Tema 4: Tableros semánticos

José A. Alonso Jiménez
Andrés Cordón Franco

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

Demostración por tableros semánticos

- **Demostración de fórmula tautológica:**
  - **Demostración:**

$\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land q)$ es una tautología
syss $\{\neg(\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land q))\}$ es inconsistente
syss $\{\neg p \lor \neg q, \neg\neg(p \land q)\}$ es inconsistente
syss $\{\neg p \lor \neg q, p \land q\}$ es inconsistente
syss $\{p, q, \neg p \lor \neg q\}$ es inconsistente
syss $\{p, q, \neg p\}$ es inconsistente y
$\{p, q, \neg q\}$ es inconsistente

Demostración por tableros semánticos

- **Tablero semántico cerrado:**

$$\boxed{\neg((\neg p \lor \neg q) \to \neg(p \land q))}$$

$$\boxed{\neg p \lor \neg q, \neg\neg(p \land q)}$$

$$\boxed{\neg p \lor \neg q, p \land q}$$

$$\boxed{\neg p \lor \neg q, p, q}$$

$$\begin{array}{cc} \boxed{\neg p, p, q} & \boxed{\neg q, p, q} \\ | & | \\ \text{Cerrada} & \text{Cerrada} \end{array}$$

Refutación por tableros semánticos

- **Refutación de fórmula no tautológica:**
  - **Refutación:**

    $\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land r)$ es una tautología
    syss $\{\neg(\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land r))\}$ es inconsistente
    syss $\{\neg p \lor \neg q, \neg\neg(p \land r)\}$ es inconsistente
    syss $\{\neg p \lor \neg q, p \land r\}$ es inconsistente
    syss $\{p, r, \neg p \lor \neg q\}$ es inconsistente
    syss $\{p, r, \neg p\}$ es inconsistente y
    $\{p, r, \neg q\}$ es inconsistente

  - **Contramodelos de $\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land r)$:**

    Las valoraciones v tales que $v(p) = 1, v(q) = 0$ y $v(r) = 1$.

  - **Una forma normal disyuntiva de $\neg(\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land r))$:**

    $p \land r \land \neg q$

Refutación por tableros semánticos

- **Tablero semántico:**

$$\neg((\neg p \lor \neg q) \rightarrow \neg(p \land r))$$

$$\neg p \lor \neg q, \neg\neg(p \land r)$$

$$\neg p \lor \neg q, p \land r$$

$$\neg p \lor \neg q, p, r$$

$$\neg p, p, r \qquad\qquad \neg q, p, r$$

Cerrada Abierta

Notación uniforme: Literales y dobles negaciones

- **Literales**
  - Un literal es un átomo o la negación de un átomo (p.e. $p, \neg p, q, \neg q, \ldots$).
- **Dobles negaciones**
  - F es una doble negación si es de la forma $\neg\neg G$.
  - Ley de doble negación: Si F es $\neg\neg G$, entonces $F \equiv G$.

Notación uniforme: fórmulas alfa y beta

- **Fórmulas alfa**
  - Las fórmulas alfa, junto con sus componentes, son

F	F_1	F_2
$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2
$\neg(A_1 \rightarrow A_2)$	A_1	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$A_1 \leftrightarrow A_2$	$A_1 \rightarrow A_2$	$A_2 \rightarrow A_1$

  - Si F es una fórmula alfa y sus componentes son F_1 y F_2, entonces $F \equiv F_1 \wedge F_2$.

- **Fórmulas beta**
  - Las fórmulas beta, junto con sus componentes, son

F	F_1	F_2
$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
$B_1 \rightarrow B_2$	$\neg B_1$	B_2
$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$\neg(B_1 \leftrightarrow B_2)$	$\neg(B_1 \rightarrow B_2)$	$\neg(B_2 \rightarrow B_1)$

  - Si F es una fórmula beta y sus componentes son F_1 y F_2, entonces $F \equiv F_1 \vee F_2$.

