Soluciones del examen de *Lógica informática* (Grupos 1 y 2) del 26 de Junio de 2006

José A. Alonso Jiménez

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla
Sevilla, 26 de Junio de 2006

Ejercicio 1 [1.6 puntos] *Sea F la fórmula $(p \to q) \to \neg(q \vee r) \wedge \neg p$.*

1. *Decidir, mediante tablero semántico, si F es una tautología.*
2. *Si F no es una tautología, calcular, a partir de su tablero semántico, los contramodelos de F, una forma normal disyuntiva de $\neg F$ y una forma normal conjuntiva de F.*

Solución:
Apartado 1: Decidiremos la validez de F construyendo el tablero semántico de $\neg F$.

1. $\neg((p \to q) \to \neg(q \vee r) \wedge \neg p)$
2. $p \to q$ (1)
3. $\neg(\neg(q \vee r) \wedge \neg p)$ (1)

- 4. $\neg\neg(q \vee r)$ (3)
  6. $q \vee r$ (4)
  - 7. $\neg p$ (2)
    - 9. q (6) Abierta $\{\neg p, q\}$
    - 10. r (6) Abierta $\{\neg p, r\}$
  - 8. q (2)
    - 11. q (6) Abierta $\{q\}$
    - 12. r (6) Abierta $\{q, r\}$
- 4. $\neg\neg p$ (3)
  13. p (5)
  - 14. $\neg p$ (2) Cerrada 13–14
  - 15. q (2) Abierta $\{p, q\}$

Puesto que el tablero de $\neg F$ tiene ramas abiertas, la fórmula $\neg F$ tiene modelos y, por tanto, F no es una tautología.

Nótese que para decidir que F no es una tautología bastaba desarrollar hasta encontrar la primera rama abierta. Hemos desarrollado el tablero completo para encontrar los contramodelos de F que se piden en el siguiente apartado.

Apartado 2: Los contramodelos de F son los modelos de $\neg F$ y se obtienen a partir de las ramas abiertas del tablero de $\neg F$. Los contramodelos son

	p	q	r
v_1	0	1	–
v_2	0	–	1
v_3	–	1	–
v_4	–	1	1
v_5	1	1	–

Puesto que v_3 está contenido en v_1, v_4 y v_5, los contramodelos se reducen v_2 y v_3. Por tanto,

$$\neg F \equiv (\neg p \wedge r) \vee q$$

y una forma normal disyuntiva de $\neg F$ es

$$(\neg p \wedge r) \vee q$$

Además,

$$\begin{aligned}
F &\equiv \neg\neg F \\
&\equiv \neg((\neg p \land r) \lor q) \\
&\equiv \neg(\neg p \land r) \land \neg q \\
&\equiv (\neg\neg p \lor \neg r) \land \neg q \\
&\equiv (p \lor \neg r) \land \neg q
\end{aligned}$$

y una forma normal conjuntiva de F es

$$(p \lor \neg r) \land \neg q.$$

Ejercicio 2 [1.6 puntos] *Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:*

1. *Si $\{F \to G,\ F\}$ es consistente, entonces $\{G\}$ es consistente.*
2. *Si S es un conjunto inconsistente de fórmulas, entonces el tablero semántico cerrado de S obtenido aplicando las reglas α antes que las reglas β tiene menos nodos que el tablero semántico cerrado de S obtenido aplicando las reglas β antes que las reglas α.*

Solución:

Apartado 1: La proposición es cierta. En efecto, supongamos que $\{F \to G,\ F\}$ es consistente, entonces existe un modelo v del conjunto. Por tanto, $v(F \to G) = 1$ y $v(F) = 1$. Por la definición del valor de verdad del condicional, $v(G) = 1$. Por consiguiente, $\{G\}$ es consistente.

