Soluciones del examen de *Lógica informática* (Grupo 2) del 5 de Abril de 2006

José A. Alonso Jiménez

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla
Sevilla, 5 de Abril de 2006

Ejercicio 1 [2.5 puntos] *Decidir, mediante tableros semánticos, si la fórmula*

$(p \to q) \to ((q \to \neg r) \to \neg q)$

es una tautología, En el caso de que no lo sea, calcular a partir de un tablero completo sus contramodelos y una forma normal disyuntiva.

Solución:

Para calcular los contramodelos de $(p \to q) \to ((q \to \neg r) \to \neg q)$ vamos a construir un tablero completo de su negación.

$$
\begin{array}{lll}
1. & \neg((p \to q) \to ((q \to \neg r) \to \neg q)) & \\
2. & p \to q & (1) \\
3. & \neg((q \to \neg r) \to \neg q) & (1) \\
4. & q \to \neg r & (3) \\
5. & \neg\neg q & (3) \\
6. & q & (5)
\end{array}
$$

- 7. $\neg q$ (4)
  Cerrada
  (6 y 7)
- 8. $\neg r$ (4)
  - 9. $\neg p$ (2)
    Abierta
    $\{\neg p, q, \neg r\}$
  - 10. q (2)
    Abierta
    $\{q, \neg r\}$

Al tener ramas abiertas, la fórmula original no es una tautología y sus contramodelos son:

- v_1 tal que $v_1(p) = 0$, $v_1(q) = 1$ y $v_1(r) = 0$,
- v_2 tal que $v_2(q) = 1$ y $v_2(r) = 0$,

El segundo incluye al primero.

Sea F la fórmula dada (es decir, $(p \to q) \to ((q \to \neg r) \to \neg q)$). Una forma normal disyuntiva de $\neg F$ es $q \wedge \neg r$. Por tanto, $\neg F \equiv q \wedge \neg r$ de donde se sigue que $F \equiv \neg q \vee r$. Luego, una forma normal disyuntiva de F es $\neg q \vee r$.

Ejercicio 2 [2.5 puntos] *Decidir, mediante resolución, si*

$\{p \to q, \neg p \to r, q \vee r \to s\} \models s.$

En el caso que no lo sea, construir un contramodelo a partir de la resolución.

Solución:

En primer lugar, calculamos las formas clausales de las hipótesis y de la negación de la conclusión.

$$
\begin{aligned}
p \to q &\equiv \neg p \vee q \\
&\equiv \{\{\neg p, q\}\}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\neg p \to r &\equiv \neg\neg p \lor r\\ &\equiv p \lor r\\ &\equiv \{\{p, r\}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q \lor r \to s &\equiv \neg(q \lor r) \lor s\\ &\equiv (\neg q \land \neg r) \lor s\\ &\equiv (\neg q \lor s) \land (\neg r \lor s)\\ &\equiv \{\{\neg q, s\}, \{\neg r, s\}\}\end{aligned}$$

$$\neg s \equiv \{\{\neg s\}\}$$

Una refutación por resolución del conjunto de las cláusulas obtenidas es

1.	$\{\neg p, q\}$	
2.	$\{p, r\}$	
3.	$\{\neg q, s\}$	
4.	$\{\neg r, s\}$	
5.	$\{\neg s\}$	
6.	$\{\neg q\}$	Resolvente de 3 y 5
7.	$\{\neg r\}$	Resolvente de 4 y 5
8.	$\{\neg p\}$	Resolvente de 1 y 6
9.	$\{r\}$	Resolvente de 2 y 8
10.	$\square$	Resolvente de 7 y 9

Por tanto, el conjunto de cláusulas es inconsistente y se verifica la relación de consecuencia.

Ejercicio 3 [2.5 puntos] *Decidir, mediante resolución, si r es consecuencia lógica de*
$\{p \leftrightarrow q, \neg p \to r, \neg s \land \neg t \to q, \neg s \land t\}$.
En el caso que no lo sea, construir un contramodelo a partir de la resolución.

Solución:

En primer lugar, calculamos las formas clausales de las hipótesis y de la negación de la conclusión.

$$\begin{aligned}p \leftrightarrow q &\equiv (p \to q) \land (q \to p)\\ &\equiv (\neg p \lor q) \land (\neg q \lor p)\\ &\equiv \{\{\neg p, q\}, \{\neg q, p\}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\neg p \to r &\equiv \neg\neg p \lor r\\ &\equiv p \lor r\\ &\equiv \{\{p, r\}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\neg s \land \neg t \to q &\equiv \neg(\neg s \land \neg t) \lor q\\ &\equiv (\neg\neg s \lor \neg\neg t) \lor q\\ &\equiv (s \lor t) \lor q\\ &\equiv \{\{q, s, t\}\}\end{aligned}$$

$$\neg s \land t \equiv \{\{\neg s\}, \{t\}\}$$

$$\neg r \equiv \{\{\neg r\}\}$$

Vamos a demostrar que el conjunto de cláusulas obtenidas no es refutable por resolución.

*	1.	$\{\neg p, q\}$	
*	2.	$\{\neg q, p\}$	
*	3.	$\{p, r\}$	
*	4.	$\{q, s, t\}$	
	5.	$\{\neg s\}$	
	6.	$\{t\}$	Subsume a 4.
	7.	$\{\neg r\}$	
	8.	$\{p\}$	Resolvente de 3 y 7. Subsume a 2 y 3.
	9.	$\{q\}$	Resolvente de 1 y 8. Subsume a 1.

En este momento, las únicas cláusulas no subsumidas son la 5, 6, 7, 8 y 9 con las que no se pueden formar ninguna resolvente. Por tanto, el conjunto de cláusulas es consistente, la relación de consecuencia no se verifica y un contramodelo es la interpretación v tal que $v(p) = 1$, $v(q) = 1$, $v(r) = 0$, $v(s) = 0$ y $v(t) = 1$.

Ejercicio 4 [2.5 puntos] *Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:*

1. *Si S_1 y S_2 son dos conjuntos consistentes de fórmulas, entonces $S_1 \cup S_2$ es consistente.*
2. *Si S_1 y S_2 son dos conjuntos inconsistentes de fórmulas, entonces $S_1 \cap S_2$ es inconsistente.*

Solución:

Solución del apartado 1: La proposición es falsa. Sean $S_1 = \{p\}$ y $S_2 = \{\neg p\}$. Entonces

- S_1 es consistente (ya que la interpretación v_1 con $v_1(p) = 1$ es un modelo de S_1).
- S_2 es consistente (ya que la interpretación v_2 con $v_2(p) = 0$ es un modelo de S_2).
- $S_1 \cup S_2 = \{p, \neg p\}$ es inconsistente.

Solución del apartado 2: La proposición es falsa. Sean $S_1 = \{p, \neg p, q\}$ y $S_2 = \{q, \neg q, r\}$. Entonces

- S_1 es inconsistente (ya que contiene a p y $\neg p$).
- S_2 es inconsistente (ya que contiene a q y $\neg q$).
- $S_1 \cap S_2 = \{q\}$ es consistente (ya que la interpretación v con $v(q) = 1$ es un modelo de $S_1 \cap S_2$).