Soluciones del examen de *Lógica informática* (Grupo 1) del 9 de Junio de 2006

José A. Alonso Jiménez

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla
Sevilla, 9 de Junio de 2006

Ejercicio 1 [2.5 puntos] *Decidir, mediante resolución, si*

$$\models (\exists x)[(\forall y)[P(x,y) \lor \neg Q(y)] \to (\forall x)(\forall y)[Q(y) \to P(x,y)]]$$

En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir de la resolución.

Solución:

En primer lugar se calcula una forma clausal de la negación de la fórmula.

$$\begin{array}{ll}
 & \neg(\exists x)[(\forall y)[P(x,y) \lor \neg Q(y)] \to (\forall x)(\forall y)[Q(y) \to P(x,y)]] \\
\equiv & \neg(\exists x)[(\forall y)[P(x,y) \lor \neg Q(y)] \to (\forall u)(\forall v)[Q(v) \to P(u,v)]] \\
\equiv & (\forall x)\neg[(\forall y)[P(x,y) \lor \neg Q(y)] \to (\forall u)(\forall v)[Q(v) \to P(u,v)]] \\
\equiv & (\forall x)[(\forall y)[P(x,y) \lor \neg Q(y)] \land \neg(\forall u)(\forall v)[Q(v) \to P(u,v)]] \\
\equiv & (\forall x)[(\forall y)[P(x,y) \lor \neg Q(y)] \land (\exists u)(\exists v)\neg[Q(v) \to P(u,v)]] \\
\equiv & (\forall x)[(\forall y)[P(x,y) \lor \neg Q(y)] \land (\exists u)(\exists v)[Q(v) \land \neg P(u,v)]] \\
\equiv & (\forall x)(\exists u)(\exists v)(\forall y)[(P(x,y) \lor \neg Q(y)) \land (Q(v) \land \neg P(u,v))] \\
\equiv_{sat} & (\forall x)(\forall y)[(P(x,y) \lor \neg Q(y)) \land (Q(g(x)) \land \neg P(f(x),g(x)))] \\
\equiv & \{\{P(x,y), \neg Q(y)\}, \{Q(g(x)\}, \{\neg P(f(x),g(x))\}\}
\end{array}$$

La demostración por resolución es

$$\begin{array}{lll}
1 & \{P(x,y), \neg Q(y)\} & \\
2 & \{Q(g(x)\} & \\
3 & \{\neg P(f(x),g(x))\} & \\
4 & \{P(x,g(z))\} & \text{Res. de 1 y } 2[x/z] \text{ con } \sigma = [y/g(z)] \\
5 & \square & \text{Res. de } 3[x/u] \text{ y 4 con } \sigma = [x/f(u), z/u]
\end{array}$$

Ejercicio 2 [2.5 puntos] *Decidir, mediante tableros semánticos, si*

$$\{(\forall x)[(\exists y)[P(x,y) \lor P(y,x)] \to P(x,x)], \quad (\exists x)(\exists y)P(x,y)\} \models (\exists x)P(x,x)$$

En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir del tablero.

Solución:

1. $(\forall x)[(\exists y)[P(x,y) \lor P(y,x)] \to P(x,x)]$
2. $(\exists x)(\exists y)P(x,y)$
3. $\neg(\exists x)P(x,x)$
4. $(\exists y)P(a,y)$ (2)
5. $P(a,b)$ (4)
6. $(\exists y)[P(a,y) \lor P(y,a)] \to P(a,a)$ (1)

7. $\neg(\exists y)[P(a,y) \lor P(y,a)]$ (6)	8. $P(a,a)$ (6)
9. $\neg(P(a,b) \lor P(b,a))$ (7)	12. $\neg P(a,a)$ (3)
10. $\neg P(a,b)$ (9)	Cerrada (8–12)
11. $\neg P(b,a)$ (9)	
Cerrada (5–10)	

Como las ramas son cerradas, se tiene que

$$\{(\forall x)[(\exists y)[P(x,y) \lor P(y,x)] \to P(x,x)], \quad (\exists x)(\exists y)P(x,y)\} \models (\exists x)P(x,x)$$

Ejercicio 3 [2.5 puntos] *Se considera el siguiente conjunto de fórmulas*

$$\begin{array}{ll} T = \{ & (\forall y)P(0,y,y), \\ & (\forall x)(\forall y)(\forall z)[P(x,y,z) \to P(s(x),y,s(z))], \\ & Q(0), \\ & (\forall x)[Q(x) \to Q(s(s(x)))] \ \} \end{array}$$

