (r \vee s) \wedge (u \to r)$ *y* U *el conjunto de fórmulas:*

$$U = \{q \vee r \vee s, r \to q \vee t, q \to \neg p, t \to u, u \to \neg s, p\}$$

(a) Pruébese, mediante tableros semánticos que A *y* B *son lógicamente equivalentes.*

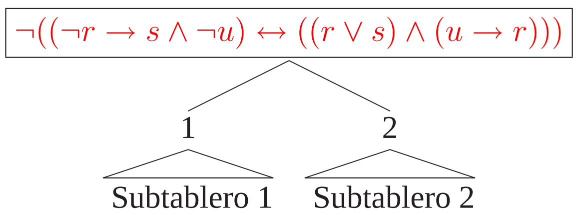
(b) Hállense, razonadamente, todos los modelos de U. *¿Es* U *consistente?*

(c) Pruébese, mediante resolución lineal, que la fórmula A *es consecuencia lógica de* U.

(d) Decídase razonadamente si la fórmula $\neg B$ *es, o no, consecuencia lógica de* U.

Solución:

Solución del apartado (a): El tablero semántico de $\neg(A \leftrightarrow B)$ es



donde el subtablero 1 se muestra en la Figura 2 (página 30) y el subtablero 2 en la Figura 3 (página 31)

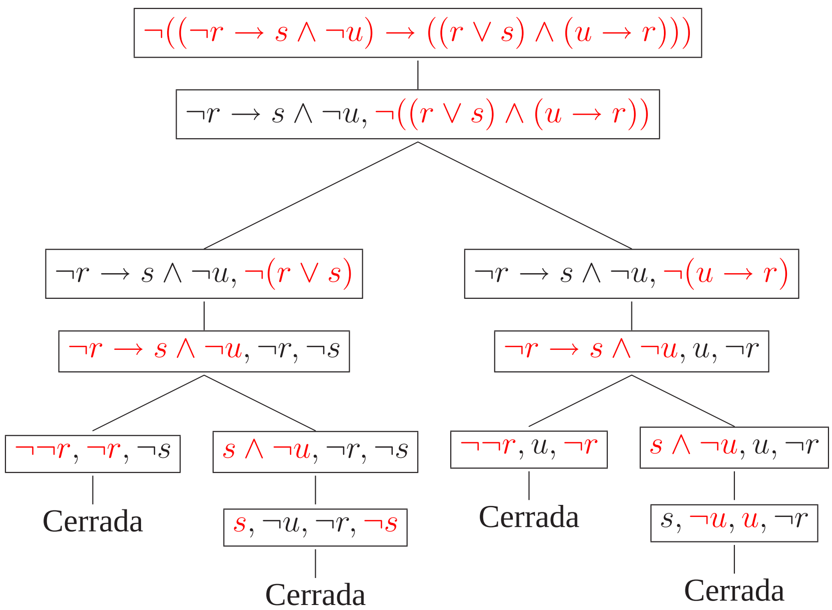


Figura 2: Subtablero 1

Al tener todas sus hojas cerradas, A y B son equivalentes.

Solución del apartado (b): Consideremos las fórmulas de U:

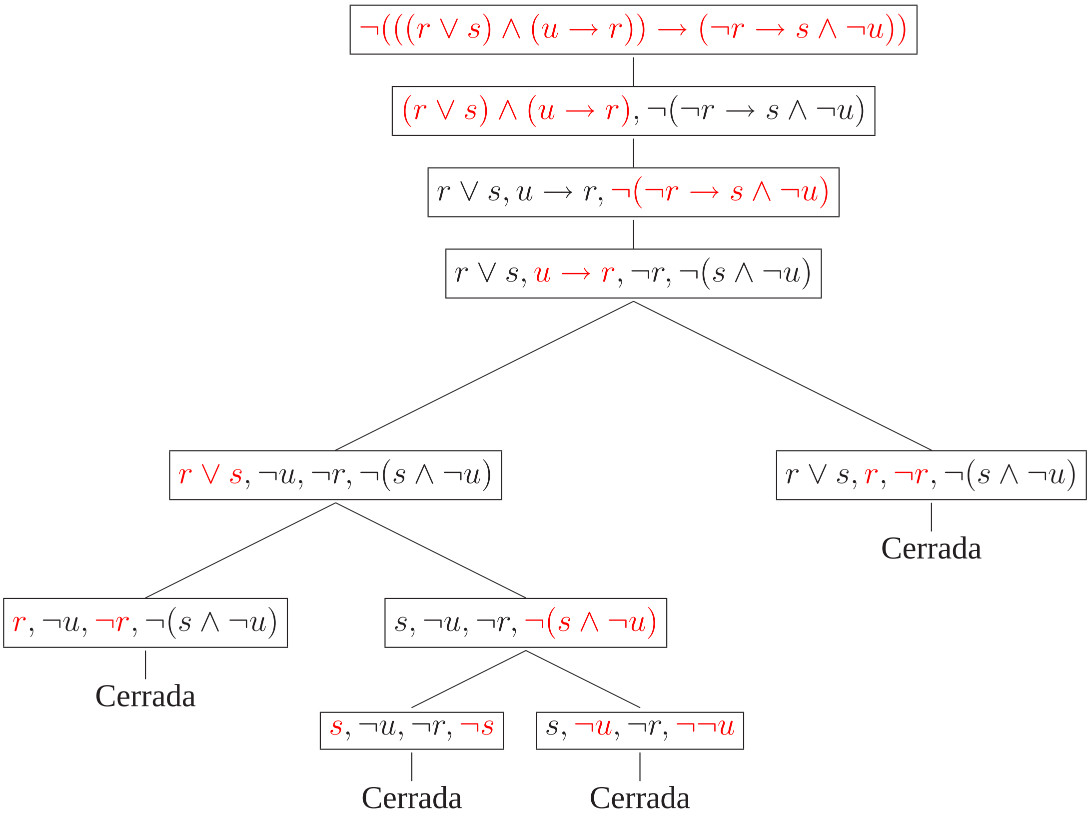


Figura 3: Subtablero 2

$$
\begin{aligned}
F_1 &: \quad q \vee r \vee s \\
F_2 &: \quad r \rightarrow q \vee t \\
F_3 &: \quad q \rightarrow \neg p \\
F_4 &: \quad t \rightarrow u \\
F_5 &: \quad u \rightarrow \neg s \\
F_6 &: \quad p
\end{aligned}
$$

Sea v un modelo de U. Por F_6, se tiene

$$v(p) = 1 \tag{1}$$

Por (1) y F_3,

$$v(q) = 0 \tag{2}$$

Por (2) y F_1,

$$v(r \vee s) = 1 \tag{3}$$

Por (3), se distingue dos casos. En el primer caso,

$$v(r) = 1 \tag{4}$$

Por (4) F_2 y (2),

$$v(t) = 1 \tag{5}$$

Por (5) y F_4,

$$v(u) = 1 \tag{6}$$

Por (6) y F_5,

$$v(s) = 0 \tag{7}$$

Por tanto, hemos encontrado un modelo v_1 tal que

$$v_1(p) = 1, v_1(q) = 0, v_1(r) = 1, v_1(s) = 0, v_1(t) = 1, v_1(u) = 1$$

En el segundo caso,

$$v(r) = 0 \tag{4'}$$

Por (4') y (3),

$$v(s) = 1 \tag{5'}$$

Por (5') y F_5,

$$v(u) = 0 \tag{6'}$$

Por (6') y F_4,

$$v(t) = 0 \tag{7'}$$

Por tanto, hemos encontrado otro modelo v_2 tal que

$$v_2(p) = 1, v_2(q) = 0, v_2(r) = 0, v_2(s) = 1, v_2(t) = 0, v_2(u) = 0$$

Puesto que U tiene modelos, es consistente.

Solución del apartado 3: En primer lugar, calculamos las formas clausales de las fórmulas de U y de la fórmula $\neg A$:

$$\begin{array}{lll}
F_1 : q \lor r \lor s & \equiv \{\{q, r, s\}\} & \\
F_2 : r \to q \lor t & \equiv \neg r \lor q \lor t & \text{[por (2)]} \\
& \equiv \{\{\neg r, q, t\}\} & \\
F_3 : q \to \neg p & \equiv \neg q \lor \neg p & \text{[por (2)]} \\
& \equiv \{\{\neg q, \neg p\}\} & \\
F_4 : t \to u & \equiv \neg t \lor u & \text{[por (2)]} \\
& \equiv \{\{\neg t, u\}\} & \\
F_5 : u \to \neg s & \equiv \neg u \lor \neg s & \text{[por (2)]} \\
& \equiv \{\{\neg u, \neg s\}\} & \\
F_6 : p & \equiv \{\{p\}\} & \\
\neg A : \neg(\neg r \to s \land \neg u) & \equiv \neg(\neg\neg r \lor (s \land \neg u)) & \text{[por (2)]} \\
& \equiv \neg(r \lor (s \land \neg u)) & \text{[por (5)]} \\
& \equiv \neg r \land \neg(s \land \neg u)) & \text{[por (4)]} \\
& \equiv \neg r \land (\neg s \lor \neg\neg u)) & \text{[por (3)]} \\
& \equiv \neg r \land (\neg s \lor u)) & \text{[por (5)]} \\
& \equiv \{\{\neg r\}\}, \{\neg s, u\}\} &
\end{array}$$

Una resolución lineal con las cláusulas obtenidas es

1	$\{q, r, s\}$	
2	$\{\neg r, q, t\}$	
3	$\{\neg q, \neg p\}$	
4	$\{\neg t, u\}$	
5	$\{\neg u, \neg s\}$	
6	$\{p\}$	
7	$\{\neg r\}$	
8	$\{\neg s, u\}$	
9	$\{q, r, u\}$	Resolvente de 1 y 8
10	$\{q, r, \neg s\}$	Resolvente de 9 y 5
11	$\{q, r\}$	Resolvente de 10 y 1
12	$\{q\}$	Resolvente de 11 y 7
13	$\{\neg p\}$	Resolvente de 12 y 3
14	$\square$	Resolvente de 13 y 6

Solución del apartado (d): Puesto que los modelos de U, calculados en el apartado (b), son las valoraciones v_1 y v_2 tales que

$$\begin{array}{l} v_1(p) = 1, v_1(q) = 0, v_1(r) = 1, v_1(s) = 0, v_1(t) = 1, v_1(u) = 1 \\ v_2(p) = 1, v_2(q) = 0, v_2(r) = 0, v_2(s) = 1, v_2(t) = 0, v_2(u) = 0 \end{array}$$

para determinar si $\neg B$ es consecuencia de U basta calcular el valor de $\neg B$ en dichas valoraciones.

$$\begin{aligned} v_1(\neg((r \vee s) \wedge (u \to r))) &= H_\neg(v_1(r \vee s) \wedge (u \to r)) \\ &= H_\neg(H_\wedge(v_1(r \vee s), v_1(u \to r))) \\ &= H_\neg(H_\wedge(H_\vee(v_1(r), v_1(s)), H_\to(v_1(u), v_1(r)))) \\ &= H_\neg(H_\wedge(H_\vee(1, 0), H_\to(1, 1))) \\ &= H_\neg(H_\wedge(1, 1)) \\ &= H_\neg(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, $\neg B$ no es consecuencia de U.

Nótese que el cálculo anterior puede simplificarse (por el método de Quine) en

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \neg & (& (& r & \vee & s &) & \wedge & (& u & \to & r &))) \\ 0 & & & 1 & 1 & 0 & & 1 & & 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

Ejercicio 17 *Consideremos el lenguaje de primer orden $L = \{a, P, Q\}$ (siendo a un símbolo de constante y P y Q predicados de aridad 1). Sea F la fórmula de L*

$$(\forall x)[P(x) \to (Q(x) \vee Q(a))] \to ((\exists x)P(x) \to (\exists x)[Q(x) \vee Q(a)])$$

(a) Obténganse formas clausales para F y $\neg F$.

(b) Pruébese, utilizando resolución básica, que F es lógicamente válida.

(c) Descríbase un modelo de Herbrand de F.

Solución:

Solución del apartado (a): Cálculo de una forma clausal de F:

$$
\begin{array}{lll}
 & (\forall x)[P(x) \to (Q(x) \vee Q(a))] \to ((\exists x)P(x) \to (\exists x)[Q(x) \vee Q(a)]) & \\
\equiv & (\forall x)[P(x) \to (Q(x) \vee Q(a))] \to ((\exists y)P(y) \to (\exists z)[Q(z) \vee Q(a)]) & \text{[rectificación]} \\
\equiv & \neg(\forall x)[\neg P(x) \vee (Q(x) \vee Q(a))] \vee (\neg(\exists y)P(y) \vee (\exists z)[Q(z) \vee Q(a)]) & \text{[por (2)]} \\
\equiv & (\exists x)\neg(\neg P(x) \vee (Q(x) \vee Q(a))) \vee ((\forall y)\neg P(y) \vee (\exists z)[Q(z) \vee Q(a)]) & \text{[por (8) y (9)]} \\
\equiv & (\exists x)[\neg\neg P(x) \wedge \neg(Q(x) \vee Q(a))) \vee ((\forall y)\neg P(y) \vee (\exists z)[Q(z) \vee Q(a)]) & \text{[por (6)]} \\
\equiv & (\exists x)[P(x) \wedge (\neg Q(x) \wedge \neg Q(a))] \vee ((\forall y)\neg P(y) \vee (\exists z)[Q(z) \vee Q(a)]) & \text{[por (7) y (6)]} \\
\equiv & (\exists x)[(P(x) \wedge (\neg Q(x) \wedge \neg Q(a))) \vee ((\forall y)\neg P(y) \vee (\exists z)[Q(z) \vee Q(a)])] & \text{[por (14)]} \\
\equiv & (\exists x)[(P(x) \wedge (\neg Q(x) \wedge \neg Q(a))) \vee (\exists z)[(\forall y)\neg P(y) \vee (Q(z) \vee Q(a))]] & \text{[por (18)]} \\
\equiv & (\exists x)(\exists z)[(P(x) \wedge (\neg Q(x) \wedge \neg Q(a))) \vee (\forall y)[\neg P(y) \vee (Q(z) \vee Q(a))]] & \text{[por (12)]} \\
\equiv & (\exists x)(\exists z)(\forall y)[(P(x) \wedge (\neg Q(x) \wedge \neg Q(a))) \vee (\neg P(y) \vee (Q(z) \vee Q(a)))] & \text{[por (16)]} \\
\equiv_{sat} & (\forall y)[(P(b) \wedge (\neg Q(b) \wedge \neg Q(a))) \vee (\neg P(y) \vee (Q(c) \vee Q(a)))] & \text{[Skolem]} \\
\equiv & (\forall y)[(P(b) \vee (\neg P(y) \vee (Q(c) \vee Q(a))))\wedge & \\
 & \quad (\neg Q(b) \vee (\neg P(y) \vee (Q(c) \vee Q(a))))\wedge & \\
 & \quad (\neg Q(a) \vee (\neg P(y) \vee (Q(c) \vee Q(a))))] & \text{[distributiva]} \\
\equiv & (\forall y)[(P(b) \vee (\neg P(y) \vee (Q(c) \vee Q(a))))\wedge & \\
 & \quad (\neg Q(b) \vee (\neg P(y) \vee (Q(c) \vee Q(a))))] & \text{[tautología]} \\
\equiv & \{\{P(b), \neg P(y), Q(c), Q(a)\}, \{\neg Q(b), \neg P(y), Q(c), Q(a)\}\} &
\end{array}
$$

