Soluciones del examen de *Lógica informática* (Grupos 1 y 2) del 19 de Diciembre de 2005

José A. Alonso Jiménez

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla
Sevilla, 19 de Diciembre de 2005

Ejercicio 1 *Probar mediante deducción natural (usando Jape si lo deseas)*

1. $\vdash (p \to \neg q) \land (p \to \neg r) \to (p \to \neg(q \lor r))$
2. $\forall x.(\exists y.R(x,y) \to \exists y.(\forall z.R(y,z) \land R(x,y))), \exists x.\exists y.R(x,y) \vdash \exists x.\forall y.R(x,y)$
3. $\forall x.(P(x) \to \forall y.(Q(y) \to R(x,y))), \exists x.(P(x) \land \exists y.\neg R(x,y)) \vdash \neg\forall x.Q(x)$

Solución:

Solución del apartado 1: $\vdash (p \to \neg q) \land (p \to \neg r) \to (p \to \neg(q \lor r))$

1	$(p \to \neg q) \land (p \to \neg r)$	supuesto
2	p	supuesto
3	$q \lor r$	supuesto
4	q	supuesto
5	$p \to \neg q$	$\land$e 1
6	$\neg q$	$\to$e $5, 2$
7	$\bot$	$\neg$e $4, 6$
8	r	supuesto
9	$p \to \neg r$	$\land$e 1
10	$\neg r$	$\to$e $9, 8$
11	$\bot$	$\neg$e $8, 10$
12	$\bot$	$\lor$e $3, 4-7, 8-11$
13	$\neg(q \lor r)$	$\neg$i $3-12$
14	$p \to \neg(q \lor r)$	$\to$i $2-13$
15	$(p \to \neg q) \land (p \to \neg r) \to (p \to \neg(q \lor r))$	$\to$i $1-14$

Solución del apartado 2:

$$\forall x.(\exists y.R(x,y) \to \exists y.(\forall z.R(y,z) \land R(x,y))), \exists x.\exists y.R(x,y) \vdash \exists x.\forall y.R(x,y)$$

1	$\forall x.(\exists y.R(x,y) \to \exists y.(\forall z.R(y,z) \land R(x,y)))$	premisa
2	$\exists x.\exists y.R(x,y)$	premisa
3	actual $j, \exists y.R(j,y)$	supuesto
4	$\exists y.R(j,y) \to \exists y.(\forall z.R(y,z) \land R(j,y))$	$\forall$e 1, 2,1
5	$\exists y.(\forall z.R(y,z) \land R(j,y))$	$\to$e 4, 2,2
6	actual $k, \forall z.R(k,z) \land R(j,k)$	supuesto
7	$\forall z.R(k,z)$	$\land$e 6,2
8	$\exists x.\forall y.R(x,y)$	$\exists$i 7
9	$\exists x.\forall y.R(x,y)$	$\exists$e $6-8$
10	$\exists x.\forall y.R(x,y)$	$\exists$e $2, 3-9$

Solución del apartado 3:

$$\forall x.(P(x) \to \forall y.(Q(y) \to R(x,y))), \exists x.(P(x) \land \exists y.\neg R(x,y)) \vdash \neg\forall x.Q(x)$$

1	$\forall x.(P(x) \to \forall y.(Q(y) \to R(x,y)))$	premisa
2	$\exists x.(P(x) \land \exists y.\neg R(x,y))$	premisa
3	$\forall x.Q(x)$	supuesto
4	actual $i, P(i) \land \exists y.\neg R(i,y)$	supuesto
5	$\exists y.\neg R(i,y)$	$\land$e 4
6	actual $j, \neg R(i,j)$	supuesto
7	$P(i) \to \forall y.(Q(y) \to R(i,y))$	$\forall$e 1, 4,1
8	$P(i)$	$\land$e 4,2
9	$\forall y.(Q(y) \to R(i,y))$	$\to$e 7, 8
10	$Q(j) \to R(i,j)$	$\forall$e 9, 6,1
11	$Q(j)$	$\forall$e 3, 6,1
12	$R(i,j)$	$\to$e 10, 11
13	$\bot$	$\neg$e 5,2, 12
14	$\bot$	$\exists$e $5, 6-13$
15	$\bot$	$\exists$e $2, 4-14$
16	$\neg\forall x.Q(x)$	$\neg$i $3-15$