Apartado 2: La proposición es falsa. Como contraejemplo consideremos el conjunto

$$S = \{p_1 \land (p_2 \land p_3), q \lor r, \neg q, \neg r\}.$$

El tablero semántico cerrado de S obtenido aplicando las reglas α antes que las reglas β es

1. $p_1 \land (p_2 \land p_3)$
2. $q \lor r$
3. $\neg q$
4. $\neg r$
5. p_1 (1)
6. $p_2 \land p_3$ (1)
7. p_2 (6)
8. p_3 (6)

9. q (2)	10. r (2)
Cerrada	Cerrada
9–3	10–4

y el tablero semántico cerrado de S obtenido aplicando las reglas β antes que las reglas α es

1. $p_1 \land (p_2 \land p_3)$
2. $q \lor r$
3. $\neg q$
4. $\neg r$

5. q (2)	6. r (2)
Cerrada	Cerrada
5–3	6–4

El número de nodos del primer tablero es mayor que el número de nodos del segundo tablero.

Ejercicio 3 [1.6 puntos] *Se consideran las siguientes fórmulas:*

$$\begin{array}{ll} F_1 & = (\forall x)(\exists x_1)(\forall y)(\exists y_1)(\forall z)(\exists z_1)P(x,x_1,y,y_1,z,z_1) \\ F_2 & = (\exists x)(\forall x_1)(\exists y)(\forall y_1)(\exists z)(\exists u)P(z,x,x_1,y,y_1,u) \\ F_3 & = (\exists x)(\forall x_1)(\exists y)(\exists y_1)(\forall z)(\exists z_1)P(x,x_1,y,y_1,z,z_1) \end{array}$$

Decidir, por resolución, las siguientes relaciones. Para las que no se verifiquen, dar un contramodelo.

1. $F_1 \models F_2$
2. $F_3 \models F_2$

Solución:

Apartado 1: Decidir $F_1 \models F_2$ se reduce a decidir si $\{F_1, \neg F_2\}$ es inconsistente. Lo haremos por resolución. En primer lugar calculamos una forma clausal de F_1

$$\begin{array}{ll} & (\forall x)(\exists x_1)(\forall y)(\exists y_1)(\forall z)(\exists z_1)P(x,x_1,y,y_1,z,z_1) \\ \equiv_{sat} & (\forall x)(\forall y)(\exists y_1)(\forall z)(\exists z_1)P(x,f_1(x),y,y_1,z,z_1) \\ \equiv_{sat} & (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\exists z_1)P(x,f_1(x),y,f_2(x,y),z,z_1) \\ \equiv_{sat} & (\forall x)(\forall y)(\forall z)P(x,f_1(x),y,f_2(x,y),z,f_3(x,y,z)) \\ \equiv & \{\{P(x,f_1(x),y,f_2(x,y),z,f_3(x,y,z))\}\} \end{array}$$

y una forma clausal de $\neg F_2$

$$\begin{array}{ll} & \neg(\exists x)(\forall x_1)(\exists y)(\forall y_1)(\exists z)(\exists u)P(z,x,x_1,y,y_1,u) \\ \equiv & (\forall x)(\exists x_1)(\forall y)(\exists y_1)(\forall z)(\forall u)\neg P(z,x,x_1,y,y_1,u) \\ \equiv_{sat} & (\forall x)(\forall y)(\exists y_1)(\forall z)(\forall u)\neg P(z,x,f_4(x),y,y_1,u) \\ \equiv_{sat} & (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall u)\neg P(z,x,f_4(x),y,f_5(x,y),u) \\ \equiv & \{\{\neg P(z,x,f_4(x),y,f_5(x,y),u)\}\} \end{array}$$

Las cláusulas obtenidas son

$$\begin{array}{ll} C_1: & \{P(x,f_1(x),y,f_2(x,y),z,f_3(x,y,z))\} \\ C_2: & \{\neg P(z,x,f_4(x),y,f_5(x,y),u)\} \end{array}$$