2.– Cálculo de una forma clausal de $\neg F$:

$$
\begin{array}{lll}
 & \neg((\forall x)[P(x) \to (Q(x) \vee Q(a))] \to ((\exists x)P(x) \to (\exists x)[Q(x) \vee Q(a)])) & \\
\equiv & \neg((\exists x)[P(x) \wedge (\neg Q(x) \wedge \neg Q(a))] \vee ((\forall y)\neg P(y) \vee (\exists z)[Q(z) \vee Q(a)]) & \text{[por anterior]} \\
\equiv & \neg(\forall y)(\exists x)(\exists z)[(P(x) \wedge (\neg Q(x) \wedge \neg Q(a))) \vee (\neg P(y) \vee (Q(z) \vee Q(a)))] & \text{[por (12)–(18)]} \\
\equiv & (\exists y)(\forall x)(\forall z)\neg[(P(x) \wedge (\neg Q(x) \wedge \neg Q(a))) \vee (\neg P(y) \vee (Q(z) \vee Q(a)))] & \text{[por (8) y (9)]} \\
\equiv_{sat} & (\forall x)(\forall z)\neg[(P(x) \wedge (\neg Q(x) \wedge \neg Q(a))) \vee (\neg P(b) \vee (Q(z) \vee Q(a)))] & \text{[por Skolem]} \\
\equiv & (\forall x)(\forall z)[\neg(P(x) \wedge (\neg Q(x) \wedge \neg Q(a))) \wedge \neg(\neg P(b) \vee (Q(z) \vee Q(a)))] & \text{[por (6)]} \\
\equiv & (\forall x)(\forall z)[(\neg P(x) \vee \neg(\neg Q(x) \wedge \neg Q(a))) \wedge (\neg\neg P(b) \wedge \neg(Q(z) \vee Q(a)))] & \text{[por (5) y (6)]} \\
\equiv & (\forall x)(\forall z)[(\neg P(x) \vee (\neg\neg Q(x) \vee \neg\neg Q(a))) \wedge (P(b) \wedge (\neg Q(z) \wedge \neg Q(a)))] & \text{[por (5), (6) y (7)]} \\
\equiv & (\forall x)(\forall z)[(\neg P(x) \vee (Q(x) \vee Q(a))) \wedge (P(b) \wedge (\neg Q(z) \wedge \neg Q(a)))] & \text{[por (7)]} \\
\equiv & \{\{\neg P(x), Q(x), Q(a)\}, \{P(b)\}, \{\neg Q(z)\}, \{\neg Q(a)\}\} &
\end{array}
$$

Solución del apartado (b): Sustituyendo en la forma clausal de $\neg F$ calculada anteriormente, la x y la z por b se obtiene un conjunto de cláusulas que tienen una refutación básica. En efecto,

1	$\{\neg P(b), Q(b), Q(a)\}$	
2	$\{P(b)\}$	
3	$\{\neg Q(b)\}$	
4	$\{\neg Q(a)\}$	
5	$\{Q(b), Q(a)\}$	Resolvente de 1 y 2
6	$\{Q(a)\}$	Resolvente de 5 y 3
7	$\square$	Resolvente de 6 y 4

Solución del apartado (c): A la vista de la forma clausal de F del apartado (a), se observa que un modelo de Herbrand de F es el conjunto vacío (es decir, ningún elemento verifica P ni ninguno verifica Q).

Ejercicio 18 *Consideremos el LPO $L = \{a, b, P, Q, R, T\}$. Escríbanse fórmulas de L que expresen las siguientes afirmaciones:*

1. *Pilar dirigió algún drama pero no dirigió ninguna comedia.*

2. *Pedro dirigió una comedia de mayor duración que cualquiera de las dirigidas por Pilar.*

3. *Pedro no dirigió comedias salvo que Pilar dirigiera algún drama.*

4. *Pilar dirigió todo drama que no dirigió Pedro.*

$P(x)$ *expresará que "x es una comedia", $Q(x)$ que "x es un drama", $R(x,y)$ expresará que "x dirigió y" y $T(x,y)$ que "x es de mayor duración que y". Las constantes a y b denotarán, respectivamente, a Pedro y a Pilar.*

Solución:

1. Pilar dirigió algún drama pero no dirigió ninguna comedia.

   $$(\exists y)[Q(y) \land R(b,y)] \land \neg(\exists z)[P(z) \land R(b,y)]$$

2. Pedro dirigió una comedia de mayor duración que cualquiera de las dirigidas por Pilar.

   $$(\exists x)[P(x) \land R(a,x) \land (\forall y)[P(y) \land R(b,y) \to T(x,y)]]$$

3. Pedro no dirigió comedias salvo que Pilar dirigiera algún drama.

   $$(\exists x)[P(x) \land R(a,x)] \to (\exists y)[Q(y) \land R(b,y)]$$

4. Pilar dirigió todo drama que no dirigió Pedro.

   $$(\forall x)[Q(x) \land \neg R(a,x) \to R(b,x)]$$

Ejercicio 19 *Consideremos las fórmulas del LPO, $L = \{P, Q\}$*

$F_1 : (\exists x)[P(x) \land Q(x)]$.
$F_2 : (\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x)$,
$F_3 : (\exists x)(\exists y)[P(x) \land Q(y)]$

(a) *Hállese una L estructura $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I} \models F_2$ pero $\mathcal{I} \not\models F_1$.*

(b) *Pruébese que todo modelo de F_1 es modelo de F_2.*

(c) *Pruébese que F_2 y F_3 son lógicamente equivalentes.*

Solución:

Solución del apartado (a): Vamos a buscar formas clausales de F_2 y $\neg F_1$ y saturar por resolución el conjunto de las cláusulas obtenidas para hallar un modelo de Herbrand de $\{F_2, \neg F_1\}$.

$$\begin{array}{lll}
F_2 : & (\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x) & \\
\equiv & (\exists x)P(x) \land (\exists y)Q(y) & \text{[rectificación]} \\
\equiv & (\exists x)(\exists y)[P(x) \land Q(y)] & \text{[por (11)–(18)]} \\
\equiv_{sat} & P(a) \land Q(b) & \text{[por Skolem]} \\
\equiv & \{\{P(a)\}, \{Q(b)\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\neg F_1 : & \neg(\exists x)[P(x) \land Q(x)] & \\
\equiv & (\forall x)\neg(P(x) \land Q(x)) & \text{[por (9)]} \\
\equiv & (\forall x)[\neg P(x) \lor \neg Q(x)] & \text{[por (5)]} \\
\equiv & \{\{\neg P(x), \neg Q(x)\}\} &
\end{array}$$

Las cláusulas obtenidas son

1 $\{P(a)\}$
2 $\{Q(b)\}$
3 $\{\neg P(x), \neg Q(x)\}$

Veamos el proceso de saturación, por resolución:

Al resolver 1 con 1 no se obtiene resolvente.
Al resolver 2 con 1 y 2 no se obtiene resolvente.
Al resolver 3 con 1, 2 y 3 se obtiene
4 $\{\neg Q(a)\}$ (resolvente de 3 y 1)
5 $\{\neg P(b)\}$ (resolvente de 3 y 2)
Al resolver 4 con 1, 2, 3 y 4 no se obtiene resolvente.
Al resolver 5 con 1, 2, 3, 4 y 5 no se obtiene resolvente.

A la vista del saturado, un modelo es $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{a, b\}, P^I = \{a\}, Q^I = \{b\}$.

Solución del apartado (b): Probar que todo modelo de F_1 es modelo de F_2, equivale a probar que $F_1 \models F_2$ que, a su vez, equivale a probar que $\{F_1, \neg F_2\}$ es inconsistente. Probaremos la última condición por resolución. Para ello, empezamos calculando unas formas clausales de F_1 y $\neg F_2$.

$F_1:$	$(\exists x)[P(x) \land Q(x)]$	
$\equiv_{sat}$	$P(a) \land Q(a)$	[por Skolem]
$\equiv$	$\{\{P(a)\}, \{Q(a)\}\}$	

$\neg F_2:$	$\neg((\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x))$	
$\equiv$	$\neg(\exists x)(\exists y)[P(x) \land Q(y)]$	[por apartado (a)]
$\equiv$	$(\forall x)(\forall y)\neg(P(x) \land Q(y))$	[por (9)]
$\equiv$	$(\forall x)(\forall y)[\neg P(x) \lor \neg Q(y)]$	[por (5)]
$\equiv$	$\{\{\neg P(x), \neg Q(y)\}\}$	

La resolución es

1	$\{P(a)\}$	
2	$\{Q(a)\}$	
3	$\{\neg P(x), \neg Q(y)\}$	
4	$\{\neg Q(y)\}$	Resolvente de 1 y 3
5	$\square$	Resolvente de 4 y 2

Solución del apartado (c): Para probar que F_2 y F_3 son lógicamente equivalentes, basta probar que $F_2 \models F_3$ y $F_3 \models F_2$. Lo haremos por resolución. Para ello, necesitaremos formas clausales de F_2, $\neg F_2$, F_3 y $\neg F_3$.

$F_2:$	$(\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x)$	
$\equiv_{sat}$	$\{\{P(a)\}, \{Q(b)\}\}$	[por anterior]

$\neg F_2:$	$\neg((\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x))$	
$\equiv$	$\{\{\neg P(x), \neg Q(y)\}\}$	[por anterior]

$F_3:$	$(\exists x)(\exists y)[P(x) \land Q(y)]$	
$\equiv_{sat}$	$P(c) \land Q(d)$	[por Skolem]
$\equiv$	$\{\{P(c)\}, \{Q(d)\}\}$	

$$\begin{array}{lll}
\neg F_3: & \neg(\exists x)(\exists y)[P(x) \wedge Q(y)] & \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)\neg(P(x) \wedge Q(y)) & \text{[por (9)]} \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg P(x) \vee \neg Q(y)] & \text{[por (5)]} \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg P(x) \vee \neg Q(y)] & \text{[por (5)]} \\
\equiv & \{\{\neg P(x), \neg Q(y)\}\} &
\end{array}$$

Demostración, por resolución, de $F_2 \models F_3$:

$$\begin{array}{lll}
1 & \{P(a)\} & \\
2 & \{Q(b)\} & \\
3 & \{\neg P(x), \neg Q(y)\} & \\
4 & \{\neg Q(y)\} & \text{Resolvente de } 1 \text{ y } 3 \\
5 & \square & \text{Resolvente de } 4 \text{ y } 2
\end{array}$$

Demostración, por resolución, de $F_3 \models F_2$:

$$\begin{array}{lll}
1 & \{P(c)\} & \\
2 & \{Q(d)\} & \\
3 & \{\neg P(x), \neg Q(y)\} & \\
4 & \{\neg Q(y)\} & \text{Resolvente de } 1 \text{ y } 3 \\
5 & \square & \text{Resolvente de } 4 \text{ y } 2
\end{array}$$

Examen de Junio de 2003

Ejercicio 20 *Consideremos los conjuntos de fórmulas:*

$$S = \{p \rightarrow q, q \leftrightarrow r \wedge s, \neg s \wedge r \rightarrow q, \neg q\}$$
$$T = \{q \vee r, \neg q \vee \neg r\}$$

1. *Pruébese, mediante tableros semánticos, que S es consistente.*

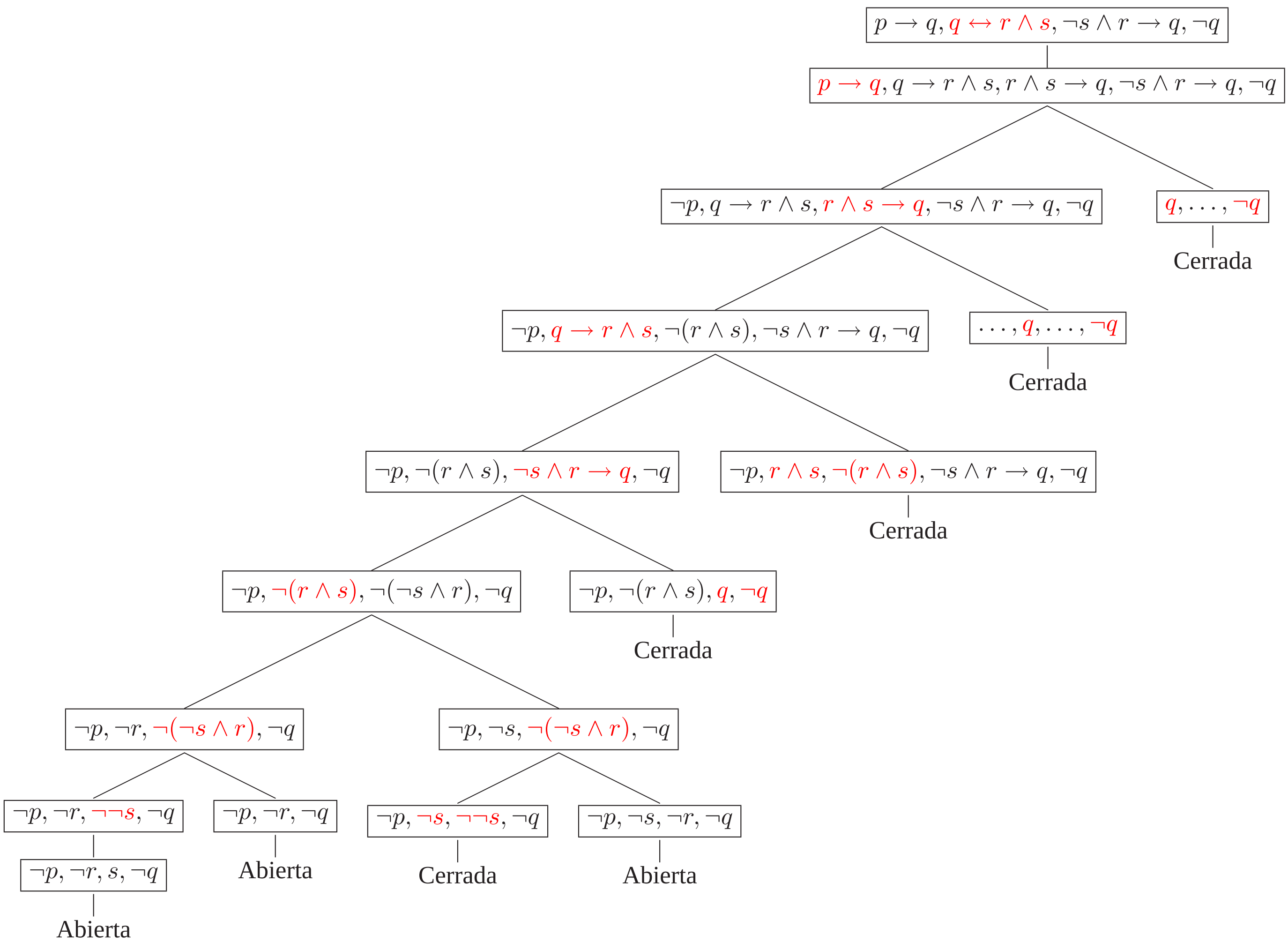
2. *Obténganse, razonadamente, todos los modelos de S.*

3. *Pruébese, mediante resolución lineal, que $S \cup T$ es inconsistente.*

4. *Teniendo en cuenta los apartados anteriores, obténgase una fórmula F, formada exclusivamente por las variables q y r, tal que: $F \notin TAUT$ y $S \models F$.*

Solución:

Solución del apartado 1: Un tablero semántico de S es



Al tener hojas abiertas, el conjunto S es consistente.