Demostrar por resolución lineal que

$$T \models (\exists x)(\exists y)[P(x,s(y),s(s(0))) \land Q(s(x))]$$

y, a partir de la demostración encontrar todos los términos t_1 y t_2 tales que

$$T \models P(t_1,s(t_2),s(s(0))) \land Q(s(t_1))$$

Solución:

En primer lugar se calcula las formas clausales de las fórmulas de T:

$$\begin{array}{ll} & (\forall y)P(0,y,y) \\ \equiv & \{\{P(0,y,y)\}\} \\ & (\forall x)(\forall y)(\forall z)[P(x,y,z) \to P(s(x),y,s(z))] \\ \equiv & (\forall x)(\forall y)(\forall z)[\neg P(x,y,z) \lor P(s(x),y,s(z))] \\ \equiv & \{\{\neg P(x,y,z), P(s(x),y,s(z))\}\} \\ \\ & Q(0) \\ \equiv & \{\{Q(0)\}\} \\ & (\forall x)[Q(x) \to Q(s(s(x)))] \\ \equiv & (\forall x)[\neg Q(x) \lor Q(s(s(x)))] \\ \equiv & \{\{\neg Q(x), Q(s(s(x)))\}\} \end{array}$$

y de la negación de la conclusión

$$\begin{array}{ll} & \neg(\exists x)(\exists y)[P(x,s(y),s(s(0))) \land Q(s(x))] \\ \equiv & (\forall x)(\forall y)\neg(P(x,s(y),s(s(0))) \land Q(s(x))) \\ \equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg P(x,s(y),s(s(0))) \lor \neg Q(s(x))) \\ \equiv & \{\{\neg P(x,s(y),s(s(0))), \neg Q(s(x))\}\} \end{array}$$

La base de conocimiento es

$$\begin{array}{ll} C_1 & = \{\{P(0,y,y)\} \\ C_2 & = \{\neg P(x,y,z), P(s(x),y,s(z))\} \\ C_2 & = \{Q(0)\} \\ C_4 & = \{\neg Q(x), Q(s(s(x)))\} \end{array}$$

y el objetivo es

$$\{\neg P(x,s(y),s(s(0))), \neg Q(s(x))\}\}$$

El grafo de resolución se muestra en la figura 1 (página 5).

La solución correspondiente a la segunda rama es

$$\begin{array}{l} t_1 = x\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = s(x_1)\sigma_2\sigma_3 = s(0)\sigma_3 = s(0) \\ t_2 = y\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = y\sigma_2\sigma_3 = 0\sigma_3 = 0 \end{array}$$