Para calcular una resolvente de C_1 y C_2 separamos las variables aplicándole a C_1 el renombramiento $\theta = [x/x_1, y/y_1, z/z_1]$ con lo que se obtiene

$$C_1\theta = \{P(x_1,f_1(x_1),y_1,f_2(x_1,y_1),z_1,f_3(x_1,y_1,z_1))\}$$

y calculamos un unificador de máxima generalidad de $P(x_1,f_1(x_1),y_1,f_2(x_1,y_1),z_1,f_3(x_1,y_1,z_1))$ y $P(z,x,f_4(x),y,f_5(x,y),u)$

$$
\begin{array}{rl}
& \mathsf{unif}((P(x_1,f_1(x_1),y_1,f_2(x_1,y_1),z_1,f_3(x_1,y_1,z_1)) = P(z,x,f_4(x),y,f_5(x,y),u)), \\
& \quad \epsilon) \\
= & \mathsf{unif}((x_1 = z, f_1(x_1) = x, y_1 = f_4(x), f_2(x_1,y_1) = y, z_1 = f_5(x,y), f_3(x_1,y_1,z_1) = u)), \\
& \quad \epsilon) \\
= & \mathsf{unif}((f_1(x_1) = x, y_1 = f_4(x), f_2(x_1,y_1) = y, z_1 = f_5(x,y), f_3(x_1,y_1,z_1) = u)), \\
& \quad [z/x_1]) \\
= & \mathsf{unif}((y_1 = f_4(f_1(x_1)), f_2(x_1,y_1) = y, z_1 = f_5(f_1(x_1),y), f_3(x_1,y_1,z_1) = u)), \\
& \quad [z/x_1, x/f_1(x_1)]) \\
= & \mathsf{unif}((f_2(x_1,f_4(f_1(x_1))) = y, z_1 = f_5(f_1(x_1),y), f_3(x_1,f_4(f_1(x_1)),z_1) = u),) \\
& \quad [z/x_1, x/f_1(x_1), y_1/f_4(f_1(x_1))]) \\
= & \mathsf{unif}((z_1 = f_5(f_1(x_1), f_2(x_1,f_4(f_1(x_1)))), f_3(x_1,f_4(f_1(x_1)),z_1) = u)), \\
& \quad [z/x_1, x/f_1(x_1), y_1/f_4(f_1(x_1)), y/f_2(x_1,f_4(f_1(x_1)))]) \\
= & \mathsf{unif}((f_3(x_1,f_4(f_1(x_1)), f_5(f_1(x_1),f_2(x_1,f_4(f_1(x_1))))) = u)), \\
& \quad [z/x_1, x/f_1(x_1), y_1/f_4(f_1(x_1)), y/f_2(x_1,f_4(f_1(x_1))), z_1/f_5(f_1(x_1),f_2(x_1,f_4(f_1(x_1))))]) \\
= & \mathsf{unif}(()), \\
& \quad [z/x_1, x/f_1(x_1), y_1/f_4(f_1(x_1)), y/f_2(x_1,f_4(f_1(x_1))), z_1/f_5(f_1(x_1),f_2(x_1,f_4(f_1(x_1)))), \\
& \quad u/f_3(x_1,f_4(f_1(x_1)), f_5(f_1(x_1),f_2(x_1,f_4(f_1(x_1)))))]) \\
= & [z/x_1, x/f_1(x_1), y_1/f_4(f_1(x_1)), y/f_2(x_1,f_4(f_1(x_1))), z_1/f_5(f_1(x_1),f_2(x_1,f_4(f_1(x_1)))), \\
& u/f_3(x_1,f_4(f_1(x_1)), f_5(f_1(x_1),f_2(x_1,f_4(f_1(x_1)))))]
\end{array}
$$

Por tanto, la resolvente de C_1 y C_2 es la cláusula vacía. De lo que se sigue que $\{F_1, \neg F_2\}$ es inconsistente y $F_1 \models F_2$.