Solución del apartado 2: La hojas abiertas son

$$S_1 = \{\neg p, \neg q, \neg r, s\}$$
$$S_2 = \{\neg p, \neg q, \neg r\}$$
$$S_3 = \{\neg p, \neg q, \neg r, \neg s\}$$

Por tanto, los modelos de S son las valoraciones v tales que $v(p) = v(q) = v(r) = 0$.

Solución del apartado 3: En primer lugar, tenemos que calcular las formas clausales de las fórmulas de $S \cup T$.

$p \rightarrow q$	$\equiv \neg p \vee q$	[por (2)]
	$\equiv \{\{\neg p, q\}\}$	
$q \leftrightarrow r \wedge s$	$\equiv (q \rightarrow r \wedge s) \wedge (r \wedge s \rightarrow q)$	[por (1)]
	$\equiv (\neg q \vee (r \wedge s)) \wedge (\neg(r \wedge s) \vee q)$	[por (2)]
	$\equiv (\neg q \vee (r \wedge s)) \wedge ((\neg r \vee \neg s) \vee q)$	[por (3)]
	$\equiv ((\neg q \vee r) \wedge (\neg q \vee s)) \wedge ((\neg r \vee \neg s) \vee q)$	[por (6)]
	$\equiv \{\{\neg q, r\}, \{\neg q, s\}, \{\neg r, \neg s, q\}\}$	
$\neg s \wedge r \rightarrow q$	$\equiv \neg(\neg s \wedge r) \vee q$	[por (2)]
	$\equiv (\neg\neg s \vee \neg r) \vee q$	[por (3)]
	$\equiv (s \vee \neg r) \vee q$	[por (5)]
	$\equiv \{\{s, \neg r, q\}\}$	
$\neg q$	$\equiv \{\{\neg q\}\}$	
$q \vee r$	$\equiv \{\{q, r\}\}$	
$\neg q \vee \neg r$	$\equiv \{\{\neg q, \neg r\}\}$	

Una resolución lineal con las cláusulas obtenidas es

1	$\{\neg p, q\}$	
2	$\{\neg q, r\}$	
3	$\{\neg q, s\}$	
4	$\{\neg r, \neg s, q\}$	
5	$\{s, \neg r, q\}$	
6	$\{\neg q\}$	
7	$\{q, r\}$	
8	$\{\neg q, \neg r\}$	
9	$\{s, q\}$	Resolvente de 7 y 5
10	$\{q, \neg r\}$	Resolvente de 9 y 4
11	$\{q\}$	Resolvente de 10 y 7
12	$\square$	Resolvente de 11 y 6

Solución del apartado 4: Puesto que en cualquier modelo v de S se verifica que $v(q) = v(r) = 0$, entonces la fórmula $\neg q \wedge \neg r$ es una consecuencia no tautológica de S.

Ejercicio 21 *Supongamos conocidos los siguientes hechos acerca del número de aprobados de dos asignaturas A y B:*

1. *Si todos los alumnos aprueban la asignatura A, entonces todos aprueban la asignatura B.*

2. *Si algún delegado de la clase aprueba A y B, entonces todos los alumnos aprueban A.*

3. *Si nadie aprueba B, entonces ningún delegado aprueba A.*

4. *Si Manuel no aprueba B, entonces nadie aprueba B.*

Se pide:

(a) *Formalizar los enunciados anteriores en un lenguaje de primer orden usando los siguientes símbolos de predicado: $D(x)$: "x es un delegado", $Ap(x,y)$: "x aprueba la asignatura y". Las constantes a, b, m denotarán la asignatura A, la asignatura B y a Manuel, respectivamente.*

(b) *Obtener una forma clausal para el conjunto de fórmulas del apartado anterior.*

(c) *Probar, mediante resolución, que si Manuel es un delegado y aprueba la asignatura A, entonces todos los alumnos aprueban las asignaturas A y B.*

Solución:

Solución del apartado (a) Formalización:

1. Si todos los alumnos aprueban la asignatura A, entonces todos aprueban la asignatura B.
   $(\forall x)Ap(x,a) \rightarrow (\forall y)Ap(y,b)$.

2. Si algún delegado de la clase aprueba A y B, entonces todos los alumnos aprueban A.
   $(\exists x)[D(x) \land Ap(x,a) \land Ap(x,b)] \rightarrow (\forall y)Ap(y,a)$.

3. Si nadie aprueba B, entonces ningún delegado aprueba A.
   $\neg(\exists x)Ap(x,b) \rightarrow \neg(\exists y)[D(y) \land Ap(y,a)]$.

4. Si Manuel no aprueba B, entonces nadie aprueba B.
   $\neg Ap(m,b) \rightarrow \neg(\exists x)Ap(x,b)$.

Solución del apartado (b) Formas clausales:

$$
\begin{array}{ll}
1 & \{\neg Ap(c,a), Ap(y,b)\} \\
2 & \{\neg D(x), \neg Ap(x,a), \neg Ap(x,b), Ap(y,a)\} \\
3 & \{Ap(d,b), \neg D(y), \neg Ap(y,a)\} \\
4 & \{Ap(m,b), \neg Ap(x,b)\}
\end{array}
$$

donde c, d y e son constantes de Skolem.

Solución del apartado (c) Resolución:

Antes de hacer la resolución se formaliza la negación de la conclusión (Si Manuel es un delegado y aprueba la asignatura A, entonces todos los alumnos aprueban las asignaturas A y B):

$$\neg(D(m) \land Ap(m,a) \rightarrow (\forall x)[Ap(x,a) \land Ap(x,b)])$$

y se calcula las cláusulas correspondientes:

$$
\begin{array}{ll}
5 & \{D(m)\} \\
6 & \{Ap(m,a)\} \\
7 & \{\neg Ap(e,a), \neg Ap(e,b)\}
\end{array}
$$

La resolución es

1	$\{\neg Ap(c,a), Ap(y,b)\}$	
2	$\{\neg D(x), \neg Ap(x,a), \neg Ap(x,b), Ap(y,a)\}$	
3	$\{Ap(d,b), \neg D(y), \neg Ap(y,a)\}$	
4	$\{Ap(m,b), \neg Ap(x,b)\}$	
5	$\{D(m)\}$	
6	$\{Ap(m,a)\}$	
7	$\{\neg Ap(e,a), \neg Ap(e,b)\}$	
8	$\{Ap(d,b), \neg Ap(m,a)\}$	Resolvente de 5.1 y 3.2
9	$\{Ap(d,b)\}$	Resolvente de 8.2 y 6.1
10	$\{Ap(m,b)\}$	Resolvente de 9.1 y 4.2
11	$\{\neg D(m), \neg Ap(m,a), Ap(y,a)\}$	Resolvente de 10.1 y 2.3
12	$\{\neg Ap(m,a), Ap(y,a)\}$	Resolvente de 11.1 y 5.1
13	$\{Ap(y,a)\}$	Resolvente de 12.1 y 6.1
14	$\{Ap(y,b)\}$	Resolvente de 13.1 y 1.1
15	$\{\neg Ap(e,b)\}$	Resolvente de 7.1 y 13.1
16	$\square$	Resolvente de 15.1 y 14.1

Ejercicio 22 *El ejercicio tiene dos apartados.*

1. *Consideramos el lenguaje* $L_1 = \{P, f, a, b, c\}$ *y el conjunto de fórmulas:*

$$S = \{P(c,a) \to (\forall z)P(z,b), (\forall x)[P(f(x),x) \to (\forall z)P(z,x)], \neg P(b,c)\}$$

Pruébese, proporcionando un modelo de Herbrand, que $S \not\models P(f(a),a) \vee \neg P(f(b),b)$.

2. *Consideramos el lenguaje* $L_2 = \{a, b, P\}$. *Sea* F *la fórmula*

$$\neg P(x,a) \wedge \neg P(x,b) \wedge (\exists y)(\exists z)P(y,z)$$

Pruébese que F *es consistente y que NO tiene ningún modelo de Herbrand (en el lenguaje* L_2*). ¿Contradice esto el teorema de Herbrand? Razónese la respuesta.*

Solución:

Solución del apartado (1): Las formas clausales de las fórmulas del problema son:

- de $P(c,a) \to (\forall z)P(z,b)$, $S_1 = \{\{\neg P(c,a), P(z,b)\}\}$;
- de $(\forall x)[P(f(x),x) \to (\forall z)P(z,x)]$, $S_2 = \{\{\neg P(f(x),x), P(z,x)\}\}$;
- de $\neg P(b,c)$, $S_3 = \{\{\neg P(b,c)\}\}$;
- de $\neg(P(f(a),a) \vee \neg P(f(b),b))$, $S_4 = \{\{\neg P(f(a),a)\}, \{P(f(b),b)\}\}$.

Vamos a calcular la saturación, por resolución y factorización, de $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$. Las cláusulas iniciales son

1	$\{\neg P(c,a), P(z,b)\}$
2	$\{\neg P(f(x),x), P(z,x)\}$
3	$\{\neg P(b,c)\}$
4	$\{\neg P(f(a),a)\}$
5	$\{P(f(b),b)\}$

Al resolver 3 con 3 no se obtiene resolvente.
Al resolver 4 con 3 y 4 no se obtiene resolvente.
Al resolver 5 con 3, 4 y 5 no se obtiene resolvente.
Al resolver 1 con 3, 4, 5 y 1 no se obtiene resolvente.
Al resolver 2 con 3, 4, 5, 1 y 2 se obtiene
6 $\{P(z, b)\}$ (resolvente de 2 y 5) y
7 $\{\neg P(f(c), c)\}$ (resolvente de 2 y 3)
La cláusula 6 subsume a la 1 y a la 5
Al resolver 6 con 3, 4, 2 y 6 no se obtiene resolvente.
Al resolver 7 con 3, 4, 2, 6 y 7 no se obtiene resolvente.

Por tanto, el saturado es
2 $\{\neg P(f(x), x), P(z, x)\}$
3 $\{\neg P(b, c)\}$
4 $\{\neg P(f(a), a)\}$
6 $\{P(z, b)\}$
7 $\{\neg P(f(c), c)\}$

El universo de Herbrand es $UH = \{a, f(a), f(f(a)), \dots, b, f(b), f(f(b)), \dots\ c, f(c), f(f(c)), \dots\}$ y un modelo de Herbrand es $I = \{P(z, b) : z \in UH\}$.

Solución del apartado (2): Para demostrar que F es consistente basta mostrar una estructura $\mathcal{I}$ deL_2 y una asignación A en $\mathcal{I}$ tales que $\mathcal{I}_A \models F$. Sea $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{1, 2\}$, $a^I = 1, b^I = 1$ y $P^I = \{(1, 2)\}$. Sea A tal que $A(x) = 1$. Entonces, $\mathcal{I}_A \models F$ (ya que

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_A(F) &= \mathcal{I}_A(\neg P(x, a) \wedge \neg P(x, b) \wedge (\exists y)(\exists z)P(y, z)) \\ &= \mathcal{I}_A(\neg P(x, a)) \wedge \mathcal{I}_A(\neg P(x, b)) \wedge \mathcal{I}_A((\exists y)(\exists z)P(y, z)) \\ &= \mathsf{V}\end{aligned}$$

puesto que

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_A(\neg P(x, a)) &= \neg P^I(A(x), a^I) \\ &= \neg P^I(1, 1) \\ &= \neg \mathsf{F} \\ &= \mathsf{V}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_A(\neg P(x, b)) &= \neg P^I(A(x), b^I) \\ &= \neg P^I(1, 1) \\ &= \neg \mathsf{F} \\ &= \mathsf{V}\end{aligned}$$

$\mathcal{I}_A((\exists y)(\exists z)P(y, z)) = \mathsf{V}$ porque

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{A[y/1, z/2]}(P(y, z)) &= P^I(1, 2) \\ &= \mathsf{V}\end{aligned}$$
)

Veamos que F no tiene ningún modelo de Herbrand (en el lenguaje L_2). El universo de Herbrand de L_2 es UH $= \{a, b\}$, la base de Herbrand es BH $= \{P(a, a), P(a, b), P(b, a), P(b, b)\}$. Las interpretaciones de Herbrand de L_2 son los 16 subconjuntos de BH. Sea I una interpretación de Herbrand de L_2. Demostraremos que $I \not\models F$ distinguiendo tres casos:

- Caso 1: $I = \emptyset$. Entonces, $I \not\models F$ (ya que $\emptyset \not\models (\exists y)(\exists z)P(y, z)$).

- Caso 2: $P(a, a) \in I$ ó $P(b, a) \in I$. Entonces, $I \not\models F$ (ya que $I \not\models \neg P(x, a)$).
- Caso 3: $P(a, b) \in I$ ó $P(b, b) \in I$. Entonces, $I \not\models F$ (ya que $I \not\models \neg P(x, b)$).

El que F sea consistente y no tenga modelo de Herbrand no contradice el teorema de Herbrand, ya que F no está en forma clausal (tiene un cuantificador existencial).

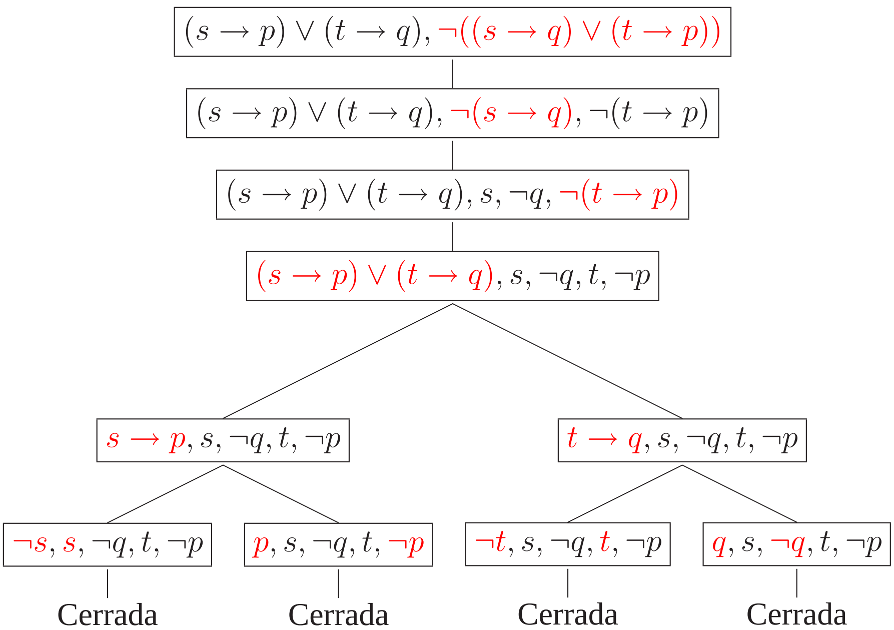
Examen de Septiembre de 2003

Ejercicio 23 *Dadas las fórmulas* $A : (s \to p) \lor (t \to q)$ *y* $B : (s \to q) \lor (t \to p)$*, se pide:*

1. *Pruébese que* $A \models B$*:*
   (a) *Mediante tableros semánticos.*
   (b) *Mediante resolución por entradas.*
2. *Descríbanse, razonadamente, todos los modelos de* A *y, a continuación, pruébese nuevamente que* $A \models B$*, utilizando la definición de consecuencia lógica.*
3. *¿Es* $\neg B \to \neg A$ *una tautología? Razónese la respuesta.*

Solución:

Solución del apartado (1.a): El tablero semántico de $\{A, \neg B\}$ es



Como todas las hojas son cerradas, $A \models B$.

