

Soluciones de exámenes de “Lógica informática”

José A. Alonso Jiménez




Grupo de Lógica Computacional
Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla
Sevilla, 10 de Junio del 2004 (Versión del 23 de mayo de 2006)

Esta obra está bajo una licencia Reconocimiento–NoComercial–CompartirIgual 2.5 Spain de Creative Commons.

Se permite:

- copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra
- hacer obras derivadas

Bajo las condiciones siguientes:

-  **Reconocimiento.** Debe reconocer los créditos de la obra de la manera especificada por el autor.
-  **No comercial.** No puede utilizar esta obra para fines comerciales.
-  **Compartir bajo la misma licencia.** Si altera o transforma esta obra, o genera una obra derivada, sólo puede distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.
 - Al reutilizar o distribuir la obra, tiene que dejar bien claro los términos de la licencia de esta obra.
 - Alguna de estas condiciones puede no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor.

Esto es un resumen del texto legal (la licencia completa). Para ver una copia de esta licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/es/> o envíe una carta a Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California 94305, USA.

Índice general

Examen de Diciembre de 2000	4
Examen de Junio de 2001	7
Examen de Septiembre de 2001	14
Examen de Diciembre de 2001	19
Examen de Junio de 2002	25
Examen de Septiembre de 2002	30
Examen de Junio de 2003	38
Examen de Septiembre de 2003	44
Examen de Diciembre de 2003	49
Examen de Junio de 2004	55
Examen de Septiembre de 2004	60

Examen de Diciembre de 2000

Ejercicio 1 El ejercicio consta de dos apartados.

(a) Probar que la siguiente fórmula es una tautología: $(p \rightarrow \neg q \wedge r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

(a.1) Utilizando tableros semánticos.

(a.2) Mediante forma normal conjuntiva.

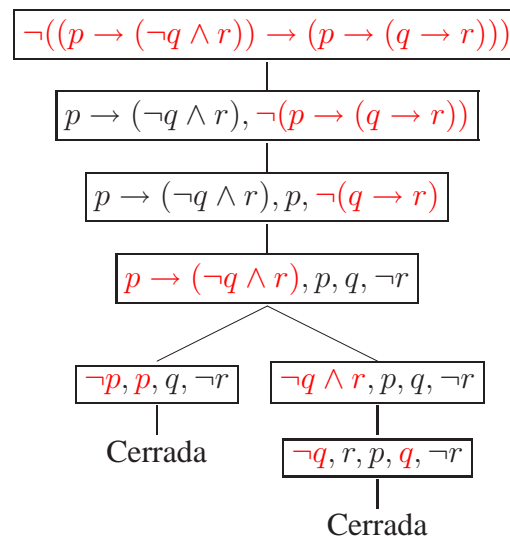
(b) Sea $U = \{\neg A_1 \vee \neg B_1 \vee C_2, \neg A_1 \vee B_1, \neg A_2 \vee B_2, A_1, A_2\}$

(b.1) Probar que U es consistente y describir razonadamente todos los modelos de U .

(b.2) Probar que $U \models C_2$ mediante resolución lineal.

Solución:

Solución del apartado (a.1): Un tablero semántico de $\neg((p \rightarrow \neg q \wedge r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r)))$ es



Como todas las hojas son cerradas, $(p \rightarrow \neg q \wedge r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$ es una tautología.

Solución del apartado (a.2): Cálculo de una forma normal conjuntiva de:

$$\begin{aligned}
 & (p \rightarrow \neg q \wedge r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \\
 \equiv & \neg(\neg p \vee (\neg q \wedge r)) \vee (\neg p \vee (\neg q \vee r)) && \text{[por (2)]} \\
 \equiv & (\neg\neg p \wedge \neg(\neg q \wedge r)) \vee (\neg p \vee \neg q \vee r) && \text{[por (3)]} \\
 \equiv & (p \wedge (\neg\neg q \vee \neg r)) \vee (\neg p \vee \neg q \vee r) && \text{[por (3) y (5)]} \\
 \equiv & (p \wedge (q \vee \neg r)) \vee (\neg p \vee \neg q \vee r) && \text{[por (5)]} \\
 \equiv & (p \vee \neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (q \vee \neg r \vee \neg p \vee \neg q \vee r) && \text{[por (7)]} \\
 \equiv & \mathbf{\vee \wedge \vee} \\
 \equiv & \mathbf{\vee}
 \end{aligned}$$

Por ser la fórmula equivalente a \vee , es una tautología.

Solución del apartado (b.1): Vamos a ver qué condiciones tiene que cumplir una valoración v para ser modelo de U . Para verificar las dos últimas fórmulas de U se tiene que

$$v(A_1) = 1 \tag{1}$$

$$v(A_2) = 1 \quad (2)$$

Para verificar $\neg A_1 \vee B_1$, teniendo en cuenta (1), se tiene que

$$v(B_1) = 1 \quad (3)$$

Para verificar $\neg A_2 \vee B_2$, teniendo en cuenta (2), se tiene que

$$v(B_2) = 1 \quad (4)$$

Para verificar $\neg A_1 \vee \neg B_1 \vee C_2$, teniendo en cuenta (1) y (3), se tiene que

$$v(C_2) = 1 \quad (5)$$

En definitiva, cualquier valoración v tal que $v(A_1) = v(A_2) = v(B_1) = v(B_2) = v(C_2) = 1$ es un modelo de U .

Solución del apartado (b.2): Una resolución lineal es

- | | | |
|----|-------------------------------|---------------------|
| 1 | $\{\neg A_1, \neg B_1, C_2\}$ | |
| 2 | $\{\neg A_1, B_1\}$ | |
| 3 | $\{\neg A_2, B_2\}$ | |
| 4 | $\{A_1\}$ | |
| 5 | $\{A_2\}$ | |
| 6 | $\{\neg C_2\}$ | |
| 7 | $\{\neg A_1, \neg B_1\}$ | Resolvente de 6 y 1 |
| 8 | $\{\neg B_1\}$ | Resolvente de 7 y 4 |
| 9 | $\{\neg A_1\}$ | Resolvente de 8 y 2 |
| 10 | \square | Resolvente de 9 y 4 |

Ejercicio 2 (a) Hallar las formas normal prenexa conjuntiva, de Skolem y clausal de la fórmula:

$$((\exists z)A(y, z) \rightarrow (\exists u)B(y, u)) \rightarrow (\exists x)(\forall z)[P(x) \rightarrow \neg Q(z)]$$

(b) Sea S el conjunto formado por las fórmulas

$$F_1 : (\forall x)(\forall y)[I(x, y) \rightarrow I(y, x)] \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)[I(x, y) \wedge I(y, z) \rightarrow I(x, z)]$$

$$F_2 : P(e) \wedge (\forall x)[P(x) \rightarrow S(d, x)]$$

$$F_3 : (\forall x)(\forall y_1)(\forall y_2)[P(x) \wedge \neg I(y_1, y_2) \rightarrow \neg(S(y_1, x) \wedge S(y_2, x))]$$

Decidir, mediante resolución o construyendo un modelo de Herbrand, si:

$$(b.1) S \models (\forall y)[I(y, d) \rightarrow (\forall x)[P(x) \rightarrow S(y, x)]]$$

$$(b.2) S \models \neg(\exists x)[S(x, e) \wedge \neg I(x, d)]$$

Solución:

Solución del apartado (a):

1.- Forma normal conjuntiva:

$$\begin{aligned}
& ((\exists z)A(y, z) \rightarrow (\exists u)B(y, u)) \rightarrow (\exists x)(\forall z)[P(x) \rightarrow \neg Q(z)] \\
\equiv & ((\exists v)A(y, v) \rightarrow (\exists u)B(y, u)) \rightarrow (\exists x)(\forall z)[P(x) \rightarrow \neg Q(z)] && \text{[por rectificación]} \\
\equiv & \neg(\neg(\exists v)A(y, v) \vee (\exists u)B(y, u)) \vee (\exists x)(\forall z)[\neg P(x) \vee \neg Q(z)] && \text{[por (4)]} \\
\equiv & (\neg\neg(\exists v)A(y, v) \wedge \neg(\exists u)B(y, u)) \vee (\exists x)(\forall z)[\neg P(x) \vee \neg Q(z)] && \text{[por (6)]} \\
\equiv & ((\exists v)A(y, v) \wedge (\forall u)\neg B(y, u)) \vee (\exists x)(\forall z)[\neg P(x) \vee \neg Q(z)] && \text{[por (7) y (9)]} \\
\equiv & (\exists v)[A(y, v) \wedge (\forall u)\neg B(y, u)] \vee (\exists x)(\forall z)[\neg P(x) \vee \neg Q(z)] && \text{[por (13)]} \\
\equiv & (\exists v)[(A(y, v) \wedge (\forall u)\neg B(y, u)) \vee (\exists x)(\forall z)[\neg P(x) \vee \neg Q(z)]] && \text{[por (14)]} \\
\equiv & (\exists v)(\exists x)[(A(y, v) \wedge (\forall u)\neg B(y, u)) \vee (\forall z)[\neg P(x) \vee \neg Q(z)]] && \text{[por (18)]} \\
\equiv & (\exists v)(\exists x)(\forall z)[(A(y, v) \wedge (\forall u)\neg B(y, u)) \vee (\neg P(x) \vee \neg Q(z))] && \text{[por (16)]} \\
\equiv & (\exists v)(\exists x)(\forall z)[(\forall u)[A(y, v) \wedge \neg B(y, u)] \vee (\neg P(x) \vee \neg Q(z))] && \text{[por (15)]} \\
\equiv & (\exists v)(\exists x)(\forall z)(\forall u)[(A(y, v) \wedge \neg B(y, u)) \vee (\neg P(x) \vee \neg Q(z))] && \text{[por (12)]} \\
\equiv & (\exists v)(\exists x)(\forall z)(\forall u)[(A(y, v) \vee \neg P(x) \vee \neg Q(z)) \wedge \\
& \qquad \qquad \qquad (\neg B(y, u) \vee \neg P(x) \vee \neg Q(z))] && \text{[por (20)]}
\end{aligned}$$

2.- Forma de Skolem:

$$\begin{aligned}
& ((\exists z)A(y, z) \rightarrow (\exists u)B(y, u)) \rightarrow (\exists x)(\forall z)[P(x) \rightarrow \neg Q(z)] \\
\equiv & (\exists v)(\exists x)(\forall z)(\forall u)[(A(y, v) \vee \neg P(x) \vee \neg Q(z)) \wedge \\
& \qquad \qquad \qquad (\neg B(y, u) \vee \neg P(x) \vee \neg Q(z))] \\
\equiv_{sat} & (\exists y)(\exists v)(\exists x)(\forall z)(\forall u)[(A(y, v) \vee \neg P(x) \vee \neg Q(z)) \wedge \\
& \qquad \qquad \qquad (\neg B(y, u) \vee \neg P(x) \vee \neg Q(z))] && \text{[por cierre]} \\
\equiv_{sat} & (\exists v)(\exists x)(\forall z)(\forall u)[(A(a, v) \vee \neg P(x) \vee \neg Q(z)) \wedge (\neg B(a, u) \vee \neg P(x) \vee \neg Q(z))] && \text{[Skolem a]} \\
\equiv_{sat} & (\exists x)(\forall z)(\forall u)[(A(a, b) \vee \neg P(x) \vee \neg Q(z)) \wedge (\neg B(a, u) \vee \neg P(x) \vee \neg Q(z))] && \text{[Skolem b]} \\
\equiv_{sat} & (\forall z)(\forall u)[(A(a, b) \vee \neg P(c) \vee \neg Q(z)) \wedge (\neg B(a, u) \vee \neg P(c) \vee \neg Q(z))] && \text{[Skolem c]}
\end{aligned}$$

3.- Forma clausal:

$$\begin{aligned}
& ((\exists z)A(y, z) \rightarrow (\exists u)B(y, u)) \rightarrow (\exists x)(\forall z)[P(x) \rightarrow \neg Q(z)] \\
\equiv_{sat} & (\forall z)(\forall u)[(A(a, b) \vee \neg P(c) \vee \neg Q(z)) \wedge (\neg B(a, u) \vee \neg P(c) \vee \neg Q(z))] && \text{[Skolem c]} \\
\equiv & \{ \{A(a, b), \neg P(c), \neg Q(z)\}, \{ \neg B(a, u), \neg P(c), \neg Q(z) \} \}
\end{aligned}$$

Examen de Junio de 2001

Ejercicio 3 Este ejercicio tiene 3 apartados.