Apartado 2: Decidir $F_3 \models F_2$ se reduce a decidir si $\{F_3, \neg F_2\}$ es inconsistente. Lo haremos por resolución. En primer lugar calculamos una forma clausal de F_3

$$
\begin{array}{rl}
& (\exists x)(\forall x_1)(\exists y)(\exists y_1)(\forall z)(\exists z_1)P(x,x_1,y,y_1,z,z_1) \\
\equiv_{sat} & (\forall x_1)(\exists y)(\exists y_1)(\forall z)(\exists z_1)P(a,x_1,y,y_1,z,z_1) \\
\equiv_{sat} & (\forall x_1)(\exists y_1)(\forall z)(\exists z_1)P(a,x_1,f_6(x_1),y_1,z,z_1) \\
\equiv_{sat} & (\forall x_1)(\forall z)(\exists z_1)P(a,x_1,f_6(x_1),f_7(x_1),z,z_1) \\
\equiv_{sat} & (\forall x_1)(\forall z)P(a,x_1,f_6(x_1),f_7(x_1),z,f_8(x_1,z)) \\
\equiv & \{\{P(a,x_1,f_6(x_1),f_7(x_1),z,f_8(x_1,z))\}\}
\end{array}
$$

Las cláusulas de $\neg F_2$ y F_3 son

$$
\begin{array}{ll}
C_2: & \{\neg P(z,x,f_4(x),y,f_5(x,y),u)\} \\
C_3: & \{P(a,x_1,f_6(x_1),f_7(x_1),z,f_8(x_1,z))\}
\end{array}
$$

Para calcular una resolvente de C_2 y C_3 calculamos un unificador de máxima generalidad de los literales $P(z,x,f_4(x),y,f_5(x,y),u)$ y $P(a,x_1,f_6(x_1),f_7(x_1),z,f_8(x_1,z))$.

$$
\begin{array}{rl}
& \mathsf{unif}((P(z,x,f_4(x),y,f_5(x,y),u) = P(a,x_1,f_6(x_1),f_7(x_1),z,f_8(x_1,z)), \\
& \quad \epsilon) \\
= & \mathsf{unif}((z = a, x = x_1, f_4(x) = f_6(x_1), y = f_7(x_1), f_5(x,y) = z, u = f_8(x_1,z)), \\
& \quad \epsilon) \\
= & \mathsf{unif}((x = x_1, f_4(x) = f_6(x_1), y = f_7(x_1), f_5(x,y) = z, u = f_8(x_1,z)), \\
& \quad [z/a]) \\
= & \mathsf{unif}((f_4(x_1) = f_6(x_1), y = f_7(x_1), f_5(x,y) = z, u = f_8(x_1,z)), \\
& \quad [z/a, x/x_1]) \\
= & \mathsf{unif}((f_4(x_1) = f_6(x_1), y = f_7(x_1), f_5(x,y) = z, u = f_8(x_1,z)), \\
& \quad [z/a, x/x_1]) \\
= & \text{“No unificable”}
\end{array}
$$

Por tanto, C_2 y C_3 no tienen resolventes. De lo que se sigue que $\{F_3, \neg F_2\}$ es consistente y $F_3 \not\models F_2$. Un contramodelo de Herbrand se obtiene haciendo

$$I(P) = \{P(a, t_1, f_6(t_1), f_7(t_1), t, f_8(t_1, t)) : t, t_1 \in UH\},$$

donde UH representa el universo de Herbrand definido recursivamente por

- $a \in UH$,
- Si $t \in UH$, entonces $f_4(t), f_6(t), f_7(t) \in UH$
- Si $t_1, t_2 \in UH$ entonces $f_5(t_1, t_2), f_8(t_1, t_2) \in UH$.

Ejercicio 4 [1.6 puntos] *Se considera el conjunto* $S = \{(\forall x)[P(x,y) \to \neg Q(z)],\ P(x,v),\ (\exists u)Q(u)\}$

1. *Probar que* S *es consistente.*
2. *Decidir si* S *tiene o no un modelo, justificando la respuesta.*