Ejercicio 2 *Mediante tableros semánticos, determinar cuáles de las siguientes fórmulas son tautologías y calcular una forma normal conjuntiva de las que no lo sean.*

1. $((\neg p \to q) \lor (\neg q \to r)) \to (\neg r \to (p \lor q))$
2. $((\neg p \to q) \lor (\neg q \to r)) \to ((\neg p \lor \neg q) \to r)$

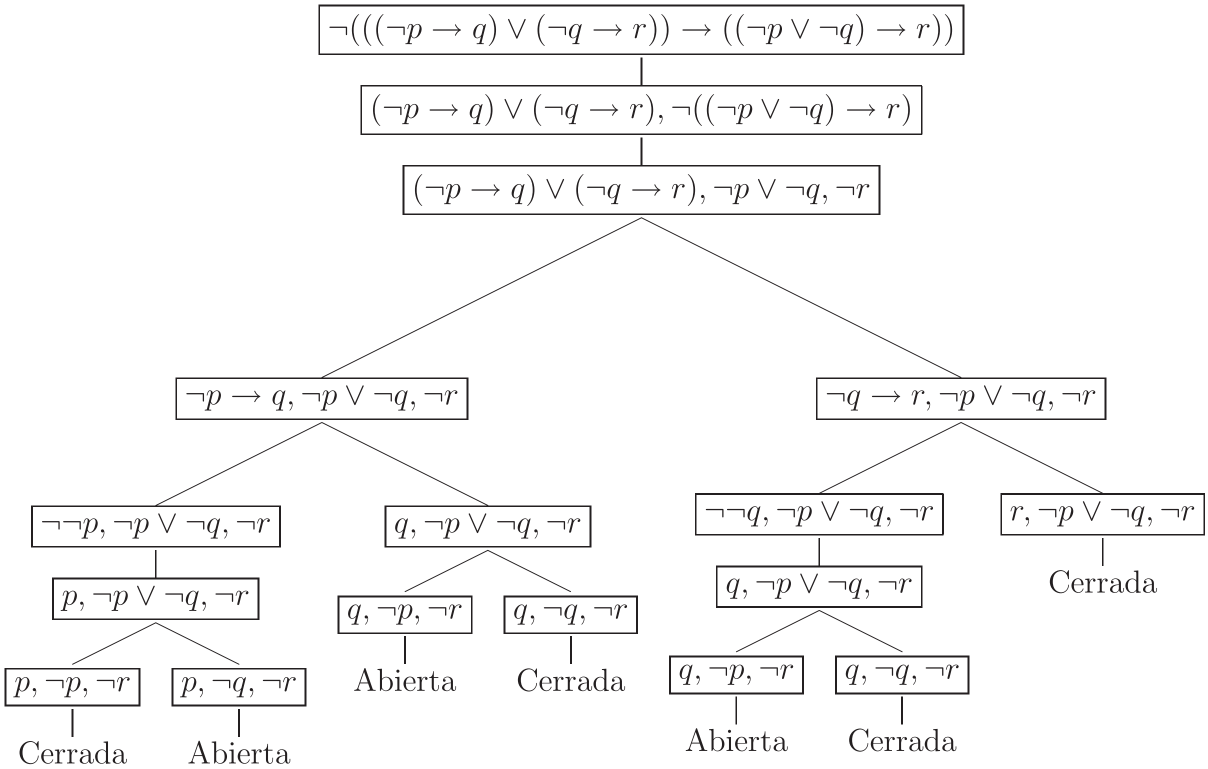
Solución:

Solución del apartado 1: El árbol semántico correspondiente a la negación de la fórmula es

- $\boxed{\neg(((\neg p \to q) \lor (\neg q \to r)) \to (\neg r \to (p \lor q)))}$
  - $\boxed{(\neg p \to q) \lor (\neg q \to r), \neg(\neg r \to (p \lor q))}$
    - $\boxed{(\neg p \to q) \lor (\neg q \to r), \neg r, \neg(p \lor q)}$
      - $\boxed{(\neg p \to q) \lor (\neg q \to r), \neg r, \neg p, \neg q}$
        - $\boxed{\neg p \to q, \neg r, \neg p, \neg q}$
          - $\boxed{\neg\neg p, \neg r, \neg p, \neg q}$
            - Cerrada
          - $\boxed{q, \neg r, \neg p, \neg q}$
            - Cerrada
        - $\boxed{\neg q \to r, \neg r, \neg p, \neg q}$
          - $\boxed{\neg\neg q, \neg r, \neg p, \neg q}$
            - Cerrada
          - $\boxed{r, \neg r, \neg p, \neg q}$
            - Cerrada

Como todas las ramas son cerradas, la fórmula dada es una tautología.

