Soluciones del examen de *Lógica informática* (Grupo 2) del 7 de Junio de 2006

José A. Alonso Jiménez

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla
Sevilla, 7 de Junio de 2006

Ejercicio 1 [2.5 puntos] *Decidir, mediante resolución, si*

$(\forall x)(\forall y)[(\forall z)[P(z,x) \to P(z,y)] \to Q(x,y)] \models (\forall x)Q(x,x)$

En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir de la resolución.

Solución:

En primer lugar calculamos la forma clausal de la hipótesis

$$\begin{array}{ll}
 & (\forall x)(\forall y)[(\forall z)[P(z,x) \to P(z,y)] \to Q(x,y)] \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg(\forall z)[P(z,x) \to P(z,y)] \lor Q(x,y)] \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[(\exists z)\neg(P(z,x) \to P(z,y)) \lor Q(x,y)] \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[(\exists z)[P(z,x) \land \neg P(z,y)] \lor Q(x,y)] \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)(\exists z)[(P(z,x) \land \neg P(z,y)) \lor Q(x,y)] \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)(\exists z)[(P(z,x) \lor Q(x,y)) \land (\neg P(z,y) \lor Q(x,y))] \\
\equiv_{sat} & (\forall x)(\forall y)[(P(f(x,y),x) \lor Q(x,y)) \land (\neg P(f(x,y),y) \lor Q(x,y))] \\
\equiv & \{\{P(f(x,y),x), Q(x,y)\}, \{\neg P(f(x,y),y), Q(x,y)\}\}
\end{array}$$

y de la negación de la conclusión

$$\begin{array}{ll}
 & \neg(\forall x)Q(x,x) \\
\equiv & (\exists x)\neg Q(x,x) \\
\equiv_{sat} & \neg Q(a,a) \\
\equiv & \{\{\neg Q(a,a)\}\}
\end{array}$$

La demostración por resolución es

$$\begin{array}{lll}
1 & \{P(f(x,y),x), Q(x,y)\} & \\
2 & \{\neg P(f(x,y),y), Q(x,y)\} & \\
3 & \{\neg Q(a,a)\} & \\
4 & \{P(f(a,a),a)\} & \text{Res. de 1 y 3 con } \sigma = [x/a, y/a] \\
5 & \{\neg P(f(a,a),a)\} & \text{Res. de 2 y 3 con } \sigma = [x/a, y/a] \\
6 & \square & \text{Res. de 4 y 5}
\end{array}$$

Ejercicio 2 [2.5 puntos] *Decidir, mediante tableros semánticos, si*

$$(\forall x)(\forall y)[(\forall z)[P(z,x) \to P(z,y)] \to Q(x,y)] \models (\forall x)Q(x,x)$$

En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir del tablero.

Solución:

1. $(\forall x)(\forall y)[(\forall z)[P(z,x) \to P(z,y)] \to Q(x,y)]$
2. $\neg(\forall x)Q(x,x)$
3. $\neg Q(a,a)$ (2)
4. $(\forall y)[(\forall z)[P(z,a) \to P(z,y)] \to Q(a,y)]$ (1)
5. $(\forall z)[P(z,a) \to P(z,a)] \to Q(a,a)$ (4)

6. $\neg(\forall z)[P(z,a) \to P(z,a)]$ (5)
8. $\neg(P(b,a) \to P(b,a))$ (6)
9. $P(b,a)$ (8)
10. $\neg P(b,a)$ (8)

Cerrada (9–10)

7. $Q(a,a)$ (5)

Cerrada (7–3)

Como las ramas son cerradas, se tiene que

$$(\forall x)(\forall y)[(\forall z)[P(z,x) \to P(z,y)] \to Q(x,y)] \models (\forall x)Q(x,x)$$

Ejercicio 3 [2.5 puntos] *Se considera el siguiente conjunto de fórmulas*

$$\begin{aligned} T = \{ \; & (\forall x)(\forall z)R(x, p(x, z)), \\ & (\forall x)(\forall y)(\forall z)[R(x, z) \rightarrow R(x, p(y, z))]\} \end{aligned}$$

Demostrar por resolución lineal que

$$T \models (\exists x)R(x, p(a, p(b, nil)))$$

y, a partir de la demostración encontrar todos los términos t *tales que*

$$T \models R(t, p(a, p(b, nil)))$$

Solución:

En primer lugar se calcula las formas clausales de las fórmulas de T:

$$\begin{aligned} & (\forall x)(\forall z)R(x, p(x, z)) \\ \equiv \; & \{\{R(x, p(x, z))\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\forall x)(\forall y)(\forall z)[R(x, z) \rightarrow R(x, p(y, z))] \\ \equiv \; & (\forall x)(\forall y)(\forall z)[\neg R(x, z) \vee R(x, p(y, z))] \\ \equiv \; & \{\{\neg R(x, z), R(x, p(y, z))\}\} \end{aligned}$$

y de la negación de la conclusión

$$\begin{aligned} & \neg(\exists x)R(x, p(a, p(b, nil))) \\ \equiv \; & (\forall x)\neg R(x, p(a, p(b, nil))) \\ \equiv \; & \{\{\neg R(x, p(a, p(b, nil)))\}\} \end{aligned}$$