Solución del apartado (1.b): En primer lugar, calculamos la forma clausal de A

$$\begin{aligned} (s \to p) \lor (t \to q) &\equiv (\neg s \lor p) \lor (\neg t \lor q) \quad \text{[por (2)]} \\ &\equiv \{\{\neg s, p, \neg t, q\}\} \end{aligned}$$

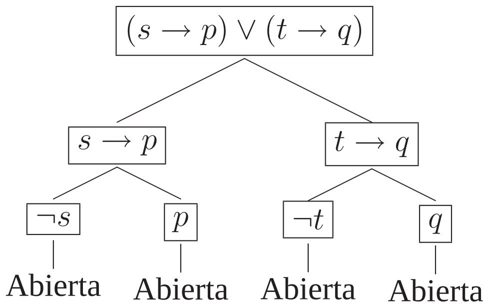
y la forma clausal de $\neg B$

$$\begin{aligned} \neg((s \to q) \lor (t \to p)) &\equiv \neg((\neg s \lor q) \lor (\neg t \lor p)) && \text{[por (2)]} \\ &\equiv \neg(\neg s \lor q) \land \neg(\neg t \lor p) && \text{[por (4)]} \\ &\equiv (\neg\neg s \land \neg q) \land (\neg\neg t \land \neg p) && \text{[por (4)]} \\ &\equiv (s \land \neg q) \land (t \land \neg p) && \text{[por (5)]} \\ &\equiv \{\{s\}, \{\neg q\}, \{t\}, \{\neg p\}\} \end{aligned}$$

Una resolución por entradas de las cláusulas obtenidas es

1	$\{\neg s, p, \neg t, q\}$	
2	$\{s\}$	
3	$\{\neg q\}$	
4	$\{t\}$	
5	$\{\neg p\}\}$	
6	$\{p, \neg t, q\}$	Resolvente de 1 y 2
7	$\{\neg t, q\}$	Resolvente de 6 y 5
8	$\{q\}$	Resolvente de 6 y 4
9	$\square$	Resolvente de 8 y 3

Solución del apartado 2: Para calcular los modelos de A construimos el tablero de A:



Los modelos de A son las cuatro valoraciones v_i tales que $v_1(s) = 0$, $v_2(p) = 1$, $v_3(t) = 0$ ó $v_4(q) = 0$. Como las cuatro son modelos de B, se tiene que $A \not\models B$.

Solución del apartado 3: En el apartado anterior encontramos una valoración v' tal que $v'(A) = 1$ y $v'(B) = 0$. Para dicha valoración,

$$\begin{aligned} v'(\neg B \to \neg A) &= H_{\to}(v'(\neg B), v'(\neg A)) \\ &= H_{\to}(H_{\neg}(v'(B)), H_{\neg}(v'(A))) \\ &= H_{\to}(H_{\neg}(0), H_{\neg}(1)) \\ &= H_{\to}(1, 0)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, $\neg B \to \neg A$ no es una tautología.

Ejercicio 24 *Este ejercicio tiene dos apartados.*

1. *Hallar las formas prenexa, de Skolem y clausal de la fórmula:*
$$\neg(\exists x)(\forall z)[P(x) \to \neg Q(z)] \vee ((\exists z)A(y, z) \to (\exists u)B(y, u))$$

2. *Consideremos el lenguaje $L_1 = \{P, f, a, b\}$ y el conjunto de fórmulas:*
$$S = \{(\forall x)[P(a, x) \to P(b, f(x))], (\forall x)[P(f(x), x) \to (\forall z)P(z, b)], P(a, f(a)) \wedge P(f(b), b)\}$$
Pruébese, proporcionando un modelo de Herbrand, que $S \not\models (\exists x)[P(x, a) \wedge P(f(x), b)]$.

Solución:

Solución del apartado 1:

1.– Forma prenexa:

$$\begin{array}{lll}
 & \neg(\exists x)(\forall z)[P(x) \to \neg Q(z)] \lor ((\exists z)A(y,z) \to (\exists u)B(y,u)) & \\
\equiv & \neg(\exists x)(\forall z)[P(x) \to \neg Q(z)] \lor ((\exists v)A(y,v) \to (\exists u)B(y,u)) & [\text{por } (2)] \\
\equiv & \neg(\exists x)(\forall z)[\neg P(x) \lor \neg Q(z)] \lor (\neg(\exists v)A(y,v) \lor (\exists u)B(y,u)) & [\text{por } (4)] \\
\equiv & (\forall x)(\exists z)\neg(\neg P(x) \lor \neg Q(z)) \lor ((\forall v)\neg A(y,v) \lor (\exists u)B(y,u)) & [\text{por } (8) \text{ y } (9)] \\
\equiv & (\forall x)(\exists z)[\neg\neg P(x) \land \neg\neg Q(z)] \lor ((\forall v)\neg A(y,v) \lor (\exists u)B(y,u)) & [\text{por } (5)] \\
\equiv & (\forall x)(\exists z)[P(x) \land Q(z)] \lor ((\forall v)\neg A(y,v) \lor (\exists u)B(y,u)) & [\text{por } (7)] \\
\equiv & (\exists u)(\forall x)(\exists z)(\forall v)[(P(x) \land Q(z)) \lor (\neg A(y,v) \lor B(y,u))] & [\text{por } (11)\text{–}(18)]
\end{array}$$

2.– Forma de Skolem:

$$\begin{array}{lll}
 & (\exists u)(\forall x)(\exists z)(\forall v)[(P(x) \land Q(z)) \lor (\neg A(y,v) \lor B(y,u))] & \\
\equiv_{sat} & (\exists y)(\exists u)(\forall x)(\exists z)(\forall v)[(P(x) \land Q(z)) \lor (\neg A(y,v) \lor B(y,u))] & [\text{cierre existencial}] \\
\equiv_{sat} & (\exists u)(\forall x)(\exists z)(\forall v)[(P(x) \land Q(z)) \lor (\neg A(c,v) \lor B(c,u))] & [c \text{ constante de Skolem}] \\
\equiv_{sat} & (\forall x)(\exists z)(\forall v)[(P(x) \land Q(z)) \lor (\neg A(c,v) \lor B(c,d))] & [d \text{ constante de Skolem}] \\
\equiv_{sat} & (\forall x)(\forall v)[(P(x) \land Q(f(x))) \lor (\neg A(c,v) \lor B(c,d))] & [f \text{ función de Skolem}]
\end{array}$$

3.– Forma clausal:

$$\begin{array}{lll}
 & (\forall x)(\forall v)[(P(x) \land Q(f(x))) \lor (\neg A(c,v) \lor B(c,d))] & \\
\equiv & (\forall x)(\forall v)[(P(x) \lor \neg A(c,v) \lor B(c,d)) \land [(Q(f(x)) \lor \neg A(c,v) \lor B(c,d))] & [\text{por } (20)] \\
\equiv & \{\{(P(x), \neg A(c,v), B(c,d)\}, \{Q(f(x)), \neg A(c,v), B(c,d)\}\} &
\end{array}$$

Solución del apartado 2: Las formas clausales de las fórmulas del problema son:

- de $(\forall x)[P(a,x) \to P(b,f(x))]$, $S_1 = \{\{\neg P(a,x), P(b,f(x))\}\}$;
- de $(\forall x)[P(f(x),x) \to (\forall z)P(z,b)]$, $S_2 = \{\{\neg P(f(x),x), P(z,b)\}\}$;
- de $P(a,f(a)) \land P(f(b),b)$, $S_3 = \{\{P(a,f(a))\}, \{P(f(b),b)\}\}$;
- de $\neg(\exists x)[P(x,a) \land P(f(x),b)$, $S_4 = \{\{\neg P(x,a), \neg P(f(x),b)\}\}$.

Vamos a calcular la saturación, por resolución y factorización, de $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$. Las cláusulas iniciales son

1 $\{\neg P(a,x), P(b,f(x))\}$
2 $\{\neg P(f(x),x), P(z,b)\}$
3 $\{P(a,f(a))\}$
4 $\{P(f(b),b)\}$
5 $\{\neg P(x,a), \neg P(f(x),b)\}$

Al resolver 3 con 3 no se obtiene resolvente.
Al resolver 4 con 3 y 4 no se obtiene resolvente.
Al resolver 1 con 3, 4 y 1 se obtiene
6 $\{P(b,f(f(a)))\}$ (resolvente de 1 y 3).
Al resolver 6 con 3, 4, 1 y 6 no se obtiene resolvente.
Al resolver 2 con 3, 4, 1, 6 y 2 se obtiene
7 $\{P(z,b)\}$ (resolvente de 2 y 4) y
8 $\{-P(f(x),x), P(b,f(b))\}$ (resolvente de 2 y 1).
La cláusula 7 subsume a la 2 y a la 4.
Al resolver 7 con 3, 1, 6 y 7 se obtiene
9 $\{P(b,f(b))\}$ (resolvente de 7 y 1)
La cláusula 9 subsume a la 8

Al resolver 9 con 3, 1, 6, 7 y 9 no se obtiene resolventes.
Al resolver 5 con 3, 1, 6, 7, 9 y 5 se obtiene
10 $\{\neg P(x, a)\}$ (resolvente de 5 y 7) *La cláusula 10 subsume a la 5*

Por tanto, el saturado es

1 $\{\neg P(a, x), P(b, f(x))\}$
3 $\{P(a, f(a))\}$
6 $\{P(b, f(f(a)))\}$
7 $\{P(z, b)\}$
9 $\{P(b, f(b))\}$
10 $\{\neg P(x, a)\}$

El universo de Herbrand es $UH = \{a, f(a), f(f(a)), \dots, b, f(b), f(f(b)), \dots\}$ y un modelo de Herbrand es $I = \{P(a, f(a)), P(b, f(f(a))), P(b, f(b)), P(z, b) : z \in UH\}$

Ejercicio 25 *Consideremos los siguientes hechos acerca de la sucesión de los integrantes de la monarquía inglesa:*

1. *El primogénito de un rey hereda la corona de dicho rey.*
2. *Si alguien derrota a un rey entonces hereda su corona.*
3. *Si alguien hereda la corona de un rey entonces se convierte en rey.*
4. *Enrique VIII era el primogénito de Enrique VII.*
5. *Ricardo III era rey y Enrique VII derrotó a Ricardo III.*

Se pide:

(a) *Formalizar los enunciados anteriores en un lenguaje de primer orden usando los símbolos de predicado: $D(x, y)$: x derrota a y, $H(x, y)$: x hereda la corona de y, $R(x)$: x es rey, $P(x, y)$: x es el primogénito de y. Las constantes a, b, c denotarán, respectivamente, a Ricardo III, Enrique VII y Enrique VIII.*

(b) *A partir de la información anterior, probar, mediante resolución, que Enrique VIII fue rey.*

Solución:

Solución del apartado (a) La formalización del problema es:

1. El primogénito de un rey hereda la corona de dicho rey:
   $(\forall x)(\forall y)[R(y) \land P(x, y) \to H(x, y)]$.
2. Si alguien derrota a un rey entonces hereda su corona:
   $(\forall x(\forall y)[D(x, y) \land R(y) \to H(x, y)]$.
3. Si alguien hereda la corona de un rey entonces se convierte en rey :
   $(\forall x)[(\exists y)[R(y) \land H(x, y)] \to R(x)]$.
4. Enrique VIII era el primogénito de Enrique VII:
   $P(c, b)$.

5. Ricardo III era rey y Enrique VII derrotó a Ricardo III:
   $R(a) \wedge D(b,a)$.

Solución del apartado (b) Resolución:

Para realizar la refutación tenemos que formalizar la negación de la conclusión y obtener las correspondientes formas clausales.

La formalización de la negación de la conclusión es $\neg R(c)$.

Las cláusulas correspondientes a los hechos y a la negación de la conclusión son

1	$\{\neg R(y), \neg P(x,y), H(x,y)\}$
2	$\{\neg D(x,y), \neg R(y), H(x,y)\}$
3	$\{\neg R(y), \neg H(x,y), R(x)\}$
4	$\{P(c,b)\}$
5	$\{R(a)\}$
6	$\{D(b,a)\}$
7	$\{\neg R(c)\}$

Una refutación es

1	$\{\neg R(y), \neg P(x,y), H(x,y)\}$	
2	$\{\neg D(x,y), \neg R(y), H(x,y)\}$	
3	$\{\neg R(y), \neg H(x,y), R(x)\}$	
4	$\{P(c,b)\}$	
5	$\{R(a)\}$	
6	$\{D(b,a)\}$	
7	$\{\neg R(c)\}$	
8	$\{\neg R(y), \neg H(c,y)\}$	Resolvente 7.1 y 3.3
9	$\{\neg R(y), \neg P(c,y)\}$	Resolvente 8.2 y 1.3
10	$\{\neg R(b)\}$	Resolvente 9.2 y 4.1
11	$\{\neg R(y), \neg H(b,y)\}$	Resolvente 10.1 y 3.3
12	$\{\neg H(b,a)\}$	Resolvente 11.1 y 5.1
13	$\{\neg D(b,a), \neg R(a)\}$	Resolvente 12.1 y 2.3
14	$\{\neg R(a)\}$	Resolvente 13.1 y 6.1
15	$\square$.	Resolvente 14.1 y 5.1

Examen de Diciembre de 2003

Ejercicio 26 *Sean F y G las siguientes fórmulas:*

$$F : (p \rightarrow q) \wedge ((r \rightarrow \neg t) \wedge (q \rightarrow r))$$
$$G : \neg(\neg t \leftrightarrow (\neg t \wedge p)) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg t)$$