1. Decide, utilizando el método que se indica, si cada una de las fórmulas siguientes es insatisfactible o una tautología.

$$A : (p \wedge q \leftrightarrow p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

$$B : (p \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg r)) \wedge (r \rightarrow \neg q)$$

$$C : (q \rightarrow p \wedge r) \wedge \neg(p \leftrightarrow p \vee q)$$

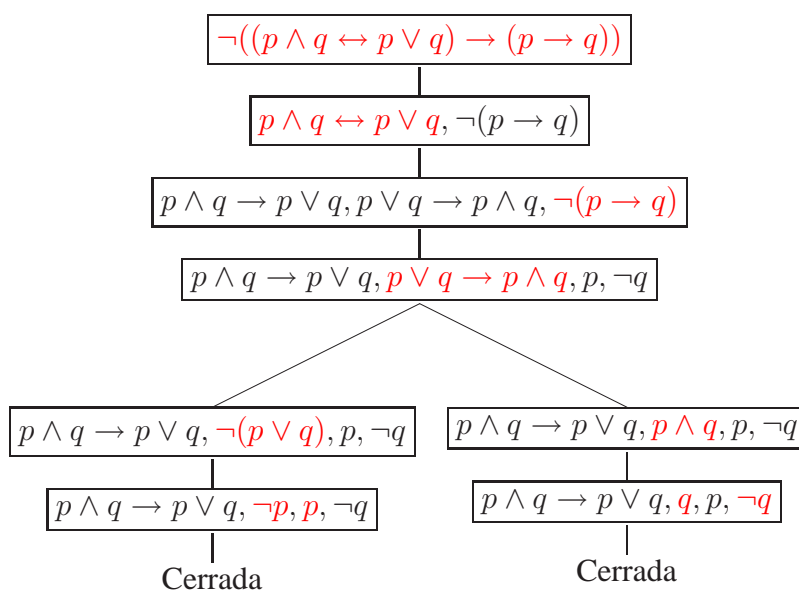
Los métodos que deben usarse son: tableros semánticos para A, formas normales para B y resolución para C.

2. Describe, razonadamente, todos los modelos de cada una de las fórmulas anteriores.

3. Consideremos el conjunto $U = \{p \vee q \rightarrow r \vee s, r \wedge t \rightarrow s, r \wedge \neg t \rightarrow \neg u\}$. Decide, mediante tableros semánticos, si $U \models p \rightarrow s \vee \neg u$.

Solución:

Solución del apartado (1.a): La fórmula A es una tautología ya que el tablero semántico de $\{\neg A\}$



tiene todas las hojas cerradas.

Solución del apartado (1.b): Vamos a calcular una forma normal disyuntiva de B :

$$\begin{aligned}
 & (p \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg r)) \wedge (r \rightarrow \neg q) \\
 \equiv & (\neg p \vee \neg(\neg q \vee \neg r)) \wedge (\neg r \vee \neg q) && \text{[por (2)]} \\
 \equiv & (\neg p \vee (\neg\neg q \wedge \neg\neg r)) \wedge (\neg r \vee \neg q) && \text{[por (4)]} \\
 \equiv & (\neg p \vee (q \wedge r)) \wedge (\neg r \vee \neg q) && \text{[por (5)]} \\
 \equiv & (\neg p \wedge (\neg r \vee \neg q)) \vee ((q \wedge r) \wedge (\neg r \vee \neg q)) && \text{[por (7)]} \\
 \equiv & ((\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee ((q \wedge r) \wedge (\neg r \vee \neg q)) && \text{[por (6)]} \\
 \equiv & ((\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee ((q \wedge r \wedge \neg r) \vee (q \wedge r \wedge \neg q)) && \text{[por (6)]} \\
 \equiv & ((\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee (\mathbf{F} \vee \mathbf{F}) \\
 \equiv & (\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q)
 \end{aligned}$$

Por tanto, la fórmula B es satisfacible (por ejemplo, si $v(p) = v(r) = 0$, entonces $v(B) = 1$), pero no es una tautología (por ejemplo, si $v(p) = 1$, entonces $v(B) = 0$).

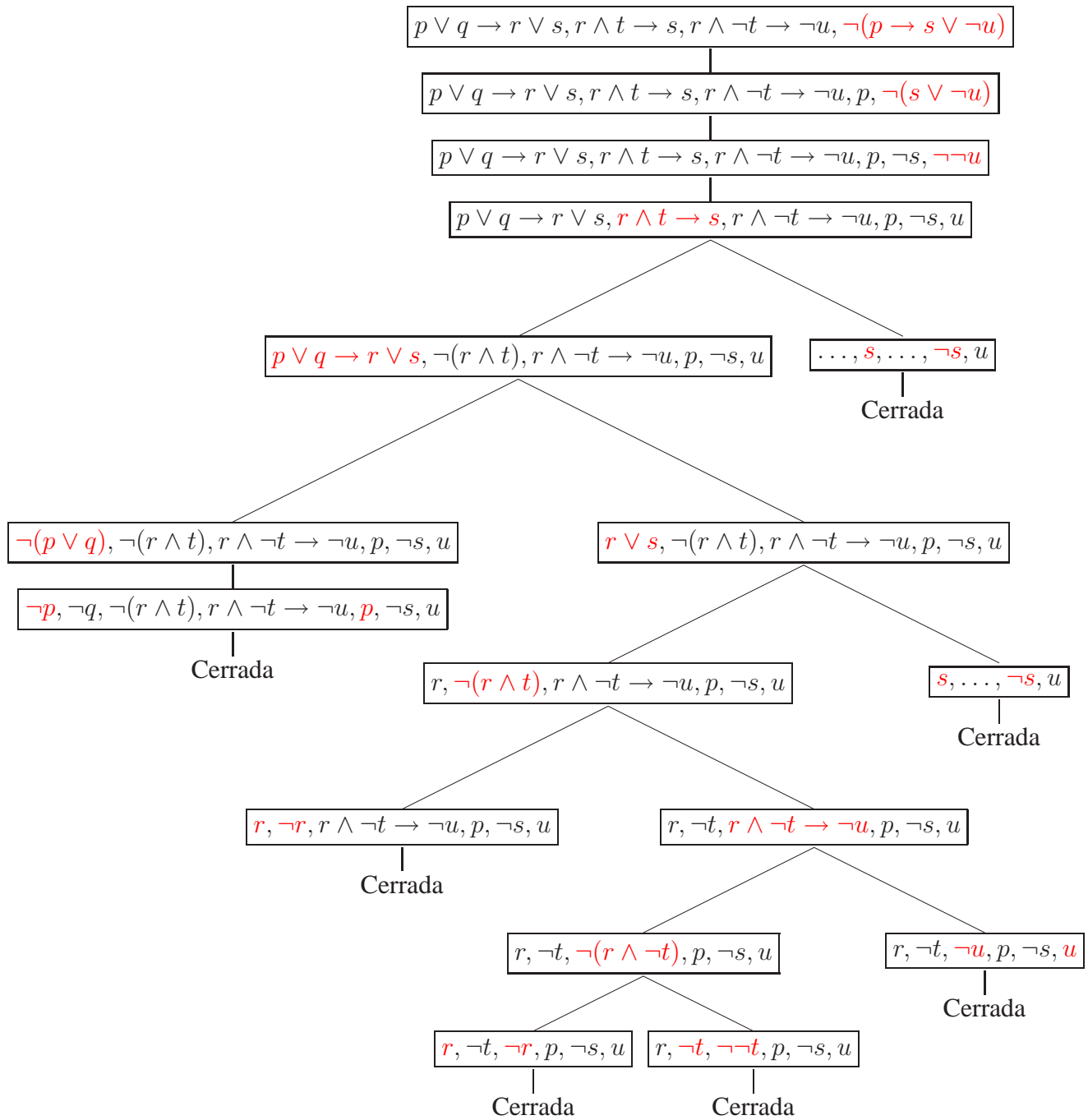
Solución del apartado (1.c): En primer lugar, se calcula una forma clausal de $\neg C$.

$$\begin{aligned}
 & \neg((q \rightarrow p \wedge r) \wedge \neg(p \leftrightarrow p \vee q)) \\
 \equiv & \neg((q \rightarrow p \wedge r) \wedge \neg((p \rightarrow p \vee q) \wedge (p \vee q \rightarrow p))) && \text{[por (1)]} \\
 \equiv & \neg((\neg q \vee (p \wedge r)) \wedge \neg((\neg p \vee (p \vee q)) \wedge (\neg(p \vee q) \vee p))) && \text{[por (2)]} \\
 \equiv & \neg(\neg q \vee (p \wedge r)) \vee \neg\neg((\neg p \vee (p \vee q)) \wedge (\neg(p \vee q) \vee p)) && \text{[por (3)]} \\
 \equiv & (\neg\neg q \wedge \neg(p \wedge r)) \vee ((\neg p \vee (p \vee q)) \wedge (\neg(p \vee q) \vee p)) && \text{[por (4) y (5)]} \\
 \equiv & (q \wedge (\neg p \vee \neg r)) \vee ((\neg p \vee (p \vee q)) \wedge (\neg(p \vee q) \vee p)) && \text{[por (3) y (5)]} \\
 \equiv & (q \wedge (\neg p \vee \neg r)) \vee (\mathbf{V} \wedge (\neg(p \vee q) \vee p)) \\
 \equiv & (q \wedge (\neg p \vee \neg r)) \vee (\neg(p \vee q) \vee p) \\
 \equiv & (q \wedge (\neg p \vee \neg r)) \vee ((\neg p \wedge \neg q) \vee p) && \text{[por (4)]} \\
 \equiv & (q \wedge (\neg p \vee \neg r)) \vee ((\neg p \vee p) \wedge (\neg q \vee p)) && \text{[por (7)]} \\
 \equiv & (q \wedge (\neg p \vee \neg r)) \vee (\mathbf{V} \wedge (\neg q \vee p)) \\
 \equiv & (q \wedge (\neg p \vee \neg r)) \vee (\neg q \vee p) \\
 \equiv & (q \vee (\neg q \vee p)) \wedge ((\neg p \vee \neg r) \vee (\neg q \vee p)) && \text{[por (7)]} \\
 \equiv & \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \\
 \equiv & \mathbf{V}
 \end{aligned}$$

Puesto que $\neg C$ es una tautología, C es insatisfacible.

Solución del apartado (2): Puesto que A es una tautología, todas las valoraciones son modelo de A . Los modelos de B son las valoraciones v tales que $v(p) = v(r) = 0$ o bien $v(p) = v(q) = 0$. Puesto que C es insatisfacible, no tiene modelos.

Solución del apartado (3): Un tablero semántico de $U \cup \{\neg(p \rightarrow s \vee \neg u)\}$ es



Como todas las hojas son cerradas, $U \models p \rightarrow s \vee \neg u$.

Ejercicio 4 Las relaciones de parentesco verifican la siguientes propiedades generales:

- Si x es hermano de y , entonces y es hermano de x .
- Todo el mundo es hijo de alguien.
- Nadie es hijo del hermano de su padre.

- *Cualquier padre de una persona es también padre de todos los hermanos de esa persona.*
- *Nadie es hijo ni hermano de sí mismo.*

Tenemos los siguientes miembros de la familia Peláez: Don Antonio, Don Luis, Antoñito y Manolito y sabemos que Don Antonio y Don Luis son hermanos, Antoñito y Manolito son hermanos, y Antoñito es hijo de Don Antonio. Se pide:

1. *Formalizar los conocimientos anteriores en un lenguaje de primer orden usando tan solo:*
 - *A, L, a, m como constantes para D. Antonio, D. Luis, Antoñito y Manolito, respectivamente.*
 - *Los predicados: Her(x, y) = “ x es hermano de y ”, Hijo(x, y) = “ x es hijo de y ”.*
2. *Obtener una forma clausal para el conjunto de fórmulas obtenido en el apartado 1.*
3. *Decidir mediante resolución si Don Luis es el padre de Manolito o no.*

Solución:

Solución del apartado (1): Formalización:

- Si x es hermano de y , entonces y es hermano de x .

$$(\forall x)(\forall y)[\text{Her}(x, y) \rightarrow \text{Her}(y, x)].$$
- Todo el mundo es hijo de alguien.

$$(\forall x)(\exists y)\text{Hijo}(x, y).$$
- Nadie es hijo del hermano de su padre.