Solución del apartado 2: El árbol semántico correspondiente a la negación de la fórmula es



Como hay ramas abiertas, la forma dada no es tautología.

A partir del tablero podemos calcula una forma normal conjuntiva de la fórmula dada F. La fórmula inicial del tablero es $\neg F$ y las hojas abiertas son $\{p, \neg q, \neg r\}$ y $\{q, \neg p, \neg r\}$. Por tanto,

$$\neg F \equiv (p \land \neg q \land \neg r) \lor (q \land \neg p \land \neg r)$$

Por consiguiente,

$$\neg\neg F \equiv \neg((p \land \neg q \land \neg r) \lor (q \land \neg p \land \neg r))$$

y

$$F \equiv (\neg p \lor q \lor r) \land (\neg q \lor p \lor r))$$

Una forma normal conjuntiva de la fórmula $((\neg p \to q) \lor (\neg q \to r)) \to ((\neg p \lor \neg q) \to r)$ es $(\neg p \lor q \lor r) \land (\neg q \lor p \lor r))$

Ejercicio 3 *Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:*

1. *Sean G_1 una forma normal disyuntiva de F_1 y G_2 una forma normal disyuntiva de F_2. Si F_1 y F_2 son equivalentes, entonces G_1 y G_2 son fórmulas iguales.*
2. *Para toda fórmula F se tiene que si G_1 es una forma normal conjuntiva de F y G_2 es una forma normal normal disyuntiva de F, entonces G_1 y G_2 son fórmulas distintas.*

Solución:

Solución del apartado 1: La proposición es falsa. Para obterner un contraejemplo se condideran F_1 como la fórmula p, F_2 como la fórmula p, G_1 como la fórmula p y G_2 como la fórmula $p \vee q \vee \neg q$. Entonces, F_1 y F_2 son equivalentes, G_1 es una forma normal diyuntiva de F_1, G_2 es una forma normal diyuntiva de F_2 y G_1 no es igual que G_2.

Solución del apartado 1: La proposición es falsa. Para obterner un contraejemplo se condideran como F, G_1 y G_2 la fórmula p. Entonces, G_1 es una forma normal conjuntiva de F, G_2 es una forma normal normal disyuntiva de F y G_1 es igual que G_2.

Ejercicio 4 *Consideremos los dos siguientes enunciados en castellano*

- E_1*: Algunos robots sólo obedecen a los amigos del programador jefe.*
- E_2*: Todos los robots obedecen a los amigos del programador jefe.*

y las cuatro fórmulas que siguen

- F_1: $(\forall x)(\forall y)[P(x) \wedge S(y,c) \rightarrow R(x,y)]$
- F_2: $(\exists x)[P(x) \wedge (\forall y)[R(x,y) \rightarrow S(y,c)]]$
- F_3: $(\forall y)[S(y,c) \rightarrow \neg(\exists x)[P(x) \wedge \neg R(x,y)]]$
- F_4: $(\exists x)(\forall y)[P(x) \wedge \neg(R(x,y) \wedge \neg S(y,c))]$

1. *En una interpretación adecuada, dos de las fórmulas formalizan* E_1 *y las otras dos formalizan* E_2*. Explicar cuál es la interpretación y cuáles son las fórmulas que corresponden a cada uno de los dos enunciados.*
2. *Demostrar, calculando sus forma clausales, que las dos fórmulas correspondientes a* E_1 *son lógicamente equivalentes. Hacer lo mismo con las dos fórmulas correspondientes a* E_2*.*
3. *Consideremos ahora los nuevos enunciados:*
   - E_3*: Alvaro es amigo del programador jefe, pero Benito no le obedece.*
   - E_4*: Benito no es un robot.*

   Demostrar, mediante resolución, que E_4 *es consecuencia de* E_2 *y* E_3*.*

Solución:

Solución del apartado 1: La interpretación adecuada de los símbolos de las fórmulas es

$P(x)$	: x es un robot
$R(x,y)$	: x obedece a y
$S(x,y)$	: x es amigo de y
c	: el programador jefe

Las fórmulas F_1 y F_3 representan el enunciado E_2 y las fórmulas F_2 y F_4 representan el enunciado E_1.