Completación de tableros

- **Procedimiento de completación de tableros:**

Un tablero de un conjunto de fórmulas S es un árbol construido mediante las reglas:

* El árbol cuyo único nodo tiene como etiqueta S es un tablero de S.
* Sea $\mathcal{T}$ un tablero de S y S_1 la etiqueta de una hoja de $\mathcal{T}$.

1. Si S_1 es cerrado (es decir, es un conjunto de literales que contiene una fórmula y su negación), entonces el árbol obtenido añadiendo como hijo de S_1 el nodo etiquetado con `cerrado` es un tablero de S.
2. Si S_1 es abierto (es decir, es un conjunto de literales que no contiene una fórmula y su negación), entonces el árbol obtenido añadiendo como hijo de S_1 el nodo etiquetado con `abierto` es un tablero de S.
3. Si S_1 contiene una doble negación $\neg\neg F$, entonces el árbol obtenido añadiendo como hijo de S_1 el nodo etiquetado con $(S_1 \setminus \{\neg\neg F\}) \cup \{F\}$ es un tablero de S.
4. Si S_1 contiene una fórmula alfa F de componentes F_1 y F_2, entonces el árbol obtenido añadiendo como hijo de S_1 el nodo etiquetado con $(S_1 \setminus \{F\}) \cup \{F_1, F_2\}$ es un tablero de S.
5. Si S_1 contiene una fórmula beta F de componentes F_1 y F_2, entonces el árbol obtenido añadiendo como hijos de S_1 los nodos etiquetados con $(S_1 \setminus \{F\}) \cup \{F_1\}$ y $(S_1 \setminus \{F\}) \cup \{F_2\}$ es un tablero de S.

Teorema por tableros

- **Def.:** Un tablero completo de S es un tablero de S al que no se le puede aplicar ninguna de las reglas de expansión; es decir, todas sus hojas son abiertas o cerradas.
- **Def.:** Un tablero es cerrado si todas sus hojas están etiquetadas con `cerrado`.
- **Def.:** Una fórmula F es un teorema (mediante tableros semánticos) si tiene una prueba mediante tableros; es decir, si $\{\neg F\}$ tiene un tablero completo cerrado. Se representa por $\vdash_{Tab} F$.
- **Ejemplos:**

  $\vdash_{Tab} \neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q)$

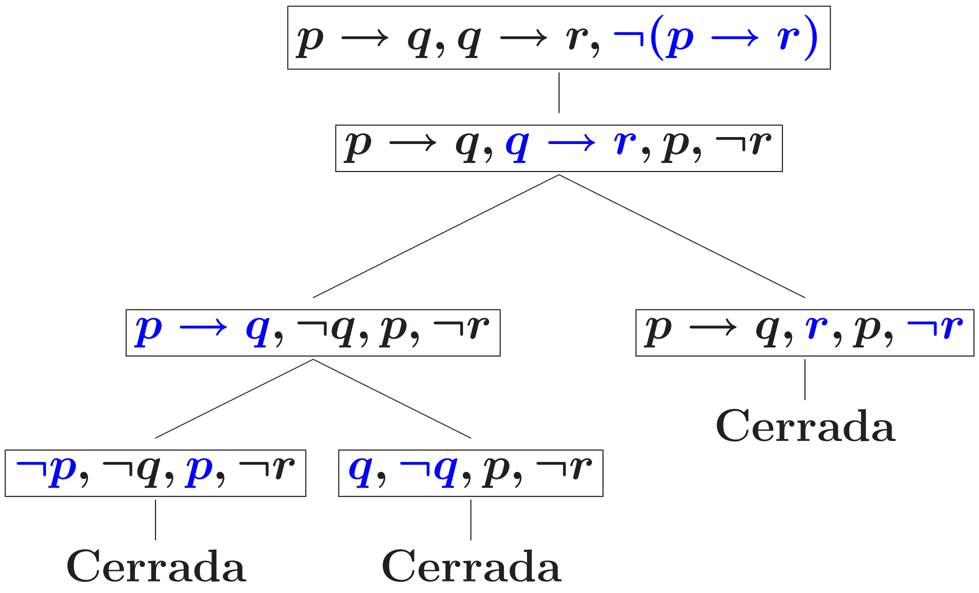
  $\nvdash_{Tab} \neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r)$
- **Teor.:** El cálculo de tableros semánticos es adecuado y completo; es decir,