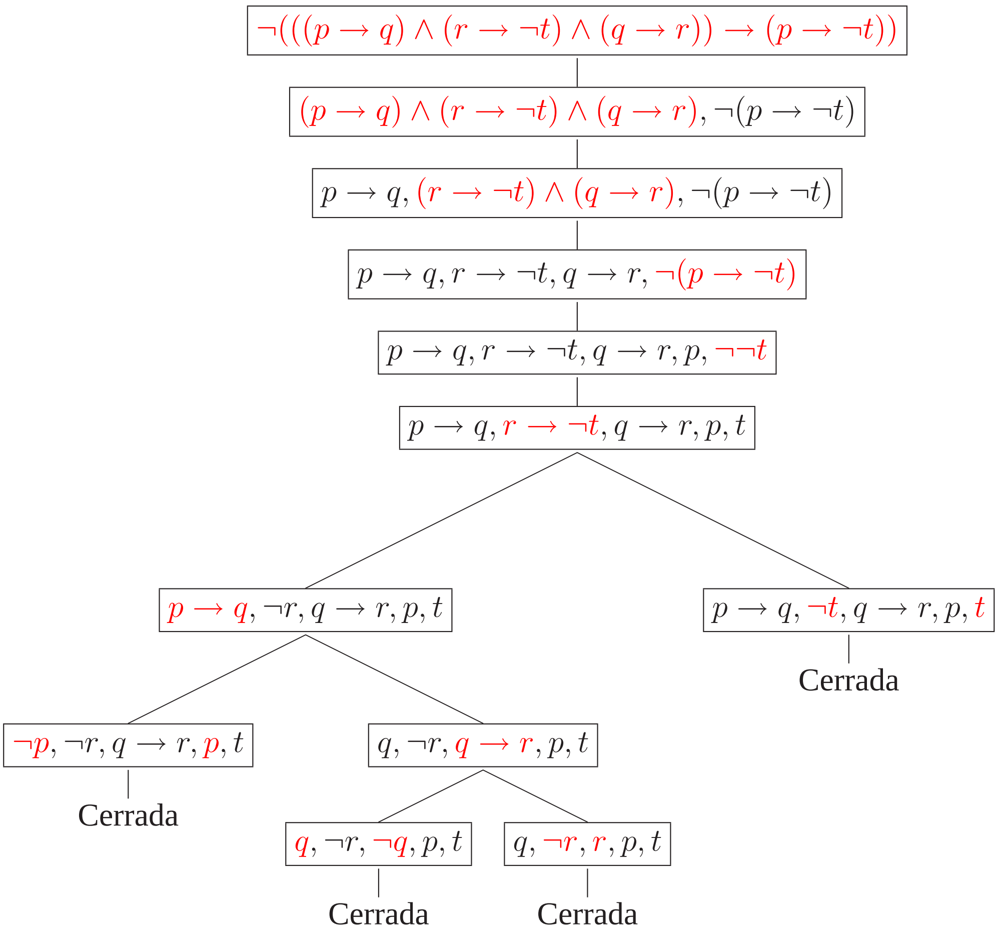
1. *Pruébese mediante un tablero semántico que $F \rightarrow (p \rightarrow \neg t)$ es una tautología.*

2. *Utilizando una forma normal, pruébese que G es satisfactible.*

3. *Pruébese mediante resolución que $\{F, G\} \models r \rightarrow p$.*

Solución:

Solución del apartado 1: El tablero semántico de $\neg(F \rightarrow (p \rightarrow \neg t))$ es



Al ser todas las hojas cerradas, $F \rightarrow (p \rightarrow \neg t)$ es una tautología.

Solución del apartado 2: Demostraremos la satisfacibilidad de G calculando una FND (forma normal disyuntiva) de G:

$$\begin{array}{ll}
\neg(\neg t \leftrightarrow (\neg t \land p)) \to \neg(p \to \neg t) & \\
\equiv \neg((\neg t \to (\neg t \land p)) \land ((\neg t \land p) \to \neg t)) \to \neg(p \to \neg t) & \text{[por (1)]} \\
\equiv \neg\neg((\neg\neg t \lor (\neg t \land p)) \land (\neg(\neg t \land p) \lor \neg t)) \lor \neg(\neg p \lor \neg t) & \text{[por (2)]} \\
\equiv ((t \lor (\neg t \land p)) \land (\neg(\neg t \land p) \lor \neg t)) \lor \neg(\neg p \lor \neg t) & \text{[por (5)]} \\
\equiv ((t \lor (\neg t \land p)) \land ((\neg\neg t \lor \neg p) \lor \neg t)) \lor (\neg\neg p \land \neg\neg t) & \text{[por (3) y (4)]} \\
\equiv ((t \lor (\neg t \land p)) \land ((t \lor \neg p) \lor \neg t)) \lor (p \land t) & \text{[por (5)]} \\
\equiv ((t \lor (\neg t \land p)) \land \mathsf{V}) \lor (p \land t) & \\
\equiv t \lor (\neg t \land p) \lor (p \land t) &
\end{array}$$

Por tanto, G es satisfacible y tiene dos modelos principales: v_1 tal que $v_1(t) = 1$ y v_2 tal que $v_2(t) = 0$ y $v_2(p) = 1$.

Solución del apartado 3: En primer lugar, calculamos las formas clausales:

$$\begin{array}{ll}
(p \to q) \land ((r \to \neg t) \land (q \to r)) & \\
\equiv (\neg p \lor q) \land ((\neg r \lor \neg t) \land (\neg q \lor r)) & \text{[por (2)]} \\
\equiv \{\{\neg p, q\}, \{\neg r, \neg t\}, \{\neg q, r\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\neg(\neg t \leftrightarrow (\neg t \land p)) \to \neg(p \to \neg t) & \\
\equiv (t \lor (\neg t \land p)) \lor (p \land t) & \text{[por el apartado anterior]} \\
\equiv ((t \lor \neg t) \land (t \lor p)) \lor (p \land t) & \text{[por (6)]} \\
\equiv (\mathsf{V} \land (t \lor p)) \lor (p \land t) & \\
\equiv (t \lor p) \lor (p \land t) & \\
\equiv (t \lor p \lor p) \land (t \lor p \lor t) & \text{[por (6)]} \\
\equiv \{\{t, p\}\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\neg(r \to p) & \\
\equiv \neg(\neg r \lor p) & \text{[por (2)]} \\
\equiv \neg\neg r \land \neg p & \text{[por (4)]} \\
\equiv r \land \neg p & \text{[por (5)]} \\
\equiv \{\{r\}, \{\neg p\}\} &
\end{array}$$

Una resolución de las cláusulas obtenidas es

1	$\{\neg p, q\}$	
2	$\{\neg r, \neg t\}$	
3	$\{\neg q, r\}\}$	
4	$\{t, p\}$	
5	$\{r\}$	
6	$\{\neg p\}$	
7	$\{\neg t\}$	Resolvente de 2 y 5
8	$\{p\}$	Resolvente de 7 y 4
9	$\square$	Resolvente de 8 y 6

Ejercicio 27 *Consideremos el lenguaje de primer orden* $L = \{a, f, P, Q, R\}$ *y el conjunto de fórmulas de* L

$$
\begin{aligned}
S = \{ \; & (\forall x)[Q(x) \to R(x)], \\
& (\forall x)(\forall y)[P(x,y) \to P(y,x)], \\
& (\forall x)\neg P(x,x), \\
& (\forall x)[P(f(x),x) \to Q(f(x))], \\
& (\forall x)[R(x) \leftrightarrow P(x,f(x))], \\
& Q(f(a))\}
\end{aligned}
$$

1. *Defínase razonadamente un modelo $\mathcal{I}$ de S cuyo universo sea* $U = \{1,2,3,4,5\}$.

2. *Pruébese utilizando un modelo de Herbrand que* $S \not\models (\forall x)[R(x) \to Q(x)]$.

3. *Pruébese mediante resolución que* $S \models (\forall x)[R(x) \to R(f(x))]$.

Solución:

Solución del apartado 1: Tenemos que encontrar una estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ de L, con $U = \{1,2,3,4,5\}$, que sea modelo de las 6 fórmulas de S:

$$
\begin{aligned}
& F_1 : (\forall x)[Q(x) \to R(x)], \\
& F_2 : (\forall x)(\forall y)[P(x,y) \to P(y,x)], \\
& F_3 : (\forall x)\neg P(x,x), \\
& F_4 : (\forall x)[P(f(x),x) \to Q(f(x))], \\
& F_5 : (\forall x)[R(x) \leftrightarrow P(x,f(x))], \\
& F_6 : Q(f(a))
\end{aligned}
$$

Calculamos las consecuencias básicas de las fórmulas anteriores con sus argumentos limitados a los 5 primeros elementos del universo de Herbrand de L; es decir, $a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), f(f(f(f(a))))$ y $f(f(f(f(f(a)))))$

$F_7 :$	$R(f(a))$	[de F_6 y F_1]
$F_8 :$	$P(f(a), f(f(a)))$	[de F_7 y F_5]
$F_9 :$	$P(f(f(a)), f(a))$	[de F_8 y F_2]
$F_{10} :$	$Q(f(f(a)))$	[de F_9 y F_4]
$F_{11} :$	$R(f(f(a)))$	[de F_{10} y F_1]
$F_{12} :$	$P(f(f(a)), f(f(f(a))))$	[de F_{11} y F_5]
$F_{13} :$	$P(f(f(f(a))), f(f(a)))$	[de F_{12} y F_2]
$F_{14} :$	$Q(f(f(f(a))))$	[de F_{13} y F_4]
$F_{15} :$	$R(f(f(f(a))))$	[de F_{14} y F_1]
$F_{16} :$	$P(f(f(f(a))), f(f(f(f(a)))))$	[de F_{15} y F_5]
$F_{17} :$	$P(f(f(f(f(a)))), f(f(f(a))))$	[de F_{16} y F_2]
$F_{18} :$	$Q(f(f(f(f(a)))))$	[de F_{17} y F_4]
$F_{19} :$	$R(f(f(f(f(a)))))$	[de F_{18} y F_1]
$F_{20} :$	$P(f(f(f(f(a)))), f(f(f(f(f(a))))))$	[de F_{19} y F_5]
$F_{21} :$	$P(f(f(f(f(f(a))))), f(f(f(f(a)))))$	[de F_{20} y F_2]
$F_{22} :$	$Q(f(f(f(f(f(a))))))$	[de F_{21} y F_4]
$F_{23} :$	$R(f(f(f(f(f(a))))))$	[de F_{22} y F_1]

Las consecuencias anteriores, ordenadas, son:

$P(f(a), f(f(a)))$
$P(f(f(a)), f(a))$
$P(f(f(a)), f(f(f(a))))$
$P(f(f(f(a))), f(f(a)))$
$P(f(f(f(a))), f(f(f(f(a)))))$
$P(f(f(f(f(a)))), f(f(f(a))))$
$P(f(f(f(f(a)))), f(f(f(f(f(a))))))$
$P(f(f(f(f(f(a))))), f(f(f(f(a)))))$

$Q(f(a))$
$Q(f(f(a)))$
$Q(f(f(f(a))))$
$Q(f(f(f(f(a)))))$
$Q(f(f(f(f(f(a))))))$

$R(f(a))$
$R(f(f(a)))$
$R(f(f(f(a))))$
$R(f(f(f(f(a)))))$
$R(f(f(f(f(f(a))))))$

Un modelo de las consecuencias es

$a^I = 1,$
$f^I = \{(1, 2), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1)\},$
$P^I = \{(1, 2), (2, 1)\},$
$Q^I = \{1, 2\},$
$R^I = \{1, 2\}$

que puede comprobase fácilmente que es un modelo de S.

Solución del apartado 2: El universo de Herbrand de L es UH $= \{a, f(a), f(f(a)), \dots\}$. Un modelo de Herbrand de S en el que no se cumple la fórmula $(\forall x)[R(x) \to Q(x)]$ es

$$I = \{P(x, f(x)), P(f(x), x), Q(f(x)), R(x) : x \in \text{UH}\}.$$

Vamos a comprobarlo,

- $I \models (\forall x)[Q(x) \to R(x)]$, ya que R se cumple para todos los elementos de UH.
- $I \models (\forall x)(\forall y)[P(x, y) \to P(y, x)]$, ya que en P es simétrica en I.
- $I \models (\forall x)\neg P(x, x)$, ya que todas las ocurrencias de P en I tiene sus dos argumentos distintos.
- $I \models (\forall x)[P(f(x), x) \to Q(f(x))]$, ya que para todo $x \in$ UH, $Q(f(x)) \in I$.
- $I \models (\forall x)[R(x) \leftrightarrow P(x, f(x))$, ya que $R(x)$ y $P(x, f(x))$ se verifican en I para todo $x \in$ UH.
- $I \models Q(f(a))$, ya que $Q(f(a)) \in$ UH.
- $I \not\models (\forall x)[R(x) \to Q(x)]$, ya que $R(a) \in$ UH pero $Q(a) \notin$ UH.

Solución del apartado 3: En primer lugar, calculamos las formas clausales de las fórmulas de S y de la negación de $(\forall x)[R(x) \to R(f(x))]$:

$$\begin{array}{lll}
F_1: & (\forall x)[Q(x) \to R(x)] & \\
\equiv & (\forall x)[\neg Q(x) \lor R(x)] & \text{[por (2)]} \\
\equiv & \{\{\neg Q(x), R(x)\}\} & \\
F_2: & (\forall x)(\forall y)[P(x,y) \to P(y,x)] & \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg P(x,y) \lor P(y,x)] & \text{[por (2)]} \\
\equiv & \{\{\neg P(x,y), P(y,x)\}\} & \\
F_3: & (\forall x)\neg P(x,x) & \\
\equiv & \{\{\neg P(x,x)\}\} & \\
F_4: & (\forall x)[P(f(x),x) \to Q(f(x))] & \\
\equiv & (\forall x)[\neg P(f(x),x) \lor Q(f(x))] & \text{[por (2)]} \\
\equiv & \{\{\neg P(f(x),x), Q(f(x))\}\} & \\
F_5: & (\forall x)[R(x) \leftrightarrow P(x,f(x))] & \\
\equiv & (\forall x)[(R(x) \to P(x,f(x))) \land (P(x,f(x)) \to R(x))] & \text{[por (1)]} \\
\equiv & (\forall x)[(\neg R(x) \lor P(x,f(x))) \land (\neg P(x,f(x)) \lor R(x))] & \text{[por (2)]} \\
\equiv & \{\{\neg R(x), P(x,f(x))\}, \{\neg P(x,f(x)), R(x)\}\} & \\
F_6: & Q(f(a)) & \\
\equiv & \{\{Q(f(a))\}\} & \\
 & \neg(\forall x)[R(x) \to R(f(x))] & \\
\equiv & \neg(\forall x)[\neg R(x) \lor R(f(x))] & \text{[por (2)]} \\
\equiv & (\exists x)\neg(\neg R(x) \lor R(f(x))) & \text{[por (8)]} \\
\equiv & (\exists x)(\neg\neg R(x) \land \neg R(f(x))) & \text{[por (6)]} \\
\equiv & (\exists x)(R(x) \land \neg R(f(x))) & \text{[por (7)]} \\
\equiv_{sat} & R(b) \land \neg R(f(b)) & [b \text{ constante de Skolem}] \\
\equiv_{sat} & \{\{R(b)\}, \{\neg R(f(b))\}\} &
\end{array}$$