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[\text{Hijo}(x, y) \wedge \text{Her}(z, y) \rightarrow \neg \text{Hijo}(x, z)].$$
- Cualquier padre de una persona es también padre de todos los hermanos de esa persona.

$$(\forall x)(\forall y)[\text{Hijo}(x, y) \rightarrow (\forall z)[\text{Her}(z, x) \rightarrow \text{Hijo}(z, y)]]].$$
- Nadie es hijo ni hermano de sí mismo.

$$(\forall x)[\neg \text{Hijo}(x, x) \wedge \neg \text{Her}(x, x)].$$
- Don Antonio y Don Luis son hermanos.

$$\text{Her}(A, L).$$
- Antoñito y Manolito son hermanos.

$$\text{Her}(a, m).$$
- Antoñito es hijo de Don Antonio.

$$\text{Hijo}(a, A).$$

Solución del apartado (2): Cálculo de formas clausales:

$$\begin{aligned} & (\forall x)(\forall y)[\text{Her}(x, y) \rightarrow \text{Her}(y, x)] \\ \equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg \text{Her}(x, y) \vee \text{Her}(y, x)] \quad [\text{por (4)}] \\ \equiv & \{ \{ \neg \text{Her}(x, y), \text{Her}(y, x) \} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\forall x)(\exists y)\text{Hijo}(x, y) \\
\equiv_{\text{sat}} & (\forall x)\text{Hijo}(x, f(x)) && \text{[Skolem } f\text{]} \\
\equiv & \{\{\text{Hijo}(x, f(x))\}\} \\
& (\forall x)(\forall y)(\forall z)[\text{Hijo}(x, y) \wedge \text{Her}(z, y) \rightarrow \neg\text{Hijo}(x, z)] \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)(\forall z)[\neg(\text{Hijo}(x, y) \wedge \text{Her}(z, y)) \vee \neg\text{Hijo}(x, z)] && \text{[por (4)]} \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)(\forall z)[\neg\text{Hijo}(x, y) \vee \neg\text{Her}(z, y) \vee \neg\text{Hijo}(x, z)] && \text{[por (5)]} \\
\equiv & \{\{\neg\text{Hijo}(x, y), \neg\text{Her}(z, y), \neg\text{Hijo}(x, z)\}\} \\
& (\forall x)(\forall y)[\text{Hijo}(x, y) \rightarrow (\forall z)[\text{Her}(z, x) \rightarrow \text{Hijo}(z, y)]] \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg\text{Hijo}(x, y) \vee (\forall z)[\neg\text{Her}(z, x) \vee \text{Hijo}(z, y)]] && \text{[por (4)]} \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)(\forall z)[\neg\text{Hijo}(x, y) \vee \neg\text{Her}(z, x) \vee \text{Hijo}(z, y)] && \text{[por (16)]} \\
\equiv & \{\{\neg\text{Hijo}(x, y), \neg\text{Her}(z, x), \text{Hijo}(z, y)\}\} \\
& (\forall x)[\neg\text{Hijo}(x, x) \wedge \neg\text{Her}(x, x)] \\
\equiv & \{\{\neg\text{Hijo}(x, x)\}, \{\neg\text{Her}(x, x)\}\} \\
& \text{Her}(A, L) \\
\equiv & \{\{\text{Her}(A, L)\}\} \\
& \text{Her}(a, m) \\
\equiv & \{\{\text{Her}(a, m)\}\} \\
& \text{Hijo}(a, A) \\
\equiv & \{\{\text{Hijo}(a, A)\}\}
\end{aligned}$$

Solución del apartado (3): Vamos a demostrar que Don Luis no es el padre de Manolito. Para ello suponemos lo contrario lo que da lugar a la cláusula $\{\text{Hijo}(m, L)\}$. Una demostración por resolución de las cláusulas obtenidas es

$$\begin{array}{ll}
1 & \{\neg\text{Her}(x, y), \text{Her}(y, x)\} \\
2 & \{\text{Hijo}(x, f(x))\} \\
3 & \{\neg\text{Hijo}(x, y), \neg\text{Her}(z, y), \neg\text{Hijo}(x, z)\} \\
4 & \{\neg\text{Hijo}(x, y), \neg\text{Her}(z, x), \text{Hijo}(z, y)\} \\
5 & \{\neg\text{Hijo}(x, x)\} \\
6 & \{\neg\text{Her}(x, x)\} \\
7 & \{\text{Her}(A, L)\} \\
8 & \{\text{Her}(a, m)\} \\
9 & \{\text{Hijo}(a, A)\} \\
10 & \{\text{Hijo}(m, L)\} \\
11 & \{\neg\text{Hijo}(a, y), \neg\text{Her}(A, y)\} && \text{Resolvente de 3 y 9 con } \sigma = [x/a, z/A] \\
12 & \{\neg\text{Her}(z, m), \text{Hijo}(z, L)\} && \text{Resolvente de 4 y 10 con } \sigma = [x/m, y/L] \\
13 & \{\text{Hijo}(a, L)\} && \text{Resolvente de 12 y 8 con } \sigma = [z/a] \\
14 & \{\neg\text{Her}(A, L)\} && \text{Resolvente de 13 y 11 con } \sigma = [y/L] \\
15 & \square && \text{Resolvente de 14 y 7 con } \sigma = \epsilon
\end{array}$$

Ejercicio 5 Este ejercicio tiene dos apartados.

1. Obténganse formas prenexa conjuntiva, de Skolem y clausal de la siguiente fórmula:

$$(\exists x)(\forall u)[(\exists y)P(u, f(y), a) \rightarrow (Q(u, x) \rightarrow (\exists y)[Q(y, z) \wedge P(u, y, z)]]]$$

siendo a un símbolo de constante y f un símbolo de función de aridad 1.

2. Dada una fórmula proposicional F , sea $T(F) = \{G \in PROP : F \models G\}$. Pruébese que, para cada $A, B \in PROP$,

$$(a) A \rightarrow B \text{ es tautología} \iff T(B) \subseteq T(A).$$

$$(b) A \equiv B \iff T(B) = T(A).$$

Solución:

Solución del apartado (1):

1.– Forma normal prenexa conjuntiva:

$$\begin{aligned} & (\exists x)(\forall u)[(\exists y)P(u, f(y), a) \rightarrow (Q(u, x) \rightarrow (\exists y)[Q(y, z) \wedge P(u, y, z)])] \\ \equiv & (\exists x)(\forall u)[(\exists y)P(u, f(y), a) \rightarrow (Q(u, x) \rightarrow (\exists v)[Q(v, z) \wedge P(u, v, z)])] & [\text{por rectificación}] \\ \equiv & (\exists x)(\forall u)[\neg(\exists y)P(u, f(y), a) \vee (\neg Q(u, x) \vee (\exists v)[Q(v, z) \wedge P(u, v, z)])] & [\text{por (4)}] \\ \equiv & (\exists x)(\forall u)[(\forall y)\neg P(u, f(y), a) \vee (\neg Q(u, x) \vee (\exists v)[Q(v, z) \wedge P(u, v, z)])] & [\text{por (9)}] \\ \equiv & (\exists x)(\forall u)(\exists v)[(\forall y)\neg P(u, f(y), a) \vee (\neg Q(u, x) \vee (Q(v, z) \wedge P(u, v, z)))] & [\text{por (18)}] \\ \equiv & (\exists x)(\forall u)(\exists v)(\forall y)[\neg P(u, f(y), a) \vee (\neg Q(u, x) \vee (Q(v, z) \wedge P(u, v, z)))] & [\text{por (12)}] \\ \equiv & (\exists x)(\forall u)(\exists v)(\forall y)[(\neg P(u, f(y), a) \vee \neg Q(u, x) \vee Q(v, z)) \wedge \\ & (\neg P(u, f(y), a) \vee \neg Q(u, x) \vee P(u, v, z))] & [\text{por (19)}] \end{aligned}$$

2.– Forma de Skolem:

$$\begin{aligned} & (\exists x)(\forall u)[(\exists y)P(u, f(y), a) \rightarrow (Q(u, x) \rightarrow (\exists y)[Q(y, z) \wedge P(u, y, z)])] \\ \equiv & (\exists x)(\forall u)(\exists v)(\forall y)[(\neg P(u, f(y), a) \vee \neg Q(u, x) \vee Q(v, z)) \wedge \\ & (\neg P(u, f(y), a) \vee \neg Q(u, x) \vee P(u, v, z))] \\ \equiv_{sat} & (\exists z)(\exists x)(\forall u)(\exists v)(\forall y)[(\neg P(u, f(y), a) \vee \neg Q(u, x) \vee Q(v, z)) \wedge \\ & (\neg P(u, f(y), a) \vee \neg Q(u, x) \vee P(u, v, z))] & [\text{por cierre}] \\ \equiv_{sat} & (\exists x)(\forall u)(\exists v)(\forall y)[(\neg P(u, f(y), a) \vee \neg Q(u, x) \vee Q(v, b)) \wedge \\ & (\neg P(u, f(y), a) \vee \neg Q(u, x) \vee P(u, v, b))] & [\text{Skolem } b] \\ \equiv_{sat} & (\forall u)(\exists v)(\forall y)[(\neg P(u, f(y), a) \vee \neg Q(u, c) \vee Q(v, b)) \wedge \\ & (\neg P(u, f(y), a) \vee \neg Q(u, c) \vee P(u, v, b))] & [\text{Skolem } c] \\ \equiv_{sat} & (\forall u)(\forall y)[(\neg P(u, f(y), a) \vee \neg Q(u, c) \vee Q(g(u), b)) \wedge \\ & (\neg P(u, f(y), a) \vee \neg Q(u, c) \vee P(u, g(u), b))] & [\text{Skolem } g] \end{aligned}$$

3.– Forma clausal:

$$\begin{aligned} & (\exists x)(\forall u)[(\exists y)P(u, f(y), a) \rightarrow (Q(u, x) \rightarrow (\exists y)[Q(y, z) \wedge P(u, y, z)])] \\ \equiv_{sat} & (\forall u)(\forall y)[(\neg P(u, f(y), a) \vee \neg Q(u, c) \vee Q(g(u), b)) \wedge \\ & (\neg P(u, f(y), a) \vee \neg Q(u, c) \vee P(u, g(u), b))] & [\text{Skolem } g] \\ \equiv & \{ \{ \neg P(u, f(y), a), \neg Q(u, c), Q(g(u), b) \}, \\ & \{ \neg P(u, f(y), a), \neg Q(u, c), P(u, g(u), b) \} \} \end{aligned}$$

Solución del apartado (2a):

1.– Demostración de que si $\models A \rightarrow B$, entonces $T(B) \subseteq T(A)$: Supongamos que

$$\models A \rightarrow B \quad (1)$$

Sea $G \in T(P)$. Tenemos que demostrar que $G \in T(A)$. Por la elección de G y la definición de $T(P)$, se tiene que

$$G \in PROP \quad (2)$$

$$B \models G \quad (3)$$

Para probar que $A \models G$, consideremos una valoración v tal que

$$v(A) = 1 \quad (4)$$

Entonces, por (4) y (1)

$$v(B) = 1 \quad (5)$$

Por (5) y (3)

$$v(G) = 1 \quad (6)$$

Luego,

$$A \models G \quad (7)$$

Por (2), (7) y la definición de $T(A)$, se tiene que $G \in T(A)$.

2.– Demostración de que si $T(B) \subseteq T(A)$, entonces $\models A \rightarrow B$: Supongamos que

$$T(B) \subseteq T(A) \quad (8)$$

Puesto que $B \models B$, se tiene que $B \in T(B)$ y, por (8), $B \in T(A)$. Luego, por la definición de $T(A)$, $A \models B$ y, por tanto, $\models A \rightarrow B$.

