Ejercicio 6.1. Determinar las variables libres y ligadas de las siguientes fórmulas:

1. $\exists x\, \exists z\, [P(x,y) \to P(x,z) \land \exists x\, (P(y,z) \land Q(x,y))]$
2. $\forall x\, \exists z\, [P(x,y) \to R(x,z) \to \exists y\, (P(y,z) \lor R(x,y))]$

Ejercicio 6.2. Determinar, en cada caso, si la sustitución indicada es libre para la siguiente fórmula del lenguaje de la Aritmética $LA = \{0,\, 1,\, +,\, \cdot,\, <\}$:

$$\forall w\, (x = (y+z) \cdot w) \land (\exists x\, (x = z + 0) \lor \exists y\, (w + x = y \cdot z))$$

1. $[w \,/\, x + z]$ 2. $[y \,/\, z + (w+1)]$ 3. $[x \,/\, y + 1]$

Ejercicio 6.3. Indicar cuál de las siguientes fórmulas expresa "*Cervantes escribió una novela más larga que cualquiera escrita por Baroja*"; donde c, b denotan a Cervantes y Baroja, respectivamente; y $E(x,y)$, $N(x)$, $L(x,y)$ expresan "x escribió y", "x es una novela", "x es más larga que y", respectivamente. Expresa en lenguaje natural el sentido de las restantes fórmulas.

1. $\forall x \exists y\, (L(x,y) \to E(c,y) \land E(b,y))$ 2. $\forall x \forall y\, (E(c,x) \land E(b,y) \to L(x,y))$
3. $\exists x\, (N(x) \land E(c,x) \land \forall y\, (N(y) \land E(b,y) \to L(x,y)))$
4. $\exists x \forall y\, (E(c,x) \to E(b,y) \land L(x,y))$

Ejercicio 6.4. Se considera el lenguaje de primer orden $L = \{HJ, HR, SB, T, PD, MD, a, b\}$. Escribir fórmulas del lenguaje L que expresen los siguientes hechos:

1. Todo el que tiene un padre tiene una madre.
2. Todo hermano de un tío de Pedro es tío de Pedro o es su padre.
3. Todo el mundo tiene abuela.
4. Todo hijo de un hermano de Pedro es su sobrino.
5. Si dos personas tienen una abuela en común entonces son primos o bien son hermanos.
6. No todo el mundo tiene hijos.

(Supóngase que $HJ(x,y)$ expresa "x es hijo/a de y"; $HR(x,y)$: "x es hermano/a de y; $SB(x,y)$: "x es sobrino/a de y"; $T(x,y)$: "x es tío/a de y"; $PD(x,y)$: "x es padre de y"; $MD(x,y)$: "x es madre de y"; y que las constantes a y b denotan, respectivamente, a Ana y a Pedro).

Ejercicio 6.5. Sea F la fórmula $P(x) \to P(a)$, donde a es un símbolo de constante. ¿Es F satisfacible? ¿Tiene modelos? ¿Es F una fórmula válida?

Ejercicio 6.6. Sea L un lenguaje de primer orden con dos símbolos de predicado, P (de aridad 1), Q (de aridad 2) y un símbolo de función, f, de aridad 1. Sea $\mathcal{I} = (U, I)$ la estructura dada por:

Universo: $U = \{a,b,c,d\}$;

$I(P) = \{a,b\}$, $I(Q) = \{(a,b),\, (b,b),\, (c,b)\}$, $I(f) = \{(a,b),(b,b),(c,a),(d,c)\}$.

Decidir cuáles de las siguientes fórmulas de L son válidas en $\mathcal{I}$:

(a) $P(x) \to \exists y\, Q(y,x)$ (b) $\forall x\, Q(f(x),x)$ (c) $Q(f(x),x) \to Q(x,x)$ (d) $Q(x,y) \to P(x)$

Ejercicio 6.7. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de fórmulas son consistentes?

1. $\{Q(x), \forall x\,(Q(x) \to R(x)), \forall x \neg R(x)\}$ 2. $\{\forall x\, P(x,y), \forall x \neg P(x,x)\}$
3. $\{\forall x \forall y\,(P(x,y) \to P(y,x)), \forall x \neg P(x,x), \exists y\, P(x,y)\}$

Ejercicio 6.8. Decidir si son correctas o no las siguientes deducciones:

1. $\{\forall x\,(P(x) \lor Q(x))\} \models \forall x\, P(x) \lor \forall x\, Q(x)$ 2. $\{\forall x\,(P(x) \to Q(x))\} \models \forall x\, P(x) \to \forall x\, Q(x)$
3. $\{\forall x\, P(x) \to \forall x\, Q(x)\} \models \forall x\,(P(x) \to Q(x))$ 4. $\{P(x) \lor Q(f(x))\} \models P(x) \lor Q(x)$

Ejercicio 6.9. En el lenguaje con igualdad $L = \{a, f\}$, siendo f un símbolo de función de aridad 1 y a una constante, se consideran las siguientes fórmulas:

$$F_1 \equiv \forall x\,(f(x) \neq a),\ F_2 \equiv \forall x\, \forall y (f(x) = f(y) \to x = y),\ F_3 \equiv \forall x\,(x \neq a \to \exists y\,(f(y) = x)).$$

Probar que ninguna de estas fórmulas es consecuencia lógica de las dos restantes.

Ejercicio 6.10. Sea $L = \{C, T, E, IZQ, DER, a, b\}$. Un *mundo* es una estructura para el lenguaje L cuyo universo puede ser descrito por una lista (posiblemente infinita) de figuras (cuadrados, triángulos y estrellas) y la interpretación de los símbolos de predicado es la natural si suponemos que $C(x)$ expresa " x es un cuadrado", $T(x)$ expresa "x es un triángulo", $E(x)$ expresa "x es una estrella", $IZQ(x, y)$ expresa "x está a la izquierda de y" y $DER(x, y)$ expresa "x está a la derecha de y".

M1	□	□	★	△	□
	a			b	

M2	△	★	△	□	△	△
				b	a	

M3	□	□	□	□
		a **b**		

1. Estudiar la validez de las siguientes fórmulas en cada uno de los *mundos* anteriores.

   $E(x) \to \exists y\ (C(y) \land IZQ(x, y)),$
   $\exists x\ [\neg T(x) \land IZQ(x, a) \land DER(b, x)],$
   $\exists x\ [C(x) \land (\exists y\ (T(y) \land DER(y, x)) \leftrightarrow \forall y\ (T(y) \to DER(y, x)))]$

2. Para cada una de las siguientes fórmulas, describir un *mundo* en el que sea válida:

   $F_1 :$ $C(a) \lor [\neg E(b) \land (T(b) \to \exists x\, C(x))]$
   $F_2 :$ $\forall x\ [C(x) \to \exists y\ (T(y) \land IZQ(y, x))]$
   $F_3 :$ $\forall x\ [T(x) \leftrightarrow (\exists y\ (E(y) \land IZQ(y, x))]$
   $F_4 :$ $\exists x\ [E(x) \land \forall y\ (C(y) \to \neg DER(y, x))]$

3. Describir, si es posible, un *mundo* en el que sean válidas todas las fórmulas del apartado anterior. ¿Es consistente el conjunto $U = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$?