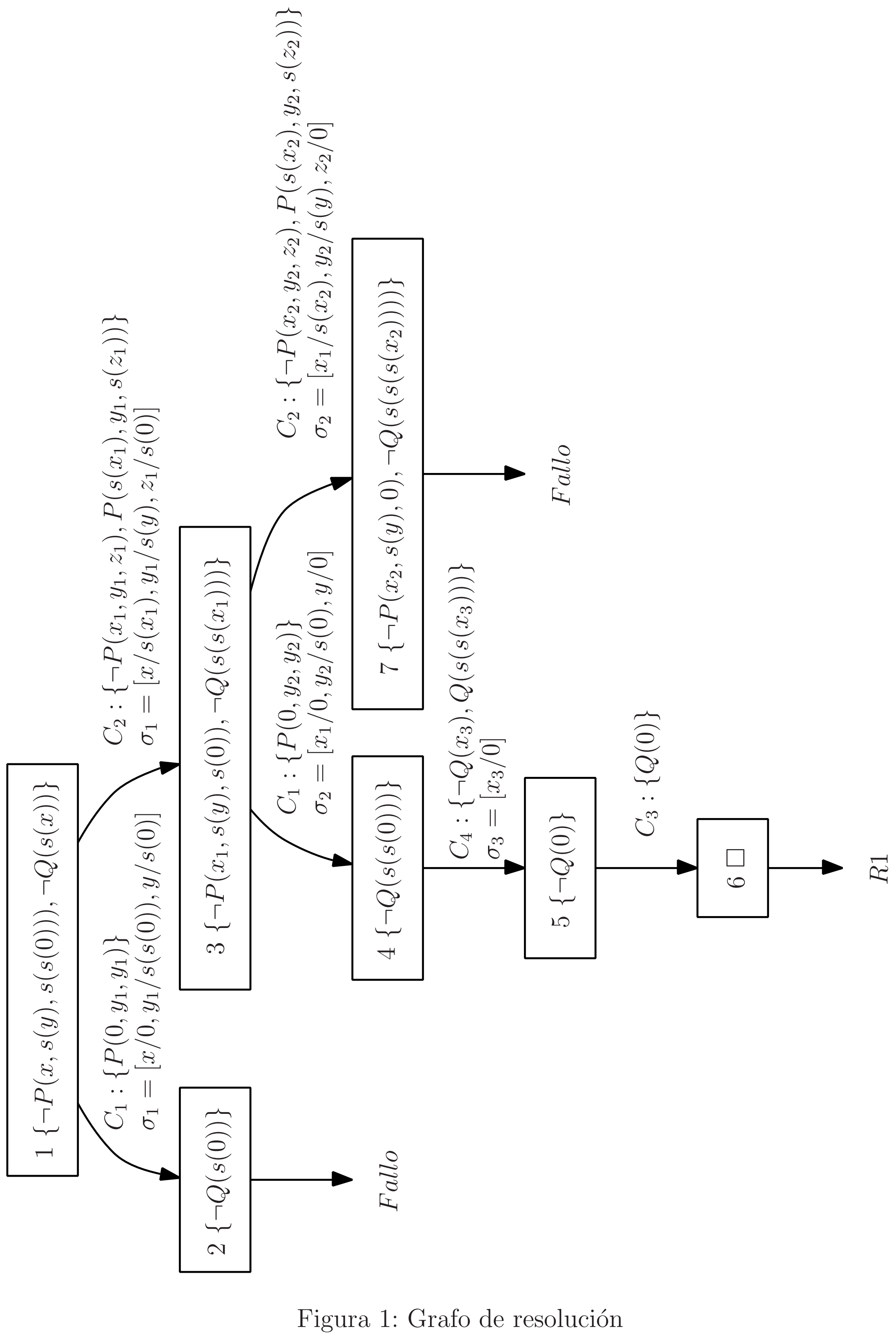

Figura 1: Grafo de resolución

Ejercicio 4 [2.5 puntos] *Decidir, mediante resolución, si*

$$\models (\forall x)(\forall y)[R(x,y) \to (\exists z)[R(x,z) \land R(z,y)]]$$

En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir de la resolución.

Solución:

En primer lugar se calcula una forma clausal de la negación de la fórmula.

$$\begin{array}{ll}
 & \neg(\forall x)(\forall y)[R(x,y) \to (\exists z)[R(x,z) \land R(z,y)]] \\
\equiv & (\exists x)(\exists y)\neg(R(x,y) \to (\exists z)[R(x,z) \land R(z,y)]) \\
\equiv & (\exists x)(\exists y)[R(x,y) \land \neg(\exists z)[R(x,z) \land R(z,y)]] \\
\equiv & (\exists x)(\exists y)[R(x,y) \land (\forall z)\neg(R(x,z) \land R(z,y))] \\
\equiv & (\exists x)(\exists y)[R(x,y) \land (\forall z)[\neg R(x,z) \lor \neg R(z,y)]] \\
\equiv & (\exists x)(\exists y)(\forall z)[R(x,y) \land (\neg R(x,z) \lor \neg R(z,y))] \\
\equiv_{sat} & (\forall z)[R(a,b) \land (\neg R(a,z) \lor \neg R(z,b))] \\
\equiv & \{\{R(a,b)\}, \{\neg R(a,z), \neg R(z,b)\}\}
\end{array}$$

La saturación por resolución es

$$\begin{array}{lll}
1 & \{R(a,b)\} & \\
2 & \{\neg R(a,z), \neg R(z,b)\} & \\
3 & \{\neg R(b,b)\} & \text{Res. de 1.1 y 2.1 con } \sigma = [z/b] \\
4 & \{\neg R(a,a)\} & \text{Res. de 1.1 y 2.2 con } \sigma = [z/a]
\end{array}$$

Por tanto, el conjunto de cláusulas es consistente, la fórmula inicial no es válida y un contramodelo de Herbrand es (U, I) donde $U = \{a, b\}$, $I(R) = \{(a, b)\}$.