Solución del apartado 2: Para probar la equivalencia de las fórmulas que representan el enunciado E_2, calculamos una forma clausal de F_1

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall x)(\forall y)[P(x) \land S(y,c) \to R(x,y)] \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg(P(x) \land S(y,c)) \lor R(x,y)] \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[(\neg P(x) \lor \neg S(y,c)) \lor R(x,y)] \\
\equiv & \{\{\neg P(x), \neg S(y,c), R(x,y)\}\}
\end{array}
$$

y una forma clausal de F_3

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall y)[S(y,c) \to \neg(\exists x)[P(x) \land \neg R(x,y)]] \\
\equiv & (\forall y)[\neg S(y,c) \lor \neg(\exists x)[P(x) \land \neg R(x,y)]] \\
\equiv & (\forall y)[\neg S(y,c) \lor (\forall x)[\neg(P(x) \land \neg R(x,y))]] \\
\equiv & (\forall y)[\neg S(y,c) \lor (\forall x)[\neg P(x) \lor \neg\neg R(x,y)]] \\
\equiv & (\forall y)[\neg S(y,c) \lor (\forall x)[\neg P(x) \lor R(x,y)]] \\
\equiv & (\forall y)(\forall x)[\neg S(y,c) \lor (\neg P(x) \lor R(x,y))] \\
\equiv & \{\{\neg S(y,c), \neg P(x), R(x,y))\}\}
\end{array}
$$

Puesto que

$$\{\{\neg P(x), \neg S(y,c), R(x,y)\}\} = \{\{\neg S(y,c), \neg P(x), R(x,y))\}\}$$

las fórmulas F_1 y F_3 son equivalentes.

Para probar la equivalencia de las fórmulas que representan el enunciado E_1, calculamos una forma clausal de F_2

$$
\begin{array}{ll}
 & (\exists x)[P(x) \land (\forall y)[R(x,y) \to S(y,c)]] \\
\equiv & (\exists x)(\forall y)[P(x) \land (R(x,y) \to S(y,c))] \\
\equiv & (\exists x)(\forall y)[P(x) \land (\neg R(x,y) \lor S(y,c))] \\
\equiv_{sat} & (\forall y)[P(a_1) \land (\neg R(a_1,y) \lor S(y,c))] \\
\equiv & \{\{P(a_1)\}, \{\neg R(a_1,y), S(y,c)\}\}
\end{array}
$$

y una forma clausal de F_3

$$
\begin{array}{ll}
 & (\exists x)(\forall y)[P(x) \land \neg(R(x,y) \land \neg S(y,c))] \\
\equiv & (\exists x)(\forall y)[P(x) \land (\neg R(x,y) \lor \neg\neg S(y,c))] \\
\equiv & (\exists x)(\forall y)[P(x) \land (\neg R(x,y) \lor S(y,c))] \\
\equiv_{sat} & (\forall y)[P(a_1) \land (\neg R(a_1,y) \lor S(y,c))] \\
\equiv & \{\{P(a_1)\}, \{\neg R(a_1,y), S(y,c)\}\}
\end{array}
$$

Puesto que

$$\{\{P(a_1)\}, \{\neg R(a_1,y), S(y,c)\}\} = \{\{P(a_1)\}, \{\neg R(a_1,y), S(y,c)\}\}$$

las fórmulas F_1 y F_3 son equivalentes.

Solución del apartado 3: Para la formalización ampliamos el vocabulario del apartado 1 introduciendo la constante a para representar a Alvaro y la constante b para representar a Benito.

La formalización del enunciado E_3 es

$$S(a,c) \land \neg R(b,a)$$

y su forma clausal es

$$\{\{S(a,c)\},\{\neg R(b,a)\}\}$$

Para demostrar E_4 por resolución consideramos la formalización de su negación

$$\neg\neg P(b)$$

y calculamos su forma clausal

$$\{\{P(b)\}\}$$

Para demostrar mediante resolución, que E_4 es consecuencia de E_2 y E_3, basta demostrar que el conjunto formado por las formas clausales de E_2, E_3 y la negación de E_4 es inconsistente. Una demostración por resolución lineal es