Solución del apartado (2b):

$$\begin{aligned} A \equiv B &\iff A \models B \text{ y } B \models A \\ &\iff \models A \rightarrow B \text{ y } \models B \rightarrow A \\ &\iff T(B) \subseteq T(A) \text{ y } T(A) \subseteq T(B) \\ &\iff T(A) = T(B) \end{aligned}$$

Ejercicio 6 Sea S el conjunto formado por las siguientes fórmulas

(a) $(\forall x)P(x, x)$.

(b) $(\forall x)(\forall y)[P(x, y) \vee P(y, x)]$.

(c) $(\forall x)[P(x, f(x)) \wedge \neg P(f(x), x) \wedge P(a, x)]$.

(d) $(\forall x)\neg(\exists y)[P(x, y) \wedge P(y, f(x)) \wedge \neg P(y, x) \wedge \neg P(f(x), y)]$.

Probar mediante resolución básica o construyendo un modelo de Herbrand, que

1. $S \models (\forall x)(\exists y)[P(x, y) \wedge \neg P(y, x)]$.

2. $S \not\models (\forall x)[\neg P(x, a) \rightarrow (\exists y)P(y, x)]$.

Examen de Septiembre de 2001

Ejercicio 7 Este ejercicio tiene dos apartados.

(a) Pruébese que la siguiente fórmula es una tautología:

$$(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r))$$

Primero utilizando tableros semánticos y después mediante resolución proposicional.

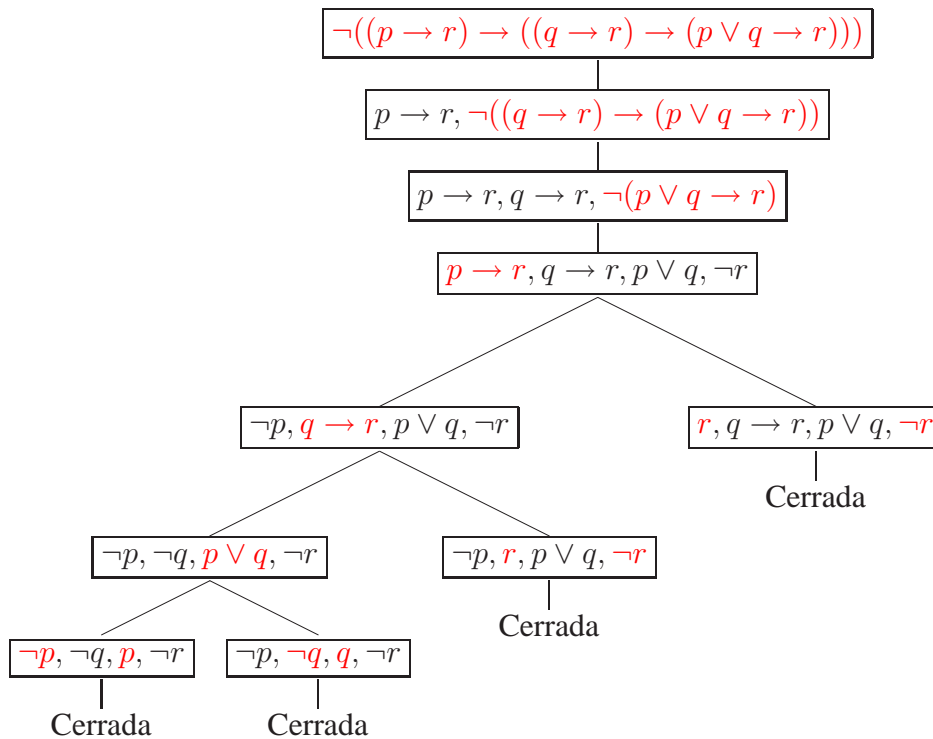
(b) Pruébese que:

(b.1) Si U es un conjunto de tautologías y A es una fórmula proposicional tal que $U \models A$, entonces A es una tautología.

(b.2) Si A y B son dos cláusulas proposicionales y F es la fórmula $\neg(A \wedge B)$, entonces F es insatisfactible si y sólo si A y B contienen ambas un par complementario.

Solución:

Solución del apartado (a.1): Un tablero semántico de $\{\neg((p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r)))\}$ es



Como todas sus hojas son cerradas, la fórmula es una tautología.

Solución del apartado (a.2): En primer lugar, se calcula una forma clausal de $\neg((p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r)))$.

$$\begin{aligned}
& \neg((p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r))) \\
\equiv & \neg(\neg(\neg p \vee r) \vee (\neg(\neg q \vee r) \vee (\neg(p \vee q) \vee r))) & [\text{por (2)}] \\
\equiv & \neg\neg(\neg p \vee r) \wedge \neg(\neg(\neg q \vee r) \vee (\neg(p \vee q) \vee r)) & [\text{por (4)}] \\
\equiv & (\neg p \vee r) \wedge \neg\neg(\neg q \vee r) \wedge \neg(\neg(p \vee q) \vee r) & [\text{por (5) y (4)}] \\
\equiv & (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg\neg(p \vee q) \wedge \neg r) & [\text{por (5) y (4)}] \\
\equiv & (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (p \vee q) \wedge \neg r & [\text{por (5)}] \\
\equiv & \{\{\neg p, r\}, \{\neg q, r\}, \{p, q\}, \{\neg r\}\}
\end{aligned}$$

Una demostración por resolución es

- 1 $\{\neg p, r\}$
- 2 $\{\neg q, r\}$
- 3 $\{p, q\}$
- 4 $\{\neg r\}$
- 5 $\{\neg p\}$ Resolvente de 1 y 4
- 6 $\{\neg q\}$ Resolvente de 2 y 4
- 7 $\{q\}$ Resolvente de 3 y 5
- 8 \square Resolvente de 7 y 6

Solución del apartado (b.1): Sea v una valoración. Entonces, $v \models U$ (por ser los elementos de U tautologías), y $v \models A$ (porque $U \models A$). Por tanto, A es una tautología.

Solución del apartado (b.2):

- F es insatisfacible
- $\iff \neg(A \wedge B)$ es insatisfacible
- \iff para toda valoración v , $v(\neg(A \wedge B)) = 0$
- \iff para toda valoración v , $v(A \wedge B) = 1$
- \iff para toda valoración v , $v(A) = v(B) = 1$
- $\iff A$ y B contienen ambas un par de literales complementarios [por ser A y B cláusulas]

Ejercicio 8 Sea

$$S = \{(\forall x)\neg P(x, x), (\forall x)(\forall y)[P(x, y) \vee P(y, x)], (\forall x)P(x, f(x))\}$$

y sea F la fórmula

$$(\forall x)(\forall y)[P(x, y) \rightarrow (\exists z)[P(x, z) \wedge P(z, y)]]$$

(a) Hállese una forma clausal de F y otra de $\neg F$.

(b) Pruébese, utilizando un modelo de Herbrand, que $S \not\models F$.

Solución:

Solución del apartado (a.1): Cálculo de una forma clausal de F :

$$\begin{aligned}
& (\forall x)(\forall y)[P(x, y) \rightarrow (\exists z)[P(x, z) \wedge P(z, y)]] \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg P(x, y) \vee (\exists z)[P(x, z) \wedge P(z, y)]] && \text{[por (4)]} \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)(\exists z)[\neg P(x, y) \vee (P(x, z) \wedge P(z, y))] && \text{[por (18)]} \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)(\exists z)[(\neg P(x, y) \vee P(x, z)) \wedge (\neg P(x, y) \vee P(z, y))] && \text{[por (19)]} \\
\equiv_{\text{sat}} & (\forall x)(\forall y)[(\neg P(x, y) \vee P(x, f(x, y))) \wedge (\neg P(x, y) \vee P(f(x, y), y))] && \text{[Skolem } f\text{]} \\
\equiv & \{\{\neg P(x, y), P(x, f(x, y))\}, \{\neg P(x, y), P(f(x, y), y)\}\}
\end{aligned}$$

Solución del apartado (a.2): Cálculo de una forma clausal de $\neg F$:

$$\begin{aligned}
& \neg(\forall x)(\forall y)[P(x, y) \rightarrow (\exists z)[P(x, z) \wedge P(z, y)]] \\
\equiv & \neg(\forall x)(\forall y)(\exists z)[\neg P(x, y) \vee (P(x, z) \wedge P(z, y))] && \text{[por (a.1)]} \\
\equiv & (\exists x)(\exists y)(\forall z)\neg(\neg P(x, y) \vee (P(x, z) \wedge P(z, y))) && \text{[por (8) y (9)]} \\
\equiv & (\exists x)(\exists y)(\forall z)[\neg\neg P(x, y) \wedge \neg(P(x, z) \wedge P(z, y))] && \text{[por (6)]} \\
\equiv & (\exists x)(\exists y)(\forall z)[P(x, y) \wedge (\neg P(x, z) \vee \neg P(z, y))] && \text{[por (7) y (5)]} \\
\equiv_{\text{sat}} & (\forall z)[P(a, b) \wedge (\neg P(a, z) \vee \neg P(z, b))] && \text{[Skolem } a \text{ y } b\text{]} \\
\equiv & \{\{P(a, b)\}, \{\neg P(a, z), \neg P(z, b)\}\}
\end{aligned}$$

Ejercicio 9 Se conocen los siguientes hechos:

1. Todos los ordenadores son máquinas.
2. El TX-150 es un ordenador.
3. Félix puede arreglar, o bien estropear, cualquier máquina.
4. Cada cosa puede ser arreglada por alguien.
5. Las cosas solamente desesperan a quienes no son capaces de arreglarlas.
6. El TX-150 desespera a Félix.
7. Ninguna máquina puede ser arreglada por sí misma.

Se pide:

- (a) Formalizar los hechos anteriores utilizando los siguientes símbolos de predicado: $O(x)$: “ x es un ordenador”, $M(x)$: “ x es una máquina”, $A(x, y)$: “ x puede arreglar y ”, $E(x, y)$: “ x estropea y ” y $D(x, y)$: “ x desespera a y ”. Y a, b como constantes para TX-150 y Félix, respectivamente.
- (b) Utilizando resolución responder a las siguientes preguntas: ¿Puede arreglar Félix el TX-150? ¿Estropea Félix el TX-150?

Solución:

Solución del apartado (a): Formalización:

1. Todos los ordenadores son máquinas.

$$(\forall x)[O(x) \rightarrow M(x)].$$

2. El TX-150 es un ordenador.

$$O(a).$$

3. Félix puede arreglar, o bien estropear, cualquier máquina.

$$(\forall x)[M(x) \rightarrow A(b, x) \vee E(b, x)].$$

4. Cada cosa puede ser arreglada por alguien.

$$(\forall x)(\exists y)A(y, x).$$

5. Las cosas solamente desesperan a quienes no son capaces de arreglarlas.

$$(\forall x)(\forall y)[D(x, y) \rightarrow \neg A(y, x)].$$

6. El TX-150 desespera a Félix.

$$D(a, b).$$

7. Ninguna máquina puede ser arreglada por sí misma.

$$\neg(\exists x)[M(x) \wedge A(x, x)].$$

Solución del apartado (b): En primer lugar, se calculan formas clausales de las fórmulas anteriores.

$$\begin{aligned} & (\forall x)[O(x) \rightarrow M(x)] \\ \equiv & (\forall x)[\neg O(x) \vee M(x)] && \text{[por (4)]} \\ \equiv & \{\{\neg O(x), M(x)\}\} \\ & O(a) \\ \equiv & \{\{O(a)\}\} \\ & (\forall x)[M(x) \rightarrow A(b, x) \vee E(b, x)] \\ \equiv & (\forall x)[\neg M(x) \vee A(b, x) \vee E(b, x)] && \text{[por (4)]} \\ \equiv & \{\{\neg M(x), A(b, x), E(b, x)\}\} \\ & (\forall x)(\exists y)A(y, x) \\ \equiv_{\text{sat}} & (\forall x)A(f(x), x) && \text{[Skolem } f] \\ \equiv & \{\{A(f(x), x)\}\} \\ & (\forall x)(\forall y)[D(x, y) \rightarrow \neg A(y, x)] \\ \equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg D(x, y) \vee \neg A(y, x)] && \text{[por (4)]} \\ \equiv & \{\{\neg D(x, y), \neg A(y, x)\}\} \\ & D(a, b) \\ \equiv & \{\{D(a, b)\}\} \\ & \neg(\exists x)[M(x) \wedge A(x, x)] \\ \equiv & (\forall x)\neg(M(x) \wedge A(x, x)) && \text{[por (8)]} \\ \equiv & (\forall x)[\neg M(x) \vee \neg A(x, x)] && \text{[por (5)]} \\ \equiv & \{\{\neg M(x), \neg A(x, x)\}\} \end{aligned}$$

Las cláusulas obtenidas son

Examen de Diciembre de 2001

Ejercicio 10 Sea A la fórmula proposicional

$$(p \vee q \leftrightarrow \neg r) \wedge (\neg p \rightarrow s) \wedge (\neg t \rightarrow q) \wedge (s \wedge t \rightarrow u).$$

(a) Pruébese que A es satisfactible.