La base de conocimiento es

$$\begin{aligned} C_1 &= \{R(x, p(x, z))\} \\ C_2 &= \{\neg R(x, z), R(x, p(y, z))\} \end{aligned}$$

y el objetivo es

$$\{\neg R(x, p(a, p(b, nil)))\}$$

El grafo de resolución se muestra en la figura 1

Las solución correspondientes a las dos primeras ramas son

$$\begin{aligned} & t = x\sigma_1 = a \\ & t = x\sigma_1\sigma_2 = x\sigma_2 = b \end{aligned}$$

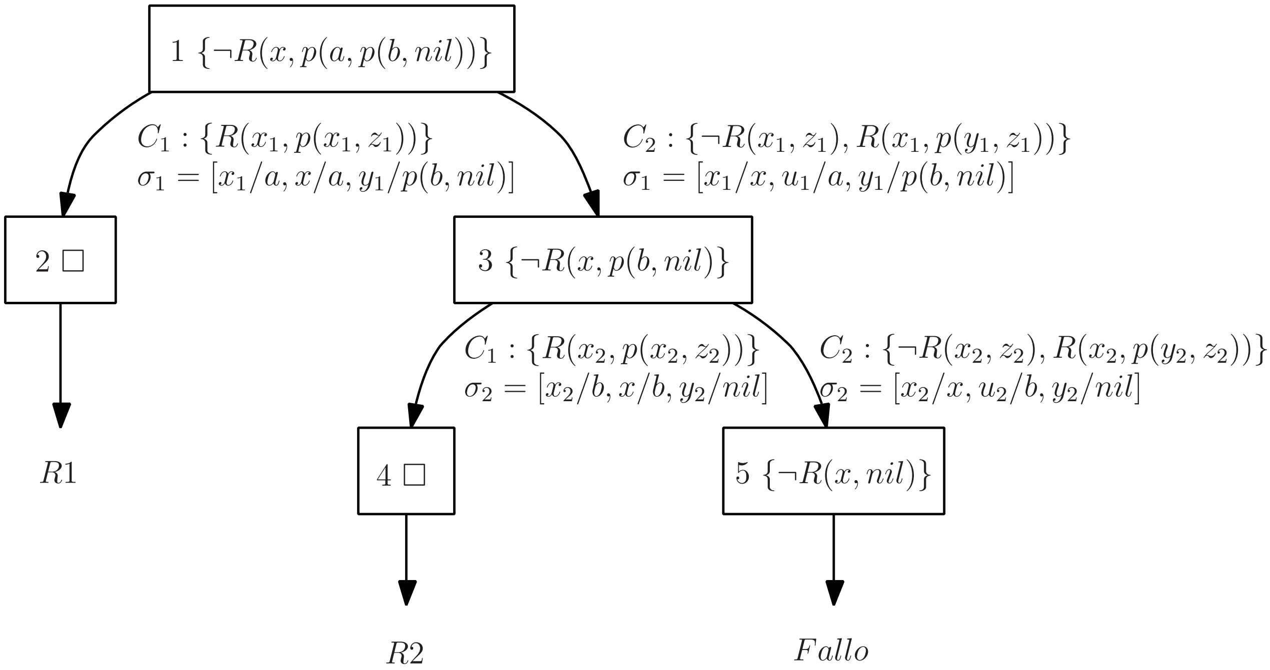

Figura 1: Grafo de resolución

Ejercicio 4 [2.5 puntos] *Decidir, mediante resolución, si*

$\models (\exists x)[P(x) \to Q(x)] \to ((\exists x)P(x) \to (\exists x)Q(x))$

En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir de la resolución.

Solución:

En primer lugar calculamos la forma clausal de la negación de la fórmmula.

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg((\exists x)[P(x) \to Q(x)] \to ((\exists x)P(x) \to (\exists x)Q(x))) \\
\equiv & \neg((\exists x)[P(x) \to Q(x)] \to ((\exists y)P(y) \to (\exists z)Q(z))) \\
\equiv & (\exists x)[P(x) \to Q(x)] \wedge \neg((\exists y)P(y) \to (\exists z)Q(z)) \\
\equiv & (\exists x)[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge ((\exists y)P(y) \wedge \neg(\exists z)Q(z)) \\
\equiv & (\exists x)[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge ((\exists y)P(y) \wedge (\forall z)\neg Q(z)) \\
\equiv & (\exists x)(\exists y)(\forall z)[(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (P(y) \wedge \neg Q(z))] \\
\equiv_{sat} & (\forall z)[(\neg P(a) \vee Q(a)) \wedge (P(b) \wedge \neg Q(z))] \\
\equiv & \{\{\neg P(a), Q(a)\}, \{P(b)\}, \{\neg Q(z)\}\}
\end{array}
$$

Las cláusulas obtenidas son

$$
\begin{array}{ll}
C_1 : & \{\neg P(a), Q(a)\} \\
C_2 : & \{P(b)\} \\
C_3 : & \{\neg Q(z)\}
\end{array}
$$

Al saturar por resolución la única cláusula que se obtiene es

$$C_4 : \{\neg P(a)\}$$

que es la resolvente de C_1 y C_3 con el unificador $[z/a]$. Por tanto, el conjunto de cláusulas es consistente, la fórmula inicial no es válida y un contramodelo de Herbrand es (U, I) donde $U = \{a, b\}$, $I(P) = \{b\}$ e $I(Q) = \emptyset$.