1	$\{\neg P(x), \neg S(y,c), R(x,y)\}$	Hipótesis E_2
2	$\{S(a,c)\}$	Hipótesis E_3
3	$\{\neg R(b,a)\}$	Hipótesis E_3
4	$\{P(b)\}$	Negación de E_4
5	$\{\neg P(b), \neg S(a,c)\}$	Resolvente de 3 y 1 con $\sigma = \{x/b, y/a\}$
6	$\{\neg S(a,c)\}$	Resolvente de 5 y 4
7	$\square$	Resolvente de 6 y 2

Ejercicio 5 *Se considera el siguiente argumento:*

Todo deprimido que estima a un submarinista es listo.
Cualquiera que se estime a sí mismo es listo.
Ningún deprimido se estima a sí mismo.
Por tanto, ningún deprimido estima a un submarinista.

Decidir, utilizando el método de resolución, si el argumento es válido. Si no es válido encontrar una interpretación en la que las premisas sean todas verdaderas y la conclusión sea falsa.
*(*NOTA: *En la formalización, usar el siguiente vocabulario $D(x)$ significa que x está deprimido, $S(x)$ significa que x es submarinista, $L(x)$ significa que x es listo y $E(x,y)$ significa que x estima a y.)*

Solución:

La formalización de *Todo deprimido que estima a un submarinista es listo* es

$$(\forall x)[D(x) \land (\exists y)[S(y) \land E(x,y)] \to L(x)]$$

El cálculo de su forma clausal es

$$\begin{array}{rl}
& (\forall x)[D(x) \land (\exists y)[S(y) \land E(x,y)] \to L(x)] \\
\equiv & (\forall x)[\neg(D(x) \land (\exists y)[S(y) \land E(x,y)]) \lor L(x)] \\
\equiv & (\forall x)[(\neg D(x) \lor \neg(\exists y)[S(y) \land E(x,y)]) \lor L(x)] \\
\equiv & (\forall x)[(\neg D(x) \lor (\forall y)\neg(S(y) \land E(x,y))) \lor L(x)] \\
\equiv & (\forall x)[(\neg D(x) \lor (\forall y)(\neg S(y) \lor \neg E(x,y))) \lor L(x)] \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[(\neg D(x) \lor (\neg S(y) \lor \neg E(x,y))) \lor L(x)] \\
\equiv & \{\{\neg D(x), \neg S(y), \neg E(x,y), L(x)\}\}
\end{array}$$

La formalización de *Cualquiera que se estime a sí mismo es listo* es

$$(\forall x)[E(x,x) \rightarrow L(x)]$$

El cálculo de su forma clausal es

$$\begin{array}{ll} & (\forall x)[E(x,x) \rightarrow L(x)] \\ \equiv & (\forall x)[\neg E(x,x) \vee L(x)] \\ \equiv & \{\{\neg E(x,x), L(x)\}\} \end{array}$$

La formalización de *Ningún deprimido se estima a sí mismo* es

$$\neg(\exists x)[D(x) \wedge E(x,x)]$$

El cálculo de su forma clausal es

$$\begin{array}{ll} & \neg(\exists x)[D(x) \wedge E(x,x)] \\ \equiv & (\forall x)\neg(D(x) \wedge E(x,x)) \\ \equiv & (\forall x)[\neg D(x) \vee \neg E(x,x)] \\ \equiv & \{\{\neg D(x), \neg E(x,x)\}\} \end{array}$$

La formalización de *Ningún deprimido estima a un submarinista* es

$$\neg(\exists x)(\exists y)[D(x) \wedge S(y) \wedge E(x,y)]$$

El cálculo de la forma clausal de su negación es

$$\begin{array}{ll} & \neg\neg(\exists x)(\exists y)[D(x) \wedge S(y) \wedge E(x,y)] \\ \equiv & (\exists x)(\exists y)[D(x) \wedge S(y) \wedge E(x,y)] \\ \equiv_{sat} & D(a) \wedge S(b) \wedge E(a,b) \\ \equiv & \{\{D(a)\}, \{S(b)\}, \{E(a,b)\}\} \end{array}$$

El argumento es válido syss el conjunto formado por las cláusulas anteriores es inconsistente. Lo haremos por resolución. En principio, las cláusulas usables son

$$\begin{array}{ll} 1 & \{\neg D(x), \neg S(y), \neg E(x,y), L(x)\} \\ 2 & \{\neg E(x,x), L(x)\} \\ 3 & \{\neg D(x), \neg E(x,x)\} \\ 4 & \{D(a)\} \\ 5 & \{S(b)\} \\ 6 & \{E(a,b)\} \end{array}$$

y no hay ninguna cláusula usada.