(b) Demuéstrese por el método de tableros semánticos que $A \models r \rightarrow u$.

(c) Pruébese por resolución proposicional que

$$\{p \vee q \leftrightarrow \neg r, \neg p \rightarrow s, \neg t \rightarrow q, s \wedge t \rightarrow u\} \models r \rightarrow u.$$

Solución:

Solución del apartado (a): Vamos a demostrar la satisfactibilidad de A mostrando un modelo de A . Sea v una valoración. Para que v verifique las implicaciones de A basta que no verifique sus consecuentes; es decir, $v(s) = 0$, $v(q) = 0$ y $v(u) = 0$. Si $v(q) = 0$, para que v verifique $(p \vee q \leftrightarrow \neg r)$, basta que $v(p) \neq v(r)$ (por ejemplo, $v(p) = 1$ y $v(r) = 0$). Por tanto, la valoración v tal que

$$v(p) = 1, v(q) = 0, v(r) = 0, v(s) = 0 \text{ y } v(u) = 0.$$

es un modelo de A .

Solución del apartado (b): Un tablero semántico de $\{A, \neg(r \rightarrow u)\}$ se muestra en la Figura 1 (página 20). Puesto que todas sus hojas son cerradas, se tiene que $A \models r \rightarrow u$.

Solución del apartado (c): En primer lugar, se calcula formas clausales de las fórmulas de las hipótesis y de la negación de la conclusión:

$$\begin{aligned} & p \vee q \leftrightarrow \neg r \\ \equiv & (p \vee q \rightarrow \neg r) \wedge (\neg r \rightarrow p \vee q) && \text{[por (1)]} \\ \equiv & (\neg(p \vee q) \vee \neg r) \wedge (\neg \neg r \vee p \vee q) && \text{[por (2)]} \\ \equiv & ((\neg p \wedge \neg q) \vee \neg r) \wedge (r \vee p \vee q) && \text{[por (3) y (5)]} \\ \equiv & ((\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r)) \wedge (r \vee p \vee q) && \text{[por (7)]} \\ \equiv & \{\{\neg p, \neg r\}, \{\neg q, \neg r\}, \{r, p, q\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \neg p \rightarrow s \\ \equiv & \neg \neg p \vee s && \text{[por (2)]} \\ \equiv & p \vee s && \text{[por (5)]} \\ \equiv & \{\{p, s\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \neg t \rightarrow q \\ \equiv & \neg \neg t \vee q && \text{[por (2)]} \\ \equiv & t \vee q && \text{[por (5)]} \\ \equiv & \{\{t, q\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & s \wedge t \rightarrow u \\ \equiv & \neg(s \wedge t) \vee u && \text{[por (2)]} \\ \equiv & (\neg s \vee \neg t) \vee u && \text{[por (3)]} \\ \equiv & \{\{\neg s, \neg t, u\}\} \end{aligned}$$

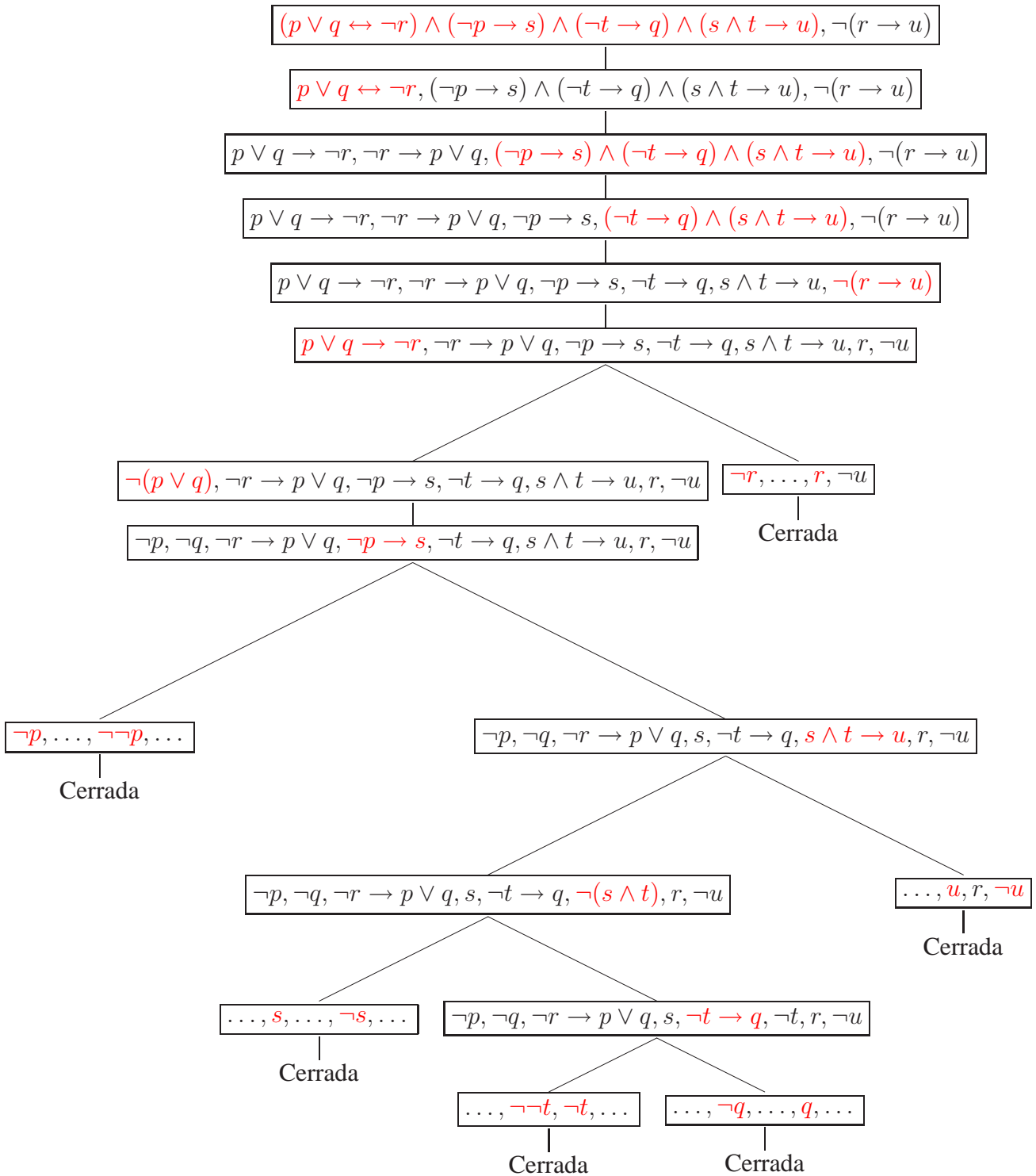


Figura 1: Árbol semántico

$$\begin{aligned}
& \neg(r \rightarrow u) \\
\equiv & \neg(\neg r \vee u) && \text{[por (2)]} \\
\equiv & \neg\neg r \wedge \neg u && \text{[por (4)]} \\
\equiv & r \wedge \neg u && \text{[por (5)]} \\
\equiv & \{\{r\}\}, \{\neg u\}
\end{aligned}$$

Una resolución de las cláusulas obtenidas es

$$\begin{aligned}
1 & \{\neg p, \neg r\} \\
2 & \{\neg q, \neg r\} \\
3 & \{r, p, q\} \\
4 & \{p, s\} \\
5 & \{t, q\} \\
6 & \{\neg s, \neg t, u\} \\
7 & \{r\} \\
8 & \{\neg u\} \\
9 & \{\neg q\} && \text{Resolvente de 7 y 2} \\
10 & \{\neg p\} && \text{Resolvente de 7 y 1} \\
11 & \{\neg s, \neg t\} && \text{Resolvente de 8 y 6} \\
12 & \{t\} && \text{Resolvente de 9 y 5} \\
13 & \{s\} && \text{Resolvente de 10 y 4} \\
14 & \{\neg t\} && \text{Resolvente de 11 y 13} \\
15 & \square && \text{Resolvente de 14 y 12}
\end{aligned}$$

Ejercicio 11 Sea S el conjunto formado por las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}
F_1 & : P(a) \wedge (\forall x)[P(x) \rightarrow Q(f(x), x)] \\
F_2 & : (\forall x)(\forall y)[Q(x, y) \rightarrow (R(f(x)) \wedge \neg R(f(f(x))))] \\
F_3 & : (\forall x)[P(x) \vee R(x)] \\
F_4 & : (\forall x)\neg(P(x) \wedge R(x))
\end{aligned}$$

Se pide:

- (a) Probar mediante resolución que $S \models P(f(f(f(a))))$.
- (b) Probar, utilizando un modelo de Herbrand, que $S \not\models (\forall x)[Q(f(x), x) \rightarrow P(x)]$.

Solución:

Solución del apartado (a): En primer lugar, se calculan formas clausales de las hipótesis y de la negación de la conclusión:

$$\begin{aligned}
F_1 & : P(a) \wedge (\forall x)[P(x) \rightarrow Q(f(x), x)] \\
\equiv & P(a) \wedge (\forall x)[\neg P(x) \vee Q(f(x), x)] && \text{[por (2)]} \\
\equiv & (\forall x)[P(a) \wedge (\neg P(x) \vee Q(f(x), x))] && \text{[por (15)]} \\
\equiv & \{\{P(a)\}, \{\neg P(x), Q(f(x), x)\}\} \\
F_2 & : (\forall x)(\forall y)[Q(x, y) \rightarrow (R(f(x)) \wedge \neg R(f(f(x))))] \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg Q(x, y) \vee (R(f(x)) \wedge \neg R(f(f(x))))] && \text{[por (2)]} \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[(\neg Q(x, y) \vee R(f(x))) \wedge (\neg Q(x, y) \vee \neg R(f(f(x))))] && \text{[por (19)]} \\
\equiv & \{\{\neg Q(x, y), R(f(x))\}, \{\neg Q(x, y), \neg R(f(f(x)))\}\}
\end{aligned}$$

$$F_3 : (\forall x)[P(x) \vee R(x)] \\ \equiv \{\{P(x), R(x)\}\}$$

$$F_4 : (\forall x)\neg(P(x) \wedge R(x)) \\ \equiv (\forall x)[\neg P(x) \vee \neg R(x)] \quad [\text{por (5)}] \\ \equiv \{\{\neg P(x), \neg R(x)\}\}$$

$$\neg P(f(f(f(a)))) \\ \equiv \{\{\neg P(f(f(f(a))))\}\}$$

Una resolución de las cláusulas obtenidas es

- | | | |
|----|-------------------------------------|----------------------|
| 1 | $\{P(a)\}$ | |
| 2 | $\{\neg P(x), Q(f(x), x)\}$ | |
| 3 | $\{\neg Q(x, y), R(f(x))\}$ | |
| 4 | $\{\neg Q(x, y), \neg R(f(f(x)))\}$ | |
| 5 | $\{P(x), R(x)\}$ | |
| 6 | $\{\neg P(x), \neg R(x)\}$ | |
| 7 | $\{\neg P(f(f(f(a))))\}$ | |
| 8 | $\{R(f(f(f(a))))\}$ | Resolvente de 7 y 5 |
| 9 | $\{\neg Q(f(a), y)\}$ | Resolvente de 8 y 4 |
| 10 | $\{\neg P(a)\}$ | Resolvente de 9 y 2 |
| 11 | \square | Resolvente de 10 y 1 |

Solución del apartado (b): Vamos a obtener consecuencias que nos permitan contruir el modelo de Herbrand.