Solución:
Apartado 1: Probar que S es consistente se reduce a probar que

$$S_1 = \{(\exists x)(\exists y)(\exists z)(\exists v)[(\forall x)[P(x,y) \to \neg Q(z)] \wedge P(x,v) \wedge (\exists u)Q(u)]$$

lo es. Lo haremos por resolución. Comenzamos calculando una forma clausal de S_1

$$\begin{array}{ll}
 & (\exists x)(\exists y)(\exists z)(\exists v)[(\forall x)[P(x,y) \to \neg Q(z)] \wedge P(x,v) \wedge (\exists u)Q(u)] \\
\equiv & (\exists x)(\exists y)(\exists z)(\exists v)[(\forall x_1)[P(x_1,y) \to \neg Q(z)] \wedge P(x,v) \wedge (\exists u)Q(u)] \\
\equiv & (\exists x)(\exists y)(\exists z)(\exists v)(\exists u)(\forall x_1)[(\neg P(x_1,y) \vee \neg Q(z)) \wedge P(x,v) \wedge Q(u)] \\
\equiv_{sat} & (\forall x_1)[(\neg P(x_1,b) \vee \neg Q(c)) \wedge P(a,d) \wedge Q(e)] \\
\equiv & \{\{\neg P(x_1,b), \neg Q(c)\}, \{P(a,d)\}, \{Q(e)\}\}
\end{array}$$

Las cláusulas obtenidas son

$$\begin{array}{ll}
C_1: & \{\neg P(x_1,b), \neg Q(c)\} \\
C_2: & \{P(a,d)\} \\
C_3: & \{Q(e)\}
\end{array}$$

Entre las cláusulas no hay resolventes. Por tanto, S_1 es consistente y un modelo de Herbrand de S_1 es $\{P(a,d), Q(e)\}$. Es decir, el universo es $U = \{a,b,c,d,e\}$, la interpretación de P es $I(P) = \{(a,d)\}$ y la de Q es $I(Q) = \{e\}$. Además, (U,I) con la asignación A tal que $A(x) = a$, $A(y) = b$, $A(z) = c$ y $A(v) = d$ verifica el conjunto S. En efecto,

$$\begin{array}{l}
\{(\forall x)[P(x,y) \to \neg Q(z)],\ \ P(x,v),\ \ (\exists u)Q(u)\} \\
\quad 1 \qquad\qquad\qquad\ 1 \quad 11\ c \qquad 1\ \ a\, d \qquad 1e\ \ 1\ \ e
\end{array}$$

Apartado 2: Decidir si S tiene modelo se reduce a decidir si

$$S_2 = \{(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall v)[(\forall x)[P(x,y) \to \neg Q(z)] \wedge P(x,v) \wedge (\exists u)Q(u)]$$

lo es. Lo haremos por resolución. Comenzamos calculando una forma clausal de S_1

$$\begin{array}{ll}
 & (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall v)[(\forall x)[P(x,y) \to \neg Q(z)] \wedge P(x,v) \wedge (\exists u)Q(u)] \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall v)[(\forall x_1)[P(x_1,y) \to \neg Q(z)] \wedge P(x,v) \wedge (\exists u)Q(u)] \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall v)(\exists u)(\forall x_1)[(\neg P(x_1,y) \vee \neg Q(z)) \wedge P(x,v) \wedge Q(u)] \\
\equiv_{sat} & (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall v)(\forall x_1)[(\neg P(x_1,y) \vee \neg Q(z)) \wedge P(x,v) \wedge Q(f(x,y,z,v))] \\
\equiv & \{\{\neg P(x_1,y), \neg Q(z)\}, \{P(x,v)\}, \{Q(f(x,y,z,v))\}\}
\end{array}$$

Las cláusulas obtenidas son

$$\begin{array}{ll}
C_1: & \{\neg P(x_1,y), \neg Q(z)\} \\
C_2: & \{P(x,v)\} \\
C_3: & \{Q(f(x,y,z,v))\}
\end{array}$$

Una refutación es

1	$\{\neg P(x_1, y), \neg Q(z)\}$	
2	$\{P(x, v)\}$	
3	$\{Q(f(x, y, z, v))\}$	
4	$\{\neg Q(z)\}$	Res. de 1 y 2 con $\sigma = [x/x_1, v/y]$
5	$\square$	Res. de $4[z/z_1]$ y 3 con $\sigma = [z_1/f(x, y, z, v)]$

Por tanto, S_2 es inconsistente y S no tiene modelos.

Ejercicio 5 [1.6 puntos] *Se considera el siguiente argumento:*

> Algunas personas admiran a los que tienen bigote. Algunas personas no simpatizan con nadie que admire a los que tienen bigote. Luego algunas personas no son simpáticas a todos.