En el paso 1 elegimos la cláusula más ligera de las usables, la 4, y al hacer resolución con las usadas no se obtiene ninguna resolvente. Las usables son la 1, 2, 3, 5 y 6. La usada es la 4.

En el paso 2 elegimos la cláusula más ligera de las usables, la 5, y al hacer resolución con las usadas no se obtiene ninguna resolvente. Las usables son la 1, 2, 3 y 6. Las usadas son la 4 y 5.

En el paso 3 elegimos la cláusula más ligera de las usables, la 6, y al hacer resolución con las usadas no se obtiene ninguna resolvente. Las usables son la 1, 2 y 3. Las usadas son la 4, 5 y 6.

En el paso 4 elegimos la cláusula más ligera de las usables, la 2, y al hacer resolución con las usadas no se obtiene ninguna resolvente. Las usables son la 1 y 3. Las usadas son la 2, 4, 5 y 6.

En el paso 5 elegimos la cláusula más ligera de las usables, la 3, y al hacer resolución con las usadas se obtiene la resolvente

7 $\{\neg E(a,a)\}$ Resolvente de 3 y 4 con $\sigma = \{x/a\}$

Las usables son la 1 y 7. Las usadas son la 2, 3, 4, 5 y 6.

En el paso 6 elegimos la cláusula más ligera de las usables, la 7, y al hacer resolución con las usadas no se obtiene ninguna resolvente. Las usables son la 1. Las usadas son la 2, 4, 5, 6 y 7.

En el paso 7 elegimos la cláusula más ligera de las usables, la 1, y al hacer resolución con las usadas se obtienen las resolventes

8	$\{\neg S(y), \neg E(a,y), L(a)\}$	Resolvente de 1 y 4 con $\sigma = \{x/a\}$
9	$\{\neg D(x), \neg E(x,b), L(x)\}$	Resolvente de 1 y 5 con $\sigma = \{y/b\}$
10	$\{\neg D(a), \neg S(b), L(a)\}$	Resolvente de 1 y 6 con $\sigma = \{x/a, y/b\}$

Las usables son la 8, 9 y 10. Las usadas son la 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7.

En el paso 8 elegimos la cláusula más ligera de las usables, la 10, y al hacer resolución con las usadas se obtienen las resolventes

11	$\{\neg S(b), L(a)\}$	Resolvente de 10 y 4
12	$\{\neg D(a), L(a)\}$	Resolvente de 10 y 5

La cláusula 11 subsume a la 10. Las usables son la 8, 9, 11 y 12. Las usadas son la 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7.

En el paso 9 elegimos la cláusula más ligera de las usables, la 11, y al hacer resolución con las usadas se obtienen la resolvente

13 $\{L(a)\}$ Resolvente de 11 y 5

La cláusula 13 subsume a la 8, 11 y 12. Las usables son la 9 y 13. Las usadas son la 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7.

En el paso 10 elegimos la cláusula más ligera de las usables, la 13, y al hacer resolución con las usadas no se obtienen resolventes. Las usable es la 9. Las usadas son la 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 13.

En el paso 11 elegimos la cláusula más ligera de las usables, la 9, y al hacer resolución con las usadas no se obtienen resolventes. No queda niguna usable. Las usadas son la 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 y 13.

Al haber agotado el conjunto de cláusulas usables sin encontrar la cláusula vacía, el conjunto es consistente y el argumento no es válido. A partir de las cláusulas usadas

1	$\{\neg D(x), \neg S(y), \neg E(x,y), L(x)\}$
2	$\{\neg E(x,x), L(x)\}$
3	$\{\neg D(x), \neg E(x,x)\}$
4	$\{D(a)\}$
5	$\{S(b)\}$
6	$\{E(a,b)\}$
7	$\{\neg E(a,a)\}$
9	$\{\neg D(x), \neg E(x,b), L(x)\}$
13	$\{L(a)\}$

Se construye una interpretación en la que las premisas sean todas verdaderas y la conclusión sea falsa; en efecto, la interpretación $\mathcal{I} = (U, I)$ con dominio $U = \{a, b\}$ y $D^I = \{a\}$, $S^I = \{b\}$, $L^I = \{a\}$

y $E^I = \{(a, b)\}$ cumple las condiciones exigidas.