- | | | |
|----|--|----------------------|
| 1 | $(\forall x)[P(x) \rightarrow R(f(f(x)))]$ | [por F_1 y F_2] |
| 2 | $(\forall x)(\forall y)[Q(x, y) \rightarrow P(f(f(x)))]$ | [por F_2 y F_3] |
| 3 | $(\forall x)[R(x) \vee R(f(f(x)))]$ | [por 1 y F_3] |
| 4 | $P(a)$ | [por F_1] |
| 5 | $Q(f(a), a)$ | [por 4 y F_1] |
| 6 | $\neg R(f(f(f(a))))$ | [por 5 y F_2] |
| 7 | $R(f(a))$ | [por 6 y 3] |
| 8 | $R(f(f(a)))$ | [por 1 y 4] |
| 9 | $P(f(f(f(a))))$ | [por 2 y 5] |
| 10 | $Q(f(f(f(f(a))), f(f(f(a))))$ | [por 9 y F_1] |
| 11 | $\neg R(f(f(f(f(f(f(a))))))$ | [por 10 y F_2] |
| 12 | $R(f(f(f(f(a))))$ | [por 11 y 3] |
| 13 | $R(f(f(f(f(f(a))))$ | [por 1 y 9] |

Se observa que la ley de formación es

$$P(a), Q(f(a), a), R(f(a)), R(f(f(a))),$$

$$P(f(f(f(a))), Q(f(f(f(f(a))), f(f(f(a))), R(f(f(f(f(a))))), R(f(f(f(f(f(a))))), \dots$$

Sea

$$I_1 = \{P(f^{3n}(a)), Q(f^{3n+1}(a), f^{3n}(a)), R(f^{3n+1}(a)), R(f^{3n+2}(a)) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Se comprueba fácilmente que $I_1 \models S$ e $I_1 \models (\forall x)[Q(f(x), x) \rightarrow P(x)]$. Para extender I_1 a un modelo de S en el que no se verifique $(\forall x)[Q(f(x), x) \rightarrow P(x)]$, introducimos una nueva variable b y suponemos que

$Q(f(b), b)$. De manera análoga a la anterior, se obtiene

$Q(f(b), b)$
 $R(f(f(b)))$
 $P(f(f(f(b))))$
 $Q(f(f(f(f(b))))), f(f(f(b)))$
 $R(f(f(f(f(f(b))))))$
 $R(f(b))$
 $P(f(f(f(f(f(f(b)))))))$
 $Q(f(f(f(f(f(f(f(b))))))), f(f(f(f(f(f(b))))))$
 $P(f(f(f(f(f(f(f(f(b))))))))$
 $R(f(f(f(f(b)))))$
 $R(f(f(f(f(f(f(f(b))))))))$

Sea

$$I_2 = I_1 \cup \{P(f^{3(n+1)}(b)), Q(f^{3n+1}(b), f^{3n}(b)), R(f^{3n+1}(b)), R(f^{3n+2}(b)) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Se comprueba fácilmente que $I_2 \models S$ e $I_2 \not\models (\forall x)[Q(f(x), x) \rightarrow P(x)]$.

Ejercicio 12 Este ejercicio tiene dos apartados.

(a) Hállense las formas prenexa conjuntiva, de Skolem y clausal de la fórmula:

$$(\exists x)(\exists y)(\forall z)[(\forall v)[Q(x, v) \vee R(x, y)] \rightarrow \neg(\exists v)\neg(\exists u)[Q(x, v) \wedge \neg R(x, u)].$$

(b) Sean A y B fórmulas proposicionales y C una tautología. Pruébese que son equivalentes:

(1) $\models A \rightarrow (B \wedge C)$.

(2) Para cada valoración v , si $v \models A \wedge C$ entonces $v \models B$.

Solución del apartado (a):

1.– Forma prenexa conjuntiva:

$$\begin{aligned}
 & (\exists x)(\exists y)(\forall z)[(\forall v)[Q(x, v) \vee R(x, y)] \rightarrow \neg(\exists v)\neg(\exists u)[Q(x, v) \wedge \neg R(x, u)] \\
 \equiv & (\exists x)(\exists y)(\forall z)[(\forall v)[Q(x, v) \vee R(x, y)] \rightarrow \neg(\exists w)\neg(\exists u)[Q(x, w) \wedge \neg R(x, u)] && \text{[por rectificación]} \\
 \equiv & (\exists x)(\exists y)(\forall z)[\neg(\forall v)[Q(x, v) \vee R(x, y)] \vee \neg(\exists w)\neg(\exists u)[Q(x, w) \wedge \neg R(x, u)] && \text{[por (4)]} \\
 \equiv & (\exists x)(\exists y)(\forall z)[(\exists v)\neg(Q(x, v) \vee R(x, y)) \vee (\forall w)\neg\neg(\exists u)[Q(x, w) \wedge \neg R(x, u)]] && \text{[por (8) y (9)]} \\
 \equiv & (\exists x)(\exists y)(\forall z)[(\exists v)(\neg Q(x, v) \wedge \neg R(x, y)) \vee (\forall w)(\exists u)[Q(x, w) \wedge \neg R(x, u)]] && \text{[por (6) y (7)]} \\
 \equiv & (\exists x)(\exists y)(\forall z)(\exists v)(\forall w)[(\neg Q(x, v) \wedge \neg R(x, y)) \vee (\exists u)[Q(x, w) \wedge \neg R(x, u)]] && \text{[por (16)]} \\
 \equiv & (\exists x)(\exists y)(\forall z)(\exists v)(\forall w)(\exists u)[(\neg Q(x, v) \wedge \neg R(x, y)) \vee (Q(x, w) \wedge \neg R(x, u))] && \text{[por (18)]} \\
 \equiv & (\exists x)(\exists y)(\forall z)(\exists v)(\forall w)(\exists u)[(\neg Q(x, v) \vee Q(x, w)) \wedge (\neg Q(x, v) \vee \neg R(x, u)) \wedge && \text{[por (19) y (20)]} \\
 & (\neg R(x, y) \vee Q(x, w)) \wedge (\neg R(x, y) \vee \neg R(x, u))]
 \end{aligned}$$

2.– Forma de Skolem:

$$\begin{aligned}
 & (\exists x)(\exists y)(\forall z)(\exists v)(\forall w)(\exists u)[(\neg Q(x, v) \vee Q(x, w)) \wedge (\neg Q(x, v) \vee \neg R(x, u)) \wedge \\
 & (\neg R(x, y) \vee Q(x, w)) \wedge (\neg R(x, y) \vee \neg R(x, u))] \\
 \equiv_{sat} & (\exists y)(\forall z)(\exists v)(\forall w)(\exists u)[(\neg Q(a, v) \vee Q(a, w)) \wedge (\neg Q(a, v) \vee \neg R(a, u)) \wedge && \text{[Skolem a]} \\
 & (\neg R(a, y) \vee Q(a, w)) \wedge (\neg R(a, y) \vee \neg R(a, u))] \\
 \equiv_{sat} & (\forall z)(\exists v)(\forall w)(\exists u)[(\neg Q(a, v) \vee Q(a, w)) \wedge (\neg Q(a, v) \vee \neg R(a, u)) \wedge && \text{[Skolem b]} \\
 & (\neg R(a, b) \vee Q(a, w)) \wedge (\neg R(a, b) \vee \neg R(a, u))]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\equiv_{sat} (\forall z)(\forall w)(\exists u)[(\neg Q(a, f(z)) \vee Q(a, w)) \wedge (\neg Q(a, f(z)) \vee \neg R(a, u)) \wedge & \text{[Skolem } f] \\ &\quad (\neg R(a, b) \vee Q(a, w)) \wedge (\neg R(a, b) \vee \neg R(a, u))] \\ &\equiv_{sat} (\forall z)(\forall w)[(\neg Q(a, f(z)) \vee Q(a, w)) \wedge (\neg Q(a, f(z)) \vee \neg R(a, g(z, w))) \wedge & \text{[Skolem } g] \\ &\quad (\neg R(a, b) \vee Q(a, w)) \wedge (\neg R(a, b) \vee \neg R(a, g(z, w)))] \end{aligned}$$

3.- Forma clausal:

$$\begin{aligned} &(\forall z)(\forall w)[(\neg Q(a, f(z)) \vee Q(a, w)) \wedge (\neg Q(a, f(z)) \vee \neg R(a, g(z, w))) \wedge \\ &\quad (\neg R(a, b) \vee Q(a, w)) \wedge (\neg R(a, b) \vee \neg R(a, g(z, w)))] \\ &\equiv \{ \{ \neg Q(a, f(z)), Q(a, w) \}, \\ &\quad \{ \neg Q(a, f(z)), \neg R(a, g(z, w)) \}, \\ &\quad \{ \neg R(a, b), Q(a, w) \}, \\ &\quad \{ \neg R(a, b), \neg R(a, g(z, w)) \} \} \end{aligned}$$

Solución del apartado (b): [(1) \implies (2)] Sea v una valoración. Entonces,

$$\begin{aligned} &v \models A \wedge C \\ \implies &v \models A \\ \implies &v \models B \wedge C \quad \text{[por (1)]} \\ \implies &v \models B \end{aligned}$$

[(2) \implies (1)] Sea v una valoración. Entonces,

$$\begin{aligned} &v \models A \\ \implies &v \models A \wedge C \quad \text{[por ser } C \text{ tautología]} \\ \implies &v \models B \quad \text{[por (2)]} \\ \implies &v \models B \wedge C \quad \text{[por ser } C \text{ tautología]} \end{aligned}$$

Luego, $v \models A \rightarrow B \wedge C$ y, por tanto, $\models A \rightarrow B \wedge C$.

Examen de Junio de 2002

Ejercicio 13 Consideremos la fórmula proposicional

$$A : (r \rightarrow p) \wedge (\neg r \rightarrow q \vee s) \rightarrow p \vee q \vee s$$

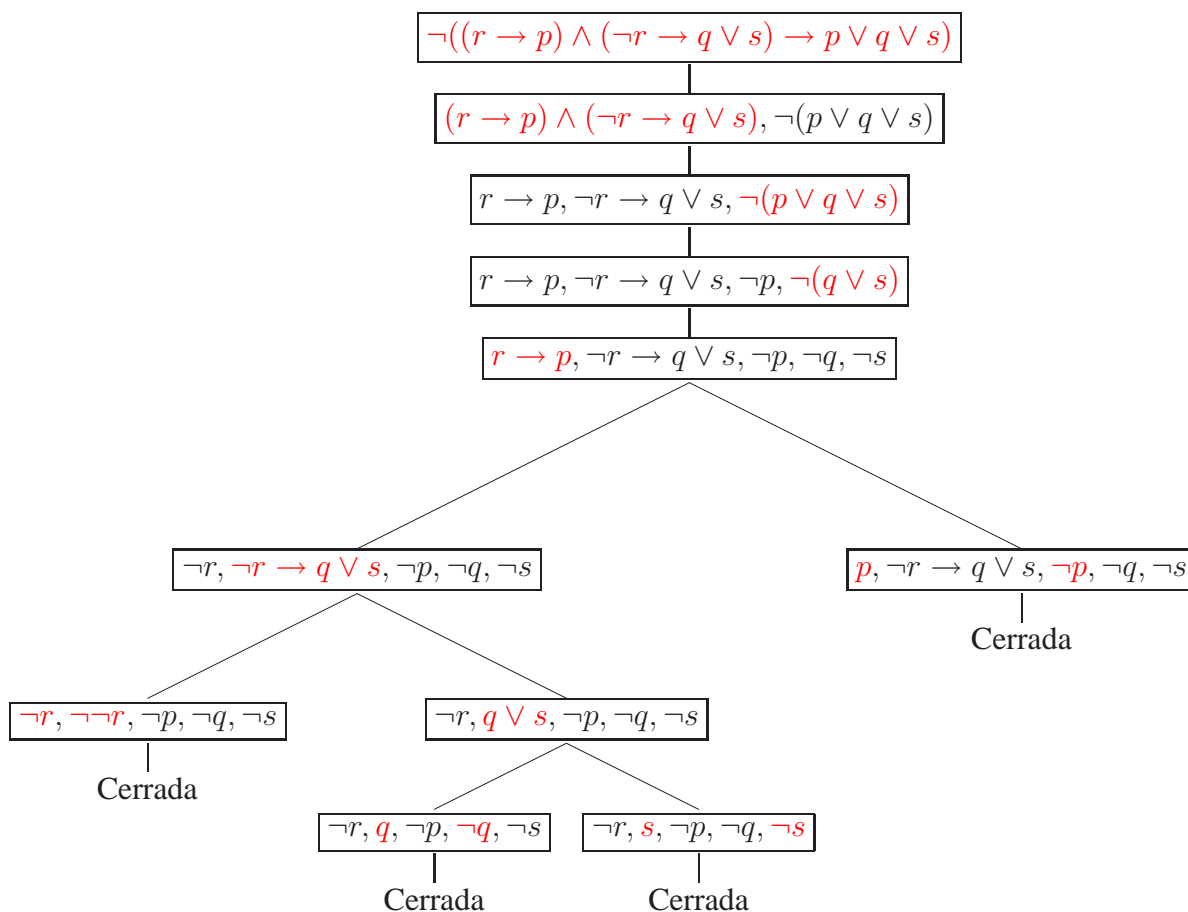
y el conjunto de fórmulas

$$U = \{r \leftrightarrow p \vee q, s \rightarrow p, \neg s \wedge \neg r \rightarrow s \vee t\}.$$

1. Pruébese, mediante tableros semánticos, que A es una tautología.
2. Pruébese, razonadamente, que U es consistente, mostrando para ello un modelo de U .
3. Pruébese, mediante resolución lineal, que $U \models \neg p \rightarrow (q \vee t)$.
4. Sea B la fórmula anterior $\neg p \rightarrow (q \vee t)$. ¿Podemos eliminar alguna fórmula de U de manera que la fórmula B sea consecuencia lógica del conjunto de fórmulas restante?