  Adecuado: $\vdash_{Tab} F \quad \Longrightarrow \quad \models F$

  Completo: $\models F \quad \Longrightarrow \quad \vdash_{Tab} F$
- Tableros y formas normales disyuntivas: Si $\{L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1}\}, \dots, \{L_{m,1}, \dots, L_{m,n_m}\}$ son los nodos abiertos del tablero completo de F, entonces una forma normal disyuntiva de F es $(L_{1,1} \wedge \dots \wedge L_{1,n_1}) \vee \dots \vee (L_{m,1} \wedge \dots \wedge L_{m,n_m})$.

Deducción por tableros

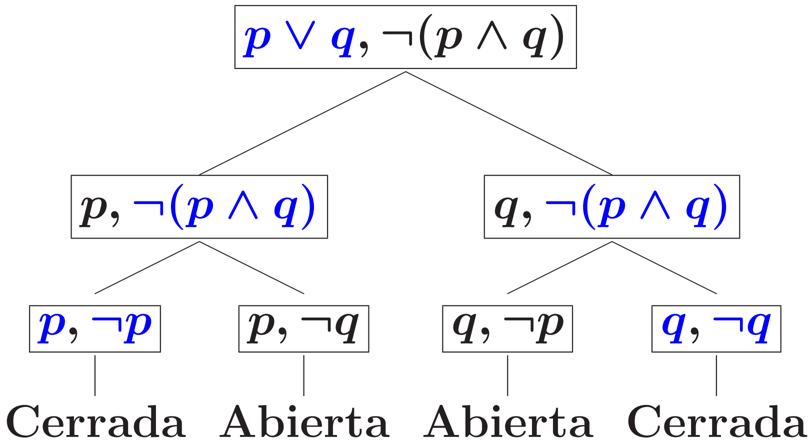
- Def.: La fórmula F es deducible (mediante tableros semánticos) a partir del conjunto de fórmulas S si existe una prueba mediante tableros de F a partir de S; es decir, existe un tablero completo cerrado de $S \cup \{\neg F\}$.
  Se representa por $S \vdash_{Tab} F$.
- Ejemplo: $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \vdash_{Tab} p \rightarrow r$



- Teor.: $S \vdash_{Tab} F$ syss $S \models F$.

Deducción por tableros

- Ejemplo: $\{p \lor q\} \nvdash_{Tab} p \land q$



- Contramodelos de $\{p \lor q\} \nvdash_{Tab} p \land q$

  las valoraciones v_1 tales que $v_1(p) = 1$ y $v_1(q) = 0$

  las valoraciones v_2 tales que $v_2(p) = 0$ y $v_2(q) = 1$

Bibliografía

- Ben–Ari, M. *Mathematical Logic for Computer Science (2nd ed.)* (Springer, 2001)
  - Cap. 2: Propositional calculus: formulas, models, tableaux
- Fitting, M. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving (2nd ed.)* (Springer, 1995)
  - Cap. 3: Semantic tableaux aund resolution
- Hortalá, M.T.; Leach, J. y Rogríguez, M. *Matemática discreta y lógica matemática* (Ed. Complutense, 1998)
  - Cap. 7.9: Tableaux semánticos par la lógica de proposiciones
- Nerode, A. y Shore, R.A. *Logic for Applications* (Springer, 1997)
  - Cap. 1.4: Tableau proofs in propositional calculus
- E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003)
  - Cap. 4.3: Métodos de las tablas semánticas