1. *Formalizar el argumento utilizando los símbolos $B(x)$: x tiene bigote, $A(x,y)$: x admira y, $S(x,y)$: x simpatiza con y.*
2. *Dedidir, mediante cualquiera de los métodos de demostración estudiados en el curso, la validez del argumento.*

Solución:
Apartado 1: La formalización es la siguiente

- Algunas personas admiran a los que tienen bigote:

  $F_1 : (\exists x)(\forall y)[B(y) \to A(x,y)]$

- Algunas personas no simpatizan con nadie que admire a los que tienen bigote:

  $F_2 : (\exists x)(\forall y)[(\forall z)[B(z) \to A(y,z)] \to \neg S(x,y)]$

- Algunas personas no son simpáticas a todos:

  $F_3 : (\exists x)\neg(\forall y)S(x,y)$

Apartado 2: Vamos a decidir por resolución si $\{F_1, F_2\} \models F_3$. En primer lugar calculamos una forma clausal de F_1

$$\begin{array}{ll} & (\exists x)(\forall y)[B(y) \to A(x,y)] \\ \equiv & (\exists x)(\forall y)[\neg B(y) \vee A(x,y)] \\ \equiv_{sat} & (\forall y)[\neg B(y) \vee A(a,y)] \\ \equiv & \{\{\neg B(y), A(a,y)\}\} \end{array}$$

una forma clausal de F_2

$$\begin{array}{ll} & (\exists x)(\forall y)[(\forall z)[B(z) \to A(y,z)] \to \neg S(x,y)] \\ \equiv & (\exists x)(\forall y)[\neg(\forall z)[B(z) \to A(y,z)] \vee \neg S(x,y)] \\ \equiv & (\exists x)(\forall y)[(\exists z)\neg(B(z) \to A(y,z)) \vee \neg S(x,y)] \\ \equiv & (\exists x)(\forall y)[(\exists z)[B(z) \wedge \neg A(y,z)] \vee \neg S(x,y)] \\ \equiv & (\exists x)(\forall y)(\exists z)[(B(z) \wedge \neg A(y,z)) \vee \neg S(x,y)] \\ \equiv_{sat} & (\forall y)(\exists z)[(B(z) \wedge \neg A(y,z)) \vee \neg S(b,y)] \\ \equiv_{sat} & (\forall y)[(B(f(y)) \wedge \neg A(y,f(y))) \vee \neg S(b,y)] \\ \equiv & (\forall y)[(B(f(y)) \vee \neg S(b,y)) \wedge (\neg A(y,f(y)) \vee \neg S(b,y))] \\ \equiv & \{\{B(f(y)), \neg S(b,y)\}, \{\neg A(y,f(y)), \neg S(b,y)\}\} \end{array}$$

y una forma clausal de $\neg F_3$

$$\begin{array}{ll} & \neg(\exists x)\neg(\forall y)S(x,y) \\ \equiv & (\forall x)\neg\neg(\forall y)S(x,y) \\ \equiv & (\forall x)(\forall y)S(x,y) \\ \equiv & \{\{S(x,y)\}\} \end{array}$$

Una refutación es

1	$\{\neg B(y), A(a,y)\}$	
2	$\{B(f(y)), \neg S(b,y)\}$	
3	$\{\neg A(y, f(y)), \neg S(b,y)\}$	
4	$\{S(x,y)\}$	
5	$\{\neg A(y, f(y))\}$	Res. de 4 y 3 con $\sigma = [x/b]$
6	$\{B(f(y))\}$	Res. de 4 y 2 con $\sigma = [x/b]$
7	$\{A(a, f(y))\}$	Res. de 6 y $1[y/y_1]$ con $\sigma = [y_1/f(y)]$
8	$\square$	Res. de 7 y 5 con $\sigma = [y/a]$

Por tanto, $\{F_1, F_2, \neg F_3\}$ es inconsistente y $\{F_1, F_2\} \models F_3$.