Una resolución de las cláusulas obtenidas es

$$\begin{array}{rll}
1 & \{\neg Q(x), R(x)\} & \\
2 & \{\neg P(x,y), P(y,x)\} & \\
3 & \{\neg P(x,x)\} & \\
4 & \{\neg P(f(x),x), Q(f(x))\} & \\
5 & \{\neg R(x), P(x,f(x))\} & \\
6 & \{\neg P(x,f(x)), R(x)\} & \\
7 & \{R(b)\} & \\
8 & \{\neg R(f(b))\} & \\
9 & \{\neg Q(f(b))\} & \text{Resolvente de } 8 \text{ y } 1 \\
10 & \{P(b,f(b))\} & \text{Resolvente de } 7 \text{ y } 5 \\
11 & \{P(f(b),b)\} & \text{Resolvente de } 10 \text{ y } 2 \\
12 & \{Q(f(b))\} & \text{Resolvente de } 11 \text{ y } 4 \\
13 & \square & \text{Resolvente de } 12 \text{ y } 9
\end{array}$$

Ejercicio 28 *Hállense formas prenexa, de Skolem y clausal de la siguiente fórmula:*

$$(\forall x)[(\exists z)P(z) \to Q(x)] \to ((\forall z)A(y,z) \to (\exists u)B(y,u))$$

Solución:

1.– Forma prenexa:

$$\begin{array}{lll}
& (\forall x)[(\exists z)P(z) \to Q(x)] \to ((\forall z)A(y,z) \to (\exists u)B(y,u)) & \\
\equiv & (\forall x)[(\exists z)P(z) \to Q(x)] \to ((\forall v)A(y,v) \to (\exists u)B(y,u)) & \text{[por rectificación]} \\
\equiv & \neg(\forall x)[\neg(\exists z)P(z) \vee Q(x)] \vee (\neg(\forall v)A(y,v) \vee (\exists u)B(y,u)) & \text{[por (2)]} \\
\equiv & (\exists x)[\neg(\neg(\exists z)P(z) \vee Q(x))] \vee ((\exists v)\neg A(y,v) \vee (\exists u)B(y,u)) & \text{[por (8)]} \\
\equiv & (\exists x)[\neg\neg(\exists z)P(z) \wedge \neg Q(x)] \vee ((\exists v)\neg A(y,v) \vee (\exists u)B(y,u)) & \text{[por (6)]} \\
\equiv & (\exists x)[(\exists z)P(z) \wedge \neg Q(x)] \vee ((\exists v)\neg A(y,v) \vee (\exists u)B(y,u)) & \text{[por (7)]} \\
\equiv & (\exists x)(\exists z)(\exists v)(\exists u)[(P(z) \wedge \neg Q(x)) \vee (\neg A(y,v) \vee B(y,u))] & \text{[por (11)–(18)]}
\end{array}$$

2.– Forma de Skolem:

$$\begin{array}{lll}
& (\forall x)[(\exists z)P(z) \to Q(x)] \to ((\forall z)A(y,z) \to (\exists u)B(y,u)) & \\
\equiv_{sat} & (\exists y)[(\forall x)[(\exists z)P(z) \to Q(x)] \to ((\forall z)A(y,z) \to (\exists u)B(y,u))] & \text{[cierre existencial]} \\
\equiv & (\exists y)(\exists x)(\exists z)(\exists v)(\exists u)[(P(z) \wedge \neg Q(x)) \vee (\neg A(y,v) \vee B(y,u))] & \text{[por anterior]} \\
\equiv & (P(c) \wedge \neg Q(b)) \vee (\neg A(a,d) \vee B(a,e)) & \text{[constantes de Skolem]}
\end{array}$$

3.– Forma clausal

$$\begin{array}{lll}
& (\forall x)[(\exists z)P(z) \to Q(x)] \to ((\forall z)A(y,z) \to (\exists u)B(y,u)) & \\
\equiv_{sat} & (P(c) \wedge \neg Q(b)) \vee (\neg A(a,d) \vee B(a,e)) & \text{[anterior]} \\
\equiv & (P(c) \vee (\neg A(a,d) \vee B(a,e))) \wedge (\neg Q(b) \vee (\neg A(a,d) \vee B(a,e))) & \text{[por (20)]} \\
\equiv & \{\{(P(c), \neg A(a,d), B(a,e)\}, \{\neg Q(b), \neg A(a,d), B(a,e)\}\} &
\end{array}$$

Examen de Junio de 2004

Ejercicio 29 *Probar* $(E \vee F) \to G \models (E \to G) \wedge (F \to G)$

(a) Mediante deducción natural.

(b) Por resolución.

Solución:

Solución del apartado (a): Demostración por deducción natural:

1	$(E \vee F) \to G$	premisa
2	E	supuesto
3	$E \vee F$	$\mathcal{I}_\vee\ 2$
4	G	$\mathcal{E}_\to\ 1, 3$
5	$E \to G$	$\mathcal{I}_\to\ 2-4$
6	F	supuesto
7	$E \vee F$	$\mathcal{I}_\vee\ 6$
8	G	$\mathcal{E}_\to\ 1, 7$
9	$F \to G$	$\mathcal{I}_\to\ 6-8$
10	$(E \to G) \wedge (F \to G)$	$\mathcal{I}_\wedge\ 5, 9$

Solución del apartado (b): Demostración por resolución: En primer lugar se transforma la premisa a forma clausal:

$$
\begin{array}{lll}
 & (E \vee F) \to G & \\
\equiv & \neg(E \vee F) \vee G & \text{[por (2)]} \\
\equiv & (\neg E \wedge \neg F) \vee G & \text{[por (4)]} \\
\equiv & (\neg E \vee G) \wedge (\neg F \vee G) & \text{[por (7)]} \\
\equiv & \{\{\neg E, G\}, \{\neg F, G\}\} &
\end{array}
$$

A continuación, se transforma la negación de la conclusión a forma clausal:

$$
\begin{array}{lll}
 & \neg((E \to G) \wedge (F \to G)) & \\
\equiv & \neg((\neg E \vee G) \wedge (\neg F \vee G)) & \text{[por (2)]} \\
\equiv & \neg(\neg E \vee G) \vee \neg(\neg F \vee G) & \text{[por (3)]} \\
\equiv & (\neg\neg E \wedge \neg G) \vee (\neg\neg F \wedge \neg G) & \text{[por (4)]} \\
\equiv & (E \wedge \neg G) \vee (F \wedge \neg G) & \text{[por (5)]} \\
\equiv & ((E \wedge \neg G) \vee F) \wedge ((E \wedge \neg G) \vee \neg G) & \text{[por (6)]} \\
\equiv & ((E \vee F) \wedge (\neg G \vee F)) \wedge ((E \vee \neg G) \wedge (\neg G \vee \neg G)) & \text{[por (7)]} \\
\equiv & \{\{E, F\}, \{\neg G, F\}, \{E, \neg G\}, \{\neg G\}\} &
\end{array}
$$

Finalmente, se construye una refutación de las cláusulas obtenidas:

1	$\{\neg E, G\}$	
2	$\{\neg F, G\}$	
3	$\{E, F\}$	
4	$\{\neg G, F\}$	
5	$\{E, \neg G\}$	
6	$\{\neg G\}$	
7	$\{\neg E\}$	Resolvente de 1 y 6
8	$\{\neg F\}$	Resolvente de 2 y 6
9	$\{F\}$	Resolvente de 3 y 7
10	$\square$	Resolvente de 8 y 9

Ejercicio 30 *El ejercicio tiene tres apartados.*

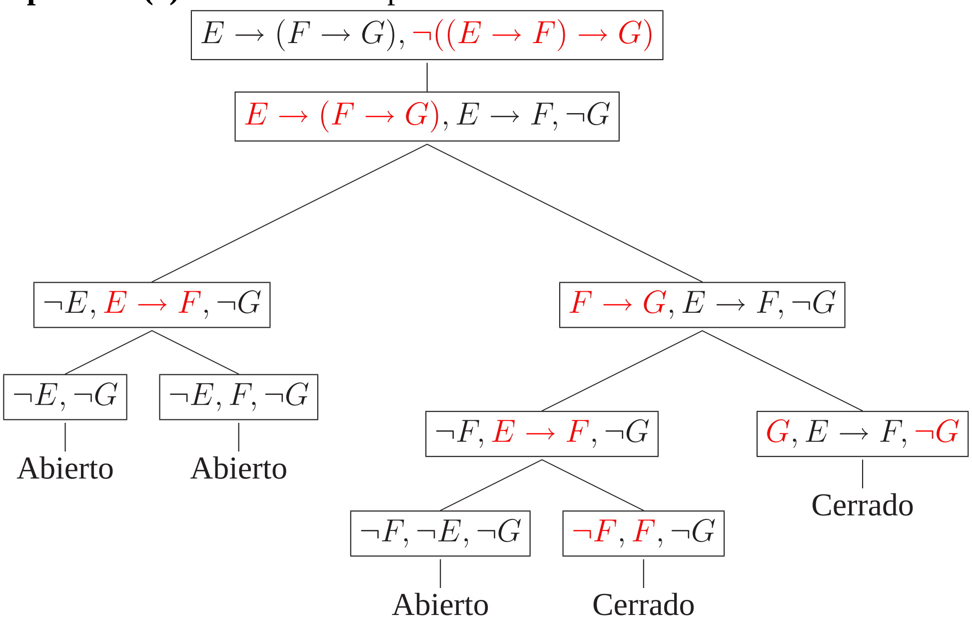
(a) Pruébese que $E \to (F \to G) \not\models (E \to F) \to G$ mediante tableros semánticos.

(b) Descríbanse todos los modelos de $E \to (F \to G)$ que no son modelos de $(E \to F) \to G$.

(c) La fórmula $E \to (F \to G) \to (E \to F) \to G$, ¿es una tautología? Razónese la respuesta.

Solución:

Solución del apartado (a): Demostración por tableros semánticos:



Solución del apartado (b): Los modelos de $E \to (F \to G)$ que no son modelos de la fórmula $(E \to F) \to G$ son los modelos de las hojas abiertas del árbol anterior; es decir, cualquier valoración v tal que $v(E) = 0$ y $v(G) = 0$.

Solución del apartado (c): La fórmula $E \to (F \to G) \to (E \to F) \to G$ no es una tautología, porque si lo fuera se tendría que $E \to (F \to G) \models (E \to F) \to G$ en contradicción con el apartado (a).

Ejercicio 31 *Sea L un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado, Q, (de aridad 2) y un símbolo de función, f, (de aridad 1). Se considera la estructura $\mathcal{I}$ dada por: Universo: $\{a, b\}$, Q^I =*

$\{(a,b),\ (b,a)\}$, $f^I(a) = a$ *y* $f^I(b) = a$. *Decidir cuáles de las siguientes fórmulas se satisfacen en la estructura:*

1. $(\forall x)[Q(f(x),x) \to Q(x,x)]$
2. $(\exists x)[Q(f(x),x) \to Q(x,x)]$

Solución:

Solución para la primera fórmula:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}((\forall x)[Q(f(x),x) \to Q(x,x)]) = \mathsf{V} \Leftrightarrow\ & \mathcal{I}_{[x/a]}(Q(f(x),x) \to Q(x,x)) = \mathsf{V} \text{ y} \\ & \mathcal{I}_{[x/b]}(Q(f(x),x) \to Q(x,x)) = \mathsf{V}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{[x/a]}(Q(f(x),x) \to Q(x,x)) &= Q^I(f^I(a),a) \to Q^I(a,a) = \\ &= Q^I(a,a) \to Q^I(a,a) = \\ &= \mathsf{F} \to \mathsf{F} = \\ &= \mathsf{V}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{[x/b]}(Q(f(x),x) \to Q(x,x)) &= Q^I(f^I(b),b) \to Q^I(b,b) = \\ &= Q^I(a,b) \to Q^I(b,b) = \\ &= \mathsf{V} \to \mathsf{F} = \\ &= \mathsf{F}\end{aligned}$$

Por tanto, $\mathcal{I}((\forall x)[Q(f(x),x) \to Q(x,x)]) = \mathsf{F}$

Solución para la segunda fórmula:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}((\exists x)[Q(f(x),x) \to Q(x,x)]) = \mathsf{V} \Leftrightarrow\ & \mathcal{I}_{[x/a]}(Q(f(x),x) \to Q(x,x)) = \mathsf{V} \text{ ó} \\ & \mathcal{I}_{[x/b]}(Q(f(x),x) \to Q(x,x)) = \mathsf{V}\end{aligned}$$

$$\mathcal{I}_{[x/a]}(Q(f(x),x) \to Q(x,x)) = \mathsf{V}$$

Por tanto, $\mathcal{I}((\exists x)[Q(f(x),x) \to Q(x,x)]) = \mathsf{V}$

Ejercicio 32 *Sabemos que*

1. *Cualquiera que estudie lo suficiente aprueba todas las asignaturas.*
2. *Cuando alguien que celebra su cumpleaños en julio ha aprobado todas las asignaturas, se le obsequia con un regalo.*
3. *Quien recibe un regalo sin estudiar lo suficiente, nunca es obsequiado con un móvil.*
4. *Pablo es un alumno que, a pesar de no estudiar lo suficiente, recibió un móvil como regalo.*

Se pide:

(a) *Formalizar los conocimientos anteriores teniendo en cuenta que los predicados del texto se representan así:* $C(x)$ = *"x celebra su cumpleaños en julio";* $A(x)$ = *"x ha aprobado todas las asignaturas";* $S(x)$ = *"x estudia lo suficiente";* $R(x,y)$ = *"x recibe el regalo y". Y las constantes a y b representan respectivamente a Pablo y al móvil.*

(b) *Obtener el conjunto de cláusulas de las fórmulas anteriores y probar que es inconsistente dando un subconjunto de su extensión de Herbrand que lo sea.*

(c) Probar, mediante resolución, que el enunciado "Si Pablo recibe un móvil como regalo, entonces ha aprobado todas las asignaturas" es consecuencia lógica de los enunciados 1 y 3.