Solución:

Solución del apartado 1: El tablero semántico de $\neg A$ es



Como todas las hojas son cerradas, A es una tautología.

Solución del apartado 2: Sea v una valoración. Para que v sea modelo de las dos implicaciones de U basta que sus consecuentes sean falsos en v ; es decir, $v(p) = 0$ y $v(s) = v(t) = 0$. Sean v tal que

$v(p) = 0$, para que v sea modelo de la equivalencia, basta que $v(r) = v(q)$. Por tanto, una valoración v tal que $v(p) = 0$, $v(q) = 0$, $v(r) = 0$, $v(s) = 0$ y $v(t) = 0$ es un modelo de U .

Solución del apartado 3: En primer lugar, calculamos formas clausales de las fórmulas de U y de la negación de la conclusión:

$$\begin{aligned}
 & r \leftrightarrow p \vee q \\
 \equiv & (r \rightarrow p \vee q) \wedge (p \vee q \rightarrow r) && \text{[por (1)]} \\
 \equiv & (\neg r \vee (p \vee q)) \wedge (\neg(p \vee q) \vee r) && \text{[por (2)]} \\
 \equiv & (\neg r \vee (p \vee q)) \wedge ((\neg p \wedge \neg q) \vee r) && \text{[por (4)]} \\
 \equiv & (\neg r \vee p \vee q) \wedge ((\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)) && \text{[por (7)]} \\
 \equiv & \{\{\neg r, p, q\}, \{\neg p, r\}, \{\neg q, r\}\} \\
 \\
 & s \rightarrow p \\
 \equiv & \neg s \vee p && \text{[por (2)]} \\
 \equiv & \{\{\neg s, p\}\} \\
 \\
 & \neg s \wedge \neg r \rightarrow s \vee t \\
 \equiv & \neg(\neg s \wedge \neg r) \vee (s \vee t) && \text{[por (2)]} \\
 \equiv & (\neg\neg s \vee \neg\neg r) \vee (s \vee t) && \text{[por (3)]} \\
 \equiv & (s \vee r) \vee (s \vee t) && \text{[por (5)]} \\
 \equiv & \{\{s, r, t\}\} \\
 \\
 & \neg(\neg p \rightarrow (q \vee t)) \\
 \equiv & \neg(\neg\neg p \vee (q \vee t)) && \text{[por (2)]} \\
 \equiv & \neg(p \vee (q \vee t)) && \text{[por (5)]} \\
 \equiv & \neg p \wedge \neg(q \vee t) && \text{[por (4)]} \\
 \equiv & \neg p \wedge (\neg q \wedge \neg t) && \text{[por (4)]} \\
 \equiv & \{\{\neg p\}, \{\neg q\}, \{\neg t\}\}
 \end{aligned}$$

Una resolución lineal con las cláusulas obtenidas es

- 1 $\{\neg r, p, q\}$
- 2 $\{\neg p, r\}$
- 3 $\{\neg q, r\}$
- 4 $\{\neg s, p\}$
- 5 $\{s, r, t\}$
- 6 $\{\neg p\}$
- 7 $\{\neg q\}$
- 8 $\{\neg t\}$
- 9 $\{s, r\}$ Resolvente de 5 y 8
- 10 $\{r, p\}$ Resolvente de 9 y 4
- 11 $\{p, q\}$ Resolvente de 10 y 1
- 12 $\{p\}$ Resolvente de 11 y 7
- 13 \square Resolvente de 12 y 6

Solución del apartado 4: Sean

$$\begin{aligned}
 F_1 & : r \leftrightarrow p \vee q \\
 F_2 & : s \rightarrow p \\
 F_3 & : \neg s \wedge \neg r \rightarrow s \vee t
 \end{aligned}$$

las fórmulas de U . Veamos que no puede eliminarse ninguna sin perder la consecuencia:

- $\{F_2, F_3\} \not\models B$: Sea v_1 tal que

$$v_1(p) = 0, v_1(q) = 0, v_1(r) = 1, v_1(s) = 0 \text{ y } v_1(t) = 0.$$

Entonces, $v_1(F_2) = v_1(F_3) = 1$ y $v_1(B) = 0$.

- $\{F_1, F_3\} \not\models B$: Sea v_2 tal que

$$v_2(p) = 0, v_2(q) = 0, v_2(r) = 0, v_2(s) = 1 \text{ y } v_2(t) = 0.$$

Entonces, $v_2(F_1) = v_2(F_3) = 1$ y $v_2(B) = 0$.

- $\{F_1, F_2\} \not\models B$: Sea v_3 tal que

$$v_3(p) = 0, v_3(q) = 0, v_3(r) = 0, v_3(s) = 0 \text{ y } v_3(t) = 0.$$

Entonces, $v_3(F_1) = v_3(F_2) = 1$ y $v_3(B) = 0$.

Ejercicio 14 En cierto país oriental se ha celebrado la fase final del campeonato mundial de fútbol. Cierta diario deportivo ha publicado las siguientes estadísticas de tan magno acontecimiento:

- A todos los porteros que no vistieron camiseta negra les marcó un gol algún delantero europeo.
- Algún portero jugó con botas blancas y sólo le marcaron goles jugadores con botas blancas.
- Ningún portero se marcó un gol a sí mismo.
- Ningún jugador con botas blancas vistió camiseta negra.

Se pide:

1. Formalizar los enunciados anteriores en un lenguaje de primer orden usando los siguientes símbolos de predicado: $P(x)$: “ x es portero”, $D(x)$: “ x es delantero europeo”, $N(x)$: “ x viste camiseta negra”, $B(x)$: “ x juega con botas blancas”, $M(x, y)$: “ x marcó un gol a y ”.
2. Obtener una forma clausal para el conjunto de fórmulas del apartado anterior.
3. Probar, mediante resolución, que algún delantero europeo jugó con botas blancas.

Solución:

Solución del apartado 1:

- A todos los porteros que no vistieron camiseta negra les marcó un gol algún delantero europeo.

$$(\forall x)[P(x) \wedge \neg N(x) \rightarrow (\exists y)[D(y) \wedge M(y, x)]].$$

- Algún portero jugó con botas blancas y sólo le marcaron goles jugadores con botas blancas.

$$(\exists x)[P(x) \wedge B(x) \wedge (\forall y)[M(y, x) \rightarrow B(y)]].$$

- Ningún portero se marcó un gol a sí mismo.

$$\neg(\exists x)[P(x) \wedge M(x, x)].$$

- Ningún jugador con botas blancas vistió camiseta negra.

$$\neg(\exists x)[B(x) \wedge N(x)]$$

Solución del apartado 2: Cálculo de formas clausales:

$$\begin{aligned} & (\forall x)[P(x) \wedge \neg N(x) \rightarrow (\exists y)[D(y) \wedge M(y, x)]] \\ \equiv & (\forall x)[\neg(P(x) \wedge \neg N(x)) \vee (\exists y)[D(y) \wedge M(y, x)]] && \text{[por (2)]} \\ \equiv & (\forall x)[(\neg P(x) \vee \neg \neg N(x)) \vee (\exists y)[D(y) \wedge M(y, x)]] && \text{[por (5)]} \\ \equiv & (\forall x)[(\neg P(x) \vee N(x)) \vee (\exists y)[D(y) \wedge M(y, x)]] && \text{[por (7)]} \\ \equiv & (\forall x)(\exists y)[(\neg P(x) \vee N(x)) \vee (D(y) \wedge M(y, x))] && \text{[por (18)]} \\ \equiv & (\forall x)(\exists y)[((\neg P(x) \vee N(x)) \vee D(y)) \wedge ((\neg P(x) \vee N(x)) \vee M(y, x))] && \text{[por (19)]} \\ \equiv_{\text{sat}} & (\forall x)[((\neg P(x) \vee N(x)) \vee D(f(x))) \wedge ((\neg P(x) \vee N(x)) \vee M(f(x), x))] && \text{[por Skolem]} \\ \equiv & \{\{\neg P(x), N(x), D(f(x))\}, \{\neg P(x), N(x), M(f(x), x)\}\} \\ & (\exists x)[P(x) \wedge B(x) \wedge (\forall y)[M(y, x) \rightarrow B(y)]] \\ \equiv & (\exists x)[P(x) \wedge B(x) \wedge (\forall y)[\neg M(y, x) \vee B(y)]] && \text{[por (2)]} \\ \equiv & (\exists x)(\forall y)[P(x) \wedge B(x) \wedge (\neg M(y, x) \vee B(y))] && \text{[por (15)]} \\ \equiv_{\text{sat}} & (\forall y)[P(a) \wedge B(a) \wedge (\neg M(y, a) \vee B(y))] && \text{[por Skolem]} \\ \equiv & \{\{P(a)\}, \{B(a)\}, \{\neg M(y, a), B(y)\}\} \\ & \neg(\exists x)[P(x) \wedge M(x, x)] \\ \equiv & (\forall x)\neg(P(x) \wedge M(x, x)) && \text{[por (9)]} \\ \equiv & (\forall x)[\neg P(x) \vee \neg M(x, x)] && \text{[por (5)]} \\ \equiv & \{\{\neg P(x), \neg M(x, x)\}\} \\ & \neg(\exists x)[B(x) \wedge N(x)] \\ \equiv & (\forall x)\neg(B(x) \wedge N(x)) && \text{[por (9)]} \\ \equiv & (\forall x)[\neg B(x) \vee \neg N(x)] && \text{[por (5)]} \\ \equiv & \{\{\neg B(x), \neg N(x)\}\} \end{aligned}$$

Solución del apartado 3: Para demostrar que “algún delantero europeo jugó con botas blancas” se calcula una forma clausal de su negación:

$$\begin{aligned} & \neg(\exists x)[D(x) \wedge B(x)] \\ \equiv & (\forall x)\neg(D(x) \wedge B(x)) && \text{[por (9)]} \\ \equiv & (\forall x)[\neg D(x) \vee \neg B(x)] && \text{[por (5)]} \\ \equiv & \{\{\neg D(x), \neg B(x)\}\} \end{aligned}$$

Una refutación por resolución de las cláusulas obtenidas es

1	$\{\neg P(x), N(x), D(f(x))\}$	
2	$\{\neg P(x), N(x), M(f(x), x)\}$	
3	$\{P(a)\}$	
4	$\{B(a)\}$	
5	$\{\neg M(y, a), B(y)\}$	
6	$\{\neg P(x), \neg M(x, x)\}$	
7	$\{\neg B(x), \neg N(x)\}$	
8	$\{\neg D(x), \neg B(x)\}$	
9	$\{\neg D(x), \neg M(x, a)\}$	Resolvente de 8 y 5 con $\sigma = [y/x]$
10	$\{\neg D(f(a)), \neg P(a), N(a)\}$	Resolvente de 9 y 2 con $\theta_2 = [x/y]$ y $\sigma = [y/a, x/f(a)]$
11	$\{\neg D(f(a)), N(a)\}$	Resolvente de 10 y 3
12	$\{\neg P(a), N(a)\}$	Resolvente de 11 y 1
13	$\{N(a)\}$	Resolvente de 12 y 3
14	$\{\neg B(a)\}$	Resolvente de 13 y 7
15	\square	Resolvente de 14 y 4

Ejercicio 15 Este ejercicio tiene dos apartados.