Ejercicio 6 [2 puntos] *Probar mediante deducción natural:*

1. $\models ((p \land q) \to (r \lor s)) \to ((p \to r) \lor (q \to s))$

2. $\{(\forall x)[Q(x) \to \neg R(x)],$
   $(\forall x)[P(x) \to Q(x) \lor S(x)],$
   $(\exists x)[P(x) \land R(x)]\}$
   $\models (\exists x)[P(x) \land S(x)]$

Solución:
Apartado 1: $\models ((p \land q) \to (r \lor s)) \to ((p \to r) \lor (q \to s))$

La solución se muestra en la figura 1 (página 13).
Apartado 2: $\{(\forall x)[Q(x) \to \neg R(x)],$
$(\forall x)[P(x) \to Q(x) \lor S(x)],$
$(\exists x)[P(x) \land R(x)]\}$
$\models (\exists x)[P(x) \land S(x)]$

La solución se muestra en la figura 2 (página 14).

1	$(p \land q) \to (r \lor s)$	Supuesto
2	$p \lor \neg p$	LEM
3	p	Supuesto
4	$q \lor \neg q$	LEM
5	q	Supuesto
6	$p \land q$	$\land$i $3, 5$
7	$r \lor s$	$\to$e $1, 6$
8	r	Supuesto
9	p	Supuesto
10	r	Hyp
11	$p \to r$	$\to$i $9 - 10$
12	$(p \to r) \lor (q \to s)$	$\lor$i 11
13	s	Supuesto
14	q	Supuesto
15	s	Hyp
16	$q \to s$	$\to$i $14 - 15$
17	$(p \to r) \lor (q \to s)$	$\lor$i 16
18	$(p \to r) \lor (q \to s)$	$\lor$e $7, 8 - 12, 13 - 17$
19	$\neg q$	Supuesto
20	q	Supuesto
21	$\bot$	$\neg$e $19, 20$
22	s	$\bot$e 21
23	$q \to s$	$\to$i $20 - 22$
24	$(p \to r) \lor (q \to s)$	$\lor$i 23
25	$(p \to r) \lor (q \to s)$	$\lor$e $4, 5 - 18, 19 - 24$
26	$\neg p$	Supuesto
27	p	Supuesto
28	$\bot$	$\neg$e $26, 27$
29	r	$\bot$e 28
30	$p \to r$	$\to$i $27 - 29$
31	$(p \to r) \lor (q \to s)$	$\lor$i 30
32	$(p \to r) \lor (q \to s)$	$\lor$e $2, 3 - 25, 26 - 31$
33	$((p \land q) \to (r \lor s)) \to ((p \to r) \lor (q \to s))$	$\to$i $1 - 32$

Figura 1: Apartado 1

1	$(\forall x)[Q(x) \to \neg R(x)]$	Supuesto
2	$(\forall x)[P(x) \to Q(x) \lor S(x)]$	Supuesto
3	$(\exists x)[P(x) \land R(x)]$	Supuesto
4	actual i	Supuesto
5	$P(i) \land R(i)$	Supuesto
6	$P(i) \to Q(i) \lor S(i)$	$\forall$e 2
7	$P(i)$	$\land$e 5
8	$Q(i) \lor S(i)$	$\to$e $6, 7$
9	$Q(i)$	Supuesto
10	$Q(i) \to \neg R(i)$	$\forall$e $1, 4$
11	$\neg R(i)$	$\to$e $10, 9$
12	$R(i)$	$\land$e 5
13	$\bot$	$\neg$e $11, 12$
14	$S(i)$	$\bot$e 13
15	$P(i) \land S(i)$	$\land$i $7, 14$
16	$(\exists x)[P(x) \land S(x)]$	$\exists$i $15, 4$
17	$S(i)$	Supuesto
18	$P(i) \land S(i)$	$\land$i $7, 17$
19	$(\exists x)[P(x) \land S(x)]$	$\exists$i $18, 4$
20	$(\exists x)[P(x) \land S(x)]$	$\lor$e $8, 9-16, 17-19$
21	$(\exists x)[P(x) \land S(x)]$	$\exists$e $3, 4-20$

Figura 2: Apartado 2