Solución:

Solución del apartado (a): Formalización del discurso:

$$
\begin{array}{ll}
F_1: & (\forall x)[S(x) \to A(x)] \\
F_2: & (\forall x)[C(x) \land A(x) \to (\exists y)R(x,y)] \\
F_3: & (\forall x)[(\exists y)R(x,y) \land \neg S(x) \to \neg R(x,b)] \\
F_4: & \neg S(a) \land R(a,b)
\end{array}
$$

Solución del apartado (b.1): Cálculo del conjunto de cláusulas de las fórmulas anteriores:

$$
\begin{array}{lll}
F_1: & (\forall x)[S(x) \to A(x)] & \\
\equiv & (\forall x)[\neg S(x) \lor A(x)] & \text{[por (4)]} \\
\equiv & \{\{\neg S(x), A(x)\}\} & \text{[por (4)]}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
F_2: & (\forall x)[C(x) \land A(x) \to (\exists y)R(x,y)] & \\
\equiv & (\forall x)[\neg(C(x) \land A(x)) \lor (\exists y)R(x,y)] & \text{[por (4)]} \\
\equiv & (\forall x)[(\neg C(x) \lor \neg A(x)) \lor (\exists y)R(x,y)] & \text{[por (5)]} \\
\equiv & (\forall x)(\exists y)[\neg C(x) \lor \neg A(x) \lor R(x,y)] & \text{[por (18)]} \\
\equiv_{sat} & (\forall x)[\neg C(x) \lor \neg A(x) \lor R(x,f(x))] & [f \text{ función de Skolem}] \\
\equiv & \{\{\neg C(x), \neg A(x), R(x,f(x))\}\} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
F_3: & (\forall x)[(\exists y)R(x,y) \land \neg S(x) \to \neg R(x,b)] & \\
\equiv & (\forall x)[\neg((\exists y)R(x,y) \land \neg S(x)) \lor \neg R(x,b)] & \text{[por (4)]} \\
\equiv & (\forall x)[(\neg(\exists y)R(x,y) \lor \neg\neg S(x)) \lor \neg R(x,b)] & \text{[por (5)]} \\
\equiv & (\forall x)[\neg(\exists y)R(x,y) \lor S(x)) \lor \neg R(x,b)] & \text{[por (7)]} \\
\equiv & (\forall x)[((\forall y)\neg R(x,y) \lor S(x)) \lor \neg R(x,b)] & \text{[por (9)]} \\
\equiv & (\forall x)[(\forall y)[\neg R(x,y) \lor S(x)] \lor \neg R(x,b)] & \text{[por (12)]} \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg R(x,y) \lor S(x) \lor \neg R(x,b)] & \text{[por (12)]} \\
\equiv & \{\{\neg R(x,y), S(x), \neg R(x,b)\}\} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
F_4: & \neg S(a) \land R(a,b) \\
\equiv & \{\{\neg S(a)\}, \{R(a,b)\}\}
\end{array}
$$

Solución del apartado (b.2): Demostración de la inconsistencia del conjunto de cláusulas:

$$
\begin{array}{lll}
1 & \{\neg S(x), A(x)\} & \\
2 & \{\neg C(x), \neg A(x), R(x,f(x))\} & \\
3 & \{\neg R(x,y), S(x), \neg R(x,b)\} & \\
4 & \{\neg S(a)\} & \\
5 & \{R(a,b)\} & \\
6 & \{S(a)\} & \text{Resolvente de } 3 \text{ y } 5 \text{ con } \sigma_1 = [x/a, y/b] \\
7 & \square & \text{Resolvente de } 6 \text{ y } 4 \text{ con } \sigma_2 = \epsilon
\end{array}
$$

Por tanto, un subconjunto de su extensión de Herbrand inconsistente es el formado por

$C_3\sigma_1 = \{\neg R(a,b), S(a)\}$
$C_5\sigma_1 = \{R(a,b)\}$
$C_4\sigma_2 = \{\neg S(a)\}$

Solución del apartado (c): La formalización de la conclusión es

$R(a,b) \to A(a)$

La forma clausal de su negación es

$\{\{R(a,b)\}, \{\neg A(a)\}\}$

La demostración por resolución es

1	$\{\neg S(x), A(x)\}$	
2	$\{\neg R(x,y), S(x), \neg R(x,b)\}$	
3	$\{R(a,b)\}$	
4	$\{\neg A(a)\}$	
5	$\{S(a)\}$	Resolvente de 3 y 5 con $\sigma = [x/a, y/b]$
6	$\{A(a)\}$	Resolvente de 5 y 1 con $\sigma = [x/a]$
6	$\square$	Resolvente de 6 y 4 con $\sigma_2 = \epsilon$

Examen de Septiembre de 2004

Ejercicio 33 *En un texto de Lewis Carroll, el tío Jorge y el tío Jaime discuten acerca de la barbería del pueblo, atendida por tres barberos: Alberto, Benito y Carlos. Los dos tíos aceptan las siguientes premisas:*

1. *Si Carlos no está en la barbería, entonces ocurrirá que si tampoco está Alberto, Benito tendrá que estar para atender el establecimiento.*
2. *Si Alberto no está, tampoco estará Benito.*

El tío Jorge concluye de todo esto que Carlos no puede estar ausente, mientras que el tío Jaime afirma que sólo puede concluirse que Carlos y Alberto no pueden estar ausentes a la vez. Decidir con el método de los tableros semánticos cuál de los dos tiene razón.

Solución:

En la representación del problema usaremos los siguientes símbolos proposicionales

a representa que Alberto está en la barbería
b representa que Benito está en la barbería
c representa que Carlos está en la barbería

Luego,

$\neg a$ representa que Alberto está ausente
$\neg b$ representa que Benito está ausente
$\neg c$ representa que Carlos está ausente

Con dicha notación, la representación de la primera premisa es

$\neg c \rightarrow (\neg a \rightarrow b)$

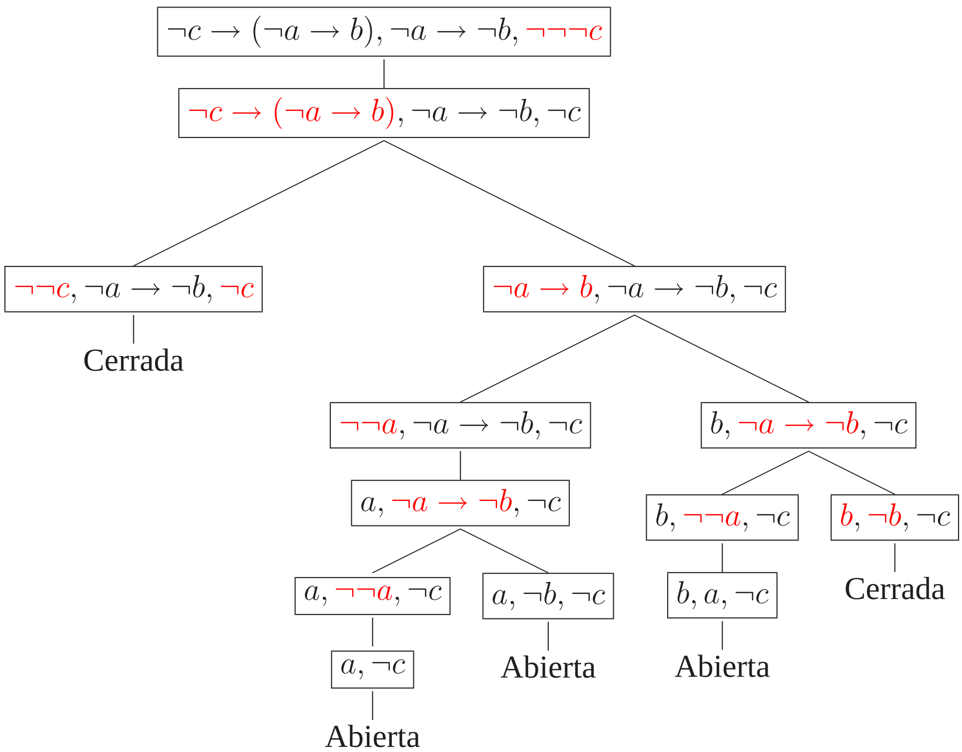
y la de la segunda es

$\neg a \rightarrow \neg b$

La representación de la conclusión del tío Jorge es $\neg\neg c$. Por tanto, el tío Jorge tiene razón si

$\{\neg c \rightarrow (\neg a \rightarrow b), \neg a \rightarrow \neg b\} \models \neg\neg c$

o, equivalentemente, si $\{\neg c \rightarrow (\neg a \rightarrow b), \neg a \rightarrow \neg b, \neg\neg\neg c\}$ es inconsistente. Puesto que el árbol

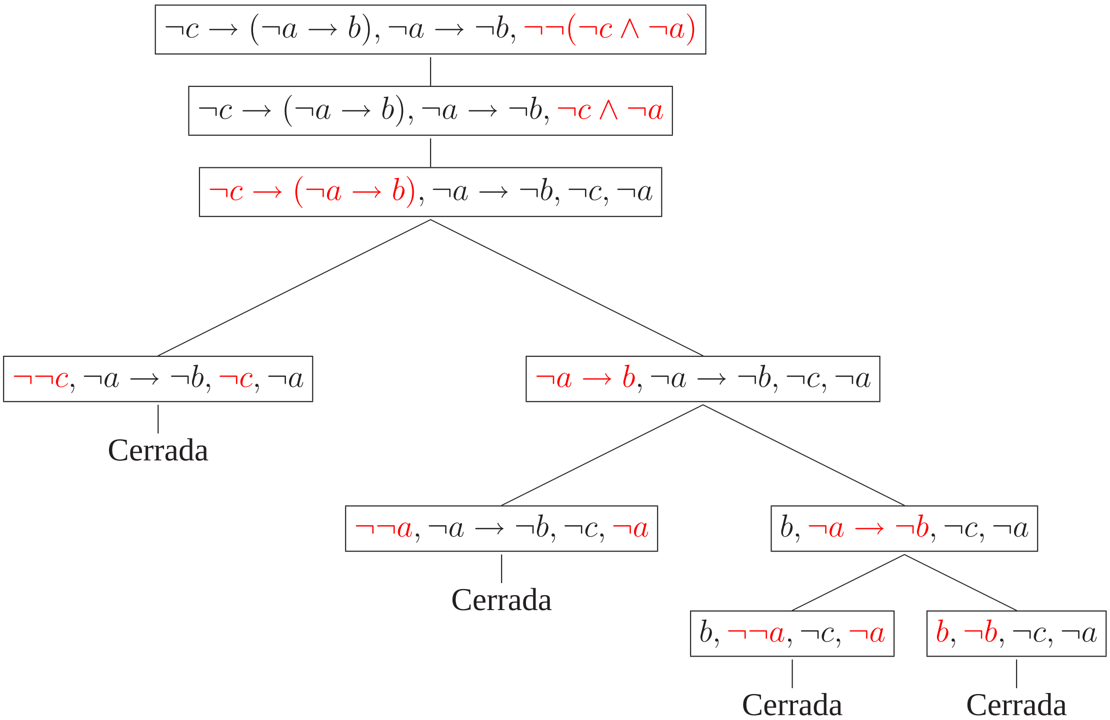


no es cerrado, el conjunto $\{\neg c \rightarrow (\neg a \rightarrow b), \neg a \rightarrow \neg b, \neg c\}$ es consistente (por ejemplo, es posible que Alberto esté en la barbería y Carlos no esté). Por tanto, el tío Jorge no tiene razón.

La representación de la conclusión del tío Jaime es $\neg(\neg c \wedge \neg a)$. Por tanto, el tío Jaime tiene razón si

$$\{\neg c \rightarrow (\neg a \rightarrow b), \neg a \rightarrow \neg b\} \models \neg(\neg c \wedge \neg a)$$

o, equivalentemente, si $\{\neg c \rightarrow (\neg a \rightarrow b), \neg a \rightarrow \neg b, \neg\neg(\neg c \wedge \neg a)\}$ es inconsistente. Puesto que el árbol



es cerrado, el conjunto $\{\neg c \rightarrow (\neg a \rightarrow b), \neg a \rightarrow \neg b, \neg\neg(\neg c \wedge \neg a)\}$ es inconsistente. Por tanto, el tío Jaime tiene razón.

Ejercicio 34 *Probar que la fórmula $(E \rightarrow (F \wedge G)) \rightarrow (E \rightarrow F) \vee (E \rightarrow G)$ es una tautología*

(a) *Mediante deducción natural.*

(b) *Usando formas normales.*

(c) *Por tableros semánticos.*

Solución:

Solución del apartado (a): Deducción natural:

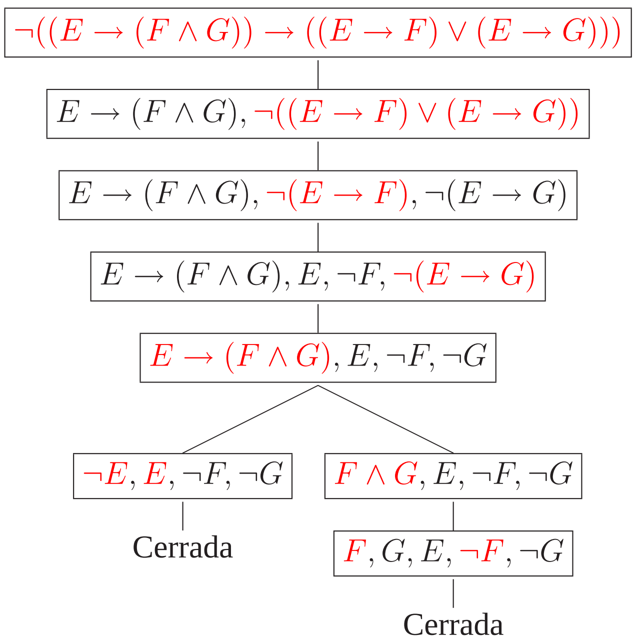
1	$(E \rightarrow (F \wedge G)$	supuesto
2	E	supuesto
3	$F \wedge G$	$\mathcal{E}_{\rightarrow}\ 1,2$
4	F	$\mathcal{E}_{\wedge}\ 3$
5	$E \rightarrow F$	$\mathcal{I}_{\rightarrow}\ 2-4$
6	$(E \rightarrow F) \vee (E \rightarrow G)$	$\mathcal{I}_{\vee}\ 5$
7	$(E \rightarrow (F \wedge G) \rightarrow (E \rightarrow F) \vee (E \rightarrow G)$	$\mathcal{I}_{\rightarrow}\ 1-6$

Solución del apartado (b): Forma normal conjuntiva:

$$
\begin{array}{lll}
 & (E \rightarrow (F \wedge G)) \rightarrow (E \rightarrow F) \vee (E \rightarrow G) & \\
\equiv & \neg(\neg E \vee (F \wedge G)) \vee (\neg E \vee F) \vee (\neg E \vee G) & \text{[por (2)]} \\
\equiv & (\neg\neg E \wedge \neg(F \wedge G)) \vee (\neg E \vee F) \vee (\neg E \vee G) & \text{[por (4)]} \\
\equiv & (E \wedge (\neg F \vee \neg G)) \vee (\neg E \vee F) \vee (\neg E \vee G) & \text{[por (3) y (5)]} \\
\equiv & (E \wedge (\neg F \vee \neg G)) \vee (\neg E \vee F \vee G) & \\
\equiv & (E \vee (\neg E \vee F \vee G)) \wedge ((\neg F \vee \neg G) \vee (\neg E \vee F \vee G)) & \text{[por (7)]} \\
\equiv & (E \vee \neg E \vee F \vee G) \wedge (\neg F \vee \neg G \vee \neg E \vee F \vee G) &
\end{array}
$$

Puesto que en cada una de las dos conjunciones hay un par de literales complementarios, la fórmula es una tautología.

Solución del apartado (c): Tablero semántico:



Ejercicio 35 *Probar la inconsistencia del conjunto de fórmulas:*

$$U = \{\neg E \rightarrow F \vee G,\ E \rightarrow F \vee G,\ G \rightarrow F,\ F \rightarrow E,\ E \rightarrow \neg F\}$$

(a) Demostrando que no tiene modelos.

(b) Por resolución

Solución:

Solución del apartado (a): Cálculo de modelos de U

E	F	G	$\neg E \to F \lor G$	$E \to F \lor G$	$G \to F$	$F \to E$	$E \to \neg F$
1	1	1					0
1	1	0					0
1	0	1			0		
1	0	0		0			
0	1	1				0	
0	1	0				0	
0	0	1			0		
0	0	0	0				

Puesto que cada una de las 8 interpretaciones falsifica alguna fórmula de U, el conjunto U no tiene modelos.

Solución del apartado (b): Las formas clausales de las fórmulas de U son

$$\begin{array}{ll} & \neg E \to F \lor G \\ \equiv & \neg\neg E \lor F \lor G \quad \text{[por (2)]} \\ \equiv & E \lor F \lor G \quad \text{[por (5)]} \\ \equiv & \{\{E, F, G\}\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & E \to F \lor G \\ \equiv & \neg E \lor F \lor G \quad \text{[por (2)]} \\ \equiv & \{\{\neg E, F, G\}\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & G \to F \\ \equiv & \neg G \lor F \quad \text{[por (2)]} \\ \equiv & \{\{\neg G, F\}\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & F \to E \\ \equiv & \neg F \lor E \quad \text{[por (2)]} \\ \equiv & \{\{\neg F, E\}\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & E \to \neg F \\ \equiv & \neg E \lor \neg F \quad \text{[por (2)]} \\ \equiv & \{\{\neg E, \neg F\}\} \end{array}$$

Una refutación de U por resolución es

$$\begin{array}{rll} 1 & \{E, F, G\} & \\ 2 & \{\neg E, F, G\} & \\ 3 & \{\neg G, F\} & \\ 4 & \{\neg F, E\} & \\ 5 & \{\neg E, \neg F\} & \\ 6 & \{\neg F\} & \text{Resolvente de 4 y 5} \\ 7 & \{\neg G\} & \text{Resolvente de 6 y 3} \\ 8 & \{E, G\} & \text{Resolvente de 1 y 6} \\ 9 & \{E\} & \text{Resolvente de 8 y 7} \\ 10 & \{F, G\} & \text{Resolvente de 2 y 10} \\ 11 & \{G\} & \text{Resolvente de 10 y 6} \\ 12 & \square & \text{Resolvente de 11 y 7} \end{array}$$

Ejercicio 36 *Sea L un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado P de aridad 2.*

(a) Probar que las fórmulas $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$ y $(\exists x)(\forall y)P(x,y)$ no son equivalentes dando una estructura que sea modelo de la primera pero no de la segunda.

(b) En la estructura M cuyo universo es $|M| = \{a,b,c\}$ y $P^M = \{(a,a),(a,b),(a,c)\}$, ¿cuáles de las siguientes fórmulas se satisfacen y cuáles no?

1. $(\forall x)(\exists y)P(x,y) \to (\exists x)(\forall y)P(x,y)$
2. $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \to (\forall x)(\exists y)P(x,y)$
3. $\neg[(\forall x)(\exists y)P(x,y) \land (\exists x)(\forall y)P(x,y)]$

Solución:

Solución del apartado (a): Basta encontrar un modelo de Herbrand de

$S = \{(\forall x)(\exists y)P(x,y), \neg(\exists x)(\forall y)P(x,y)\}$

Para ello calculamos una forma clausal del conjunto anterior

$$\begin{array}{ll} & (\forall x)(\exists y)P(x,y) \\ \equiv_{sat} & (\forall x)P(x,f(x)) \quad [f \text{ función de Skolem}] \\ \equiv & \{\{P(x,f(x))\}\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & \neg(\exists x)(\forall y)P(x,y) \\ \equiv & (\forall x)(\exists y)\neg P(x,y) \\ \equiv_{sat} & (\forall x)\neg P(x,g(x)) \quad [g \text{ función de Skolem}] \\ \equiv & \{\{\neg P(x,g(x))\}\} \end{array}$$

Una forma clausal de S es $\{\{P(x,f(x))\},\{\neg P(x,g(x))\}\}$.

El universo de Herbrand de S es $\text{UH}(S) = \{a, f(a), f(f(a)), \dots, g(a), g(g(a)), \dots\}$. Un modelo de Herbrand de S es $\mathcal{I} = \{P(x,f(x)) : x \in \text{UH}(S)\}$.

Solución del apartado (b.1):

$$\mathcal{M}((\forall x)(\exists y)P(x,y) \to (\exists x)(\forall y)P(x,y)) = H_{\to}(\mathcal{M}((\forall x)(\exists y)P(x,y)), \mathcal{M}((\exists x)(\forall y)P(x,y))) \quad (1)$$

$$\mathcal{M}((\forall x)(\exists y)P(x,y)) = \mathsf{V} \iff \begin{array}{l} \mathcal{M}_{[x/a]}((\exists y)P(x,y)) = \mathsf{V} \text{ y} \\ \mathcal{M}_{[x/b]}((\exists y)P(x,y)) = \mathsf{V} \text{ y} \\ \mathcal{M}_{[x/c]}((\exists y)P(x,y)) = \mathsf{V} \end{array} \quad (2)$$

$$\mathcal{M}_{[x/b]}((\exists y)P(x,y)) = \mathsf{V} \iff \begin{array}{l} \mathcal{M}_{[x/b,y/a]}(P(x,y)) = \mathsf{V} \text{ o} \\ \mathcal{M}_{[x/b,y/b]}(P(x,y)) = \mathsf{V} \text{ o} \\ \mathcal{M}_{[x/b,y/c}(P(x,y)) = \mathsf{V} \end{array} \quad (3)$$

$$\mathcal{M}_{[x/b,y/a]}(P(x,y)) = P^M(b,a) = \mathsf{F} \quad (4)$$

$$\mathcal{M}_{[x/b,y/b]}(P(x,y)) = P^M(b,b) = \mathsf{F} \quad (5)$$

$$\mathcal{M}_{[x/b,y/c]}(P(x,y)) = P^M(b,c) = \mathsf{F} \quad (6)$$

De (3), (4), (5) y (6) se tiene

$$\mathcal{M}_{[x/b]}((\exists y)P(x,y)) = \mathsf{F} \tag{7}$$

De (7) y (2) se tiene

$$\mathcal{M}((\forall x)(\exists y)P(x,y)) = \mathsf{F} \tag{8}$$

De (8) y (1) se tiene

$$\mathcal{M}((\forall x)(\exists y)P(x,y) \to (\exists x)(\forall y)P(x,y)) = \mathsf{V}$$

Solución del apartado (b.2):

$$\mathcal{M}((\exists x)(\forall y)P(x,y) \to (\forall x)(\exists y)P(x,y)) = H_\to(\mathcal{M}((\exists x)(\forall y)P(x,y)), \mathcal{M}((\forall x)(\exists y)P(x,y))) \tag{9}$$

$$\mathcal{M}((\exists x)(\forall y)P(x,y)) = \mathsf{V} \iff \begin{array}{l} \mathcal{M}_{[x/a]}((\forall y)P(x,y)) = \mathsf{V} \text{ o} \\ \mathcal{M}_{[x/b]}((\forall y)P(x,y)) = \mathsf{V} \text{ o} \\ \mathcal{M}_{[x/c]}((\forall y)P(x,y)) = \mathsf{V} \end{array} \tag{10}$$

$$\mathcal{M}_{[x/a]}((\forall y)P(x,y)) = \mathsf{V} \iff \begin{array}{l} \mathcal{M}_{[x/a,y/a]}(P(x,y)) = \mathsf{V} \text{ y} \\ \mathcal{M}_{[x/a,y/b]}(P(x,y)) = \mathsf{V} \text{ y} \\ \mathcal{M}_{[x/a,y/c]}(P(x,y)) = \mathsf{V} \end{array} \tag{11}$$

$$\mathcal{M}_{[x/a,y/a]}(P(x,y)) = P^M(a,a) = \mathsf{V} \tag{12}$$

$$\mathcal{M}_{[x/a,y/b]}(P(x,y)) = P^M(a,b) = \mathsf{V} \tag{13}$$

$$\mathcal{M}_{[x/a,y/c]}(P(x,y)) = P^M(a,c) = \mathsf{V} \tag{14}$$

De (11), (12), (13) y (14) se tiene

$$\mathcal{M}_{[x/a]}((\forall y)P(x,y)) = \mathsf{V} \tag{15}$$

De (10) y (15) se tiene

$$\mathcal{M}((\exists x)(\forall y)P(x,y)) = \mathsf{V} \tag{16}$$

De (9), (16) y (8) se tiene

$$\mathcal{M}((\exists x)(\forall y)P(x,y) \to (\forall x)(\exists y)P(x,y)) = H_\to(\mathsf{V},\mathsf{F}) = \mathsf{F}$$

Solución del apartado (b.3):

$$\begin{array}{ll} & \mathcal{M}(\neg[(\forall x)(\exists y)P(x,y) \land (\exists x)(\forall y)P(x,y)]) \\ = & H_\neg(\mathcal{M}((\forall x)(\exists y)P(x,y) \land (\exists x)(\forall y)P(x,y))) \\ = & H_\neg(H_\land(\mathcal{M}((\forall x)(\exists y)P(x,y)), \mathcal{M}((\exists x)(\forall y)P(x,y)))) \\ = & H_\neg(H_\land(\mathsf{F},\mathsf{V})) \qquad \text{[por (8) y (16)]} \\ = & H_\neg(\mathsf{F}) \\ = & \mathsf{V} \end{array}$$

Ejercicio 37 *Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones se cumplen. Para ello, dar una prueba por resolución y otra por deducción natural de cada una de las válidas y calcular un modelo de Herbrand de las que no lo son.*

1. $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \models (\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$
2. $(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \models (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$
3. $(\exists x)[P(x) \wedge Q(x)] \models (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$

Solución:

Solución del apartado (1): Para decidir si $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \models (\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$, basta comprobar si $S = \{(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x), \neg(\forall x)[P(x) \vee Q(x)]\}$ es inconsistente. Comprobaremos la inconsistencia de S por resolución. Para ello, comenzamos calculando una forma clausal de S.

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \\
\equiv & (\forall x)P(x) \vee (\forall y)Q(y) \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[P(x) \vee Q(y)] \\
\equiv & \{\{P(x), Q(y)\}\} \\
 & \neg(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \\
\equiv & (\exists x)\neg(P(x) \vee Q(x)) \\
\equiv & (\exists x)[\neg P(x) \wedge \neg Q(x)] \\
\equiv_{sat} & \neg P(a) \wedge \neg Q(a) \\
\equiv & \{\{\neg P(a)\}, \{\neg Q(a)\}\}
\end{array}
$$

Una demostración por resolución de S es

1	$\{P(x), Q(y)\}$	
2	$\{\neg P(a)\}$	
3	$\{\neg Q(a)\}$	
4	$\{Q(a)\}$	Resolvente de 1 y 2
5	$\square$	Resolvente de 3 y 4

La demostración por deducción natural se muestra en la figura 4 (67).

Solución del apartado (2): Para decidir si $(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \models (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$ basta comprobar si $S = \{(\forall x)[P(x) \vee Q(x)], \neg((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x))\}$ es inconsistente. Comprobaremos la inconsistencia de S por resolución. Para ello, comenzamos calculando una forma clausal de S.

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \\
\equiv & \{\{P(x), Q(x)\}\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
 & \neg((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)) & \\
\equiv & \neg((\forall x)P(x) \vee (\forall y)Q(y)) & \\
\equiv & \neg(\forall x)P(x) \wedge \neg(\forall y)Q(y) & \\
\equiv & (\exists x)\neg P(x) \wedge (\exists y)\neg Q(y) & \\
\equiv & (\exists x)(\exists y)[\neg P(x) \wedge \neg Q(y)] & \\
\equiv_{sat} & \neg P(a) \wedge \neg Q(b) & [a \text{ y } b \text{ constantes de Skolem}] \\
\equiv & \{\{\neg P(a)\}, \{\neg Q(b)\}\} &
\end{array}
$$

Las cláusulas de la forma clausal de S son:

1	$(\forall x)P(x) \lor (\forall x)Q(x)$	premisa
2	$\forall x P(x)$	supuesto
3	actual i	supuesto
4	$P(i)$	$\mathcal{E}_\forall$ $2, 3$
5	$P(i) \lor Q(i)$	$\mathcal{I}_\lor$ 4
6	$(\forall x)[P(x) \lor Q(x)]$	$\mathcal{I}_\forall$ $3-5$
7	$\forall x Q(x)$	supuesto
8	actual j	supuesto
9	$P(j)$	$\mathcal{E}_\forall$ $7, 8$
10	$P(j) \lor Q(j)$	$\mathcal{I}_\lor$ 9
11	$(\forall x)[P(x) \lor Q(x)]$	$\mathcal{I}_\forall$ $7-10$
12	$(\forall x)[P(x) \lor Q(x)]$	$\mathcal{E}_\lor$ $1, 2-6, 7-11$

Figura 4: Deducción natural del ejercicio 5.1

1 $\{P(x), Q(x)\}$
2 $\{\neg P(a)\}$
3 $\{\neg Q(b)\}$

Veamos el proceso de saturación por resolución:
Al resolver 2 con 2 no se obtiene resolvente.
Al resolver 3 con 2 y 3 no se obtiene resolvente.
Al resolver 1 con 2, 3 y 1 se obtiene
4 $\{Q(a)\}$ (resolvente de 1 y 2)
5 $\{P(b)\}$ (resolvente de 1 y 3)
Al resolver 4 con 2, 3, 1 y 4 no se obtiene resolvente.
Al resolver 5 con 2, 3, 1, 4 y 5 no se obtiene resolvente.

Al no obtenerse la cláusula vacía, se tiene que S es consistente y, por tanto,
$(\forall x)[P(x) \lor Q(x)] \not\models (\forall x)P(x) \lor (\forall x)Q(x)$.
Además, un modelo de Herbrand de S es $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{a, b\}$, $P^I = \{b\}$ y $Q^I = \{a\}$.

Solución del apartado (3): Para decidir si $(\exists x)[P(x) \land Q(x)] \models (\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x)$ basta comprobar si $S = \{(\exists x)[P(x) \land Q(x)], \neg((\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x))$ es inconsistente. Comprobaremos la inconsistencia de S por resolución. Para ello, comenzamos calculando una forma clausal de S.

$$
\begin{array}{ll}
 & (\exists x)[P(x) \land Q(x)] \\
\equiv_{sat} & P(a) \land Q(a) \\
\equiv & \{\{P(a)\}, \{Q(a)\}\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg((\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x)) \\
\equiv & \neg((\exists x)P(x) \land (\exists y)Q(y)) \\
\equiv & \neg(\exists x)P(x) \lor \neg(\exists y)Q(y) \\
\equiv & (\forall x)\neg P(x) \lor (\forall y)\neg Q(y) \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg P(x) \lor \neg Q(y)] \\
\equiv & \{\{\neg P(x), \neg Q(y)\}\}
\end{array}
$$

Una demostración por resolución de S es

1	$\{P(a)\}$	
2	$\{Q(a)\}$	
3	$\{\neg P(x), \neg Q(y)\}$	
4	$\{\neg Q(y)\}$	Resolvente de 1 y 3
5	$\square$	Resolvente de 2 y 4

Demostración por deducción natural:

1	$(\exists x)[P(x) \land Q(x)]$	premisa
2	actual $i, P(i) \land Q(i)$	supuestos
3	$P(i)$	$\mathcal{E}_\land$ 2
4	$(\exists x)P(x)$	$\mathcal{I}_\exists$ 3
5	$Q(i)$	$\mathcal{E}_\land$ 2
6	$(\exists x)Q(x)$	$\mathcal{I}_\exists$ 5
7	$(\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x)$	$\mathcal{I}_\land$ $4, 6$
8	$(\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x)$	$\mathcal{E}_\exists$ $1, 2-7$

Índice de Materias