1. Consideremos el lenguaje de primer orden $L_1 = \{P, f\}$ y las fórmulas de L_1 :

$$F_1 : (\forall x)(\exists y)P(x, f(y)), F_2 : (\exists y)(\forall x)P(x, f(y)) \text{ y } F_3 : (\exists y)(\forall x)P(x, y).$$

(a) Hállese una L_1 estructura, \mathcal{I} , tal que $\mathcal{I} \models F_1$ pero $\mathcal{I} \not\models F_2$.

(b) Hállese una L_1 estructura, \mathcal{I}' , tal que $\mathcal{I}' \models F_3$ pero $\mathcal{I}' \not\models F_2$.

2. Consideremos ahora el lenguaje $L_2 = \{a, b, P, Q\}$ y la fórmula, F , siguiente:

$$(\forall x)(\exists y)[P(x, y) \wedge \neg Q(x, a)].$$

Hállese un modelo de Herbrand de F .

Solución:

Solución del apartado (1a): Sea $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{1, 2\}$, $f^I = \{(1, 1), (2, 2)\}$ (es decir, la identidad en U) y $P^I = \{(1, 1), (2, 2)\}$ (es decir, la igualdad en U). Entonces, $\mathcal{I} \models F_1$ pero $\mathcal{I} \not\models F_2$.

Solución del apartado (1b): Sea $\mathcal{I}' = (U', I')$ con $U' = \{1, 2\}$, $f^{I'} = \{(1, 2), (2, 2)\}$ (es decir, la constante 2 en U) y $P^{I'} = \{(1, 2), (2, 2)\}$ (es decir, la relación menor o igual en U). Entonces, $\mathcal{I}' \models F_3$ pero $\mathcal{I}' \not\models F_2$.

Solución del apartado (2a): El universo de Herbrand de L_2 es $UH = \{a, b\}$. Un modelo de Herbrand de F es $I = \{P(a, a), P(a, b), P(b, a), P(b, b)\}$.

Examen de Septiembre de 2002

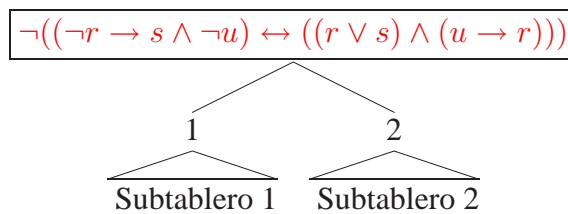
Ejercicio 16 Sean $A : \neg r \rightarrow s \wedge \neg u$, $B : (r \vee s) \wedge (u \rightarrow r)$ y U el conjunto de fórmulas:

$$U = \{q \vee r \vee s, r \rightarrow q \vee t, q \rightarrow \neg p, t \rightarrow u, u \rightarrow \neg s, p\}$$

- (a) Pruébese, mediante tableros semánticos que A y B son lógicamente equivalentes.
- (b) Hállense, razonadamente, todos los modelos de U . ¿Es U consistente?
- (c) Pruébese, mediante resolución lineal, que la fórmula A es consecuencia lógica de U .
- (d) Decídase razonadamente si la fórmula $\neg B$ es, o no, consecuencia lógica de U .

Solución:

Solución del apartado (a): El tablero semántico de $\neg(A \leftrightarrow B)$ es



donde el subtablero 1 se muestra en la Figura 2 (página 30) y el subtablero 2 en la Figura 3 (página 31)

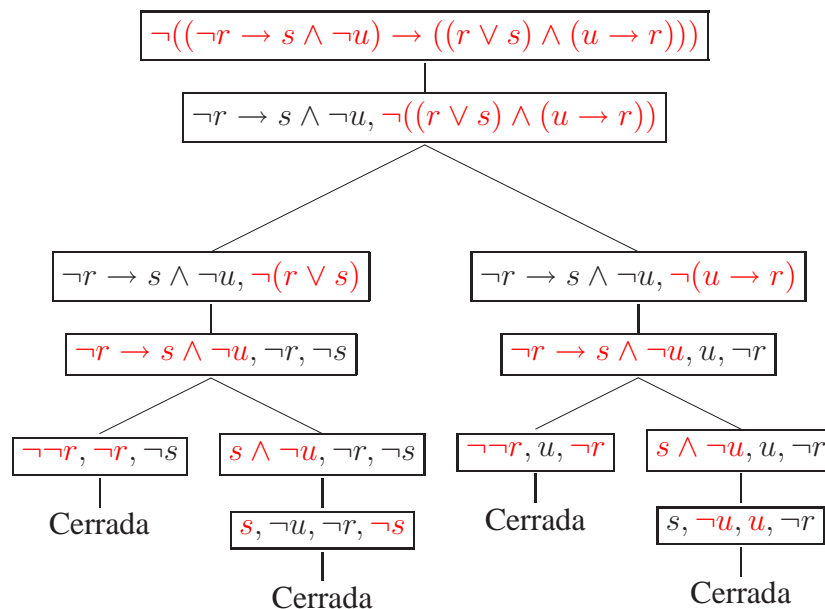


Figura 2: Subtablero 1

Al tener todas sus hojas cerradas, A y B son equivalentes.

Solución del apartado (b): Consideremos las fórmulas de U :

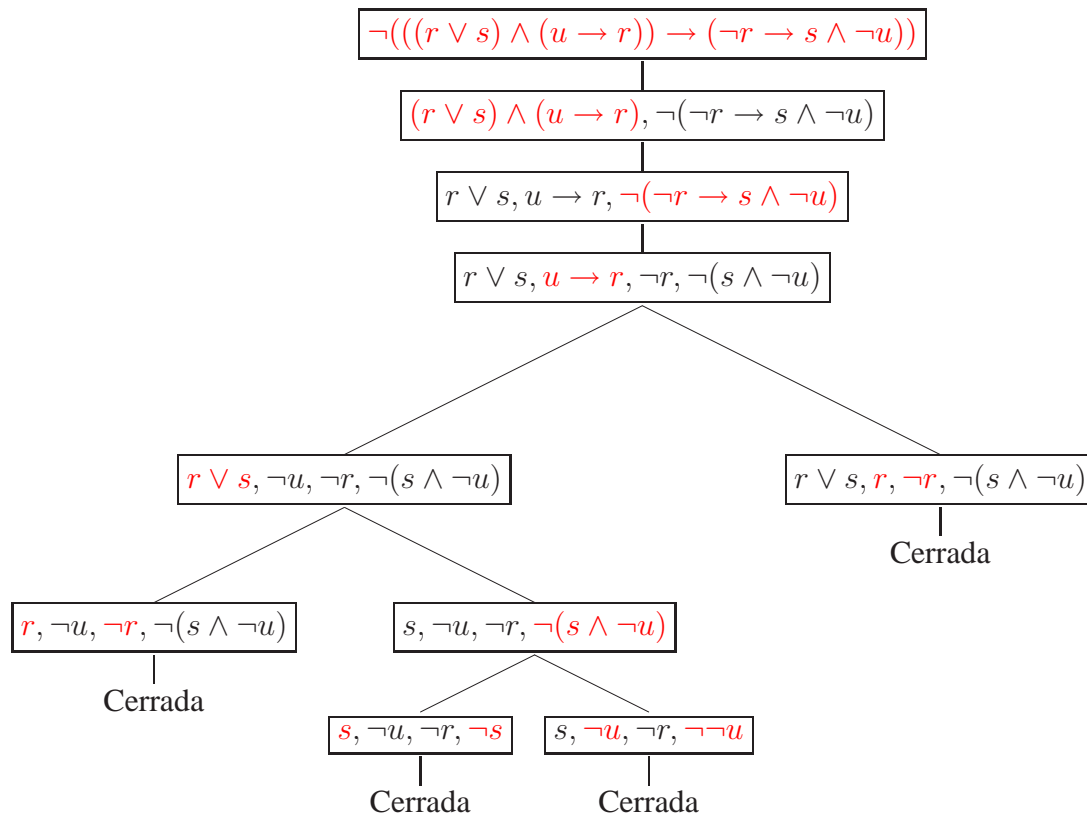


Figura 3: Subtablero 2

- $F_1 : q \vee r \vee s$
- $F_2 : r \rightarrow q \vee t$
- $F_3 : q \rightarrow \neg p$
- $F_4 : t \rightarrow u$
- $F_5 : u \rightarrow \neg s$
- $F_6 : p$

Sea v un modelo de U . Por F_6 , se tiene

$$v(p) = 1 \tag{1}$$

Por (1) y F_3 ,

$$v(q) = 0 \tag{2}$$

Por (2) y F_1 ,

$$v(r \vee s) = 1 \tag{3}$$

Por (3), se distingue dos casos. En el primer caso,

$$v(r) = 1 \tag{4}$$

Por (4) F_2 y (2),

$$v(t) = 1 \tag{5}$$

Por (5) y F_4 ,

$$v(u) = 1 \tag{6}$$

Por (6) y F_5 ,

$$v(s) = 0 \quad (7)$$

Por tanto, hemos encontrado un modelo v_1 tal que

$$v_1(p) = 1, v_1(q) = 0, v_1(r) = 1, v_1(s) = 0, v_1(t) = 1, v_1(u) = 1$$

En el segundo caso,

$$v(r) = 0 \quad (4')$$

Por (4') y (3),

$$v(s) = 1 \quad (5')$$

Por (5') y F_5 ,

$$v(u) = 0 \quad (6')$$

Por (6') y F_4 ,

$$v(t) = 0 \quad (7')$$

Por tanto, hemos encontrado otro modelo v_2 tal que

$$v_2(p) = 1, v_2(q) = 0, v_2(r) = 0, v_2(s) = 1, v_2(t) = 0, v_2(u) = 0$$

Puesto que U tiene modelos, es consistente.

Solución del apartado 3: En primer lugar, calculamos las formas clausales de las fórmulas de U y de la fórmula $\neg A$:

$$\begin{aligned} F_1 : q \vee r \vee s &\equiv \{\{q, r, s\}\} \\ F_2 : r \rightarrow q \vee t &\equiv \neg r \vee q \vee t && \text{[por (2)]} \\ &\equiv \{\{\neg r, q, t\}\} \\ F_3 : q \rightarrow \neg p &\equiv \neg q \vee \neg p && \text{[por (2)]} \\ &\equiv \{\{\neg q, \neg p\}\} \\ F_4 : t \rightarrow u &\equiv \neg t \vee u && \text{[por (2)]} \\ &\equiv \{\{\neg t, u\}\} \\ F_5 : u \rightarrow \neg s &\equiv \neg u \vee \neg s && \text{[por (2)]} \\ &\equiv \{\{\neg u, \neg s\}\} \\ F_6 : p &\equiv \{\{p\}\} \\ \neg A : \neg(\neg r \rightarrow s \wedge \neg u) &\equiv \neg(\neg\neg r \vee (s \wedge \neg u)) && \text{[por (2)]} \\ &\equiv \neg(r \vee (s \wedge \neg u)) && \text{[por (5)]} \\ &\equiv \neg r \wedge \neg(s \wedge \neg u) && \text{[por (4)]} \\ &\equiv \neg r \wedge (\neg s \vee \neg\neg u) && \text{[por (3)]} \\ &\equiv \neg r \wedge (\neg s \vee u) && \text{[por (5)]} \\ &\equiv \{\{\neg r\}\}, \{\neg s, u\} \end{aligned}$$

Una resolución lineal con las cláusulas obtenidas es

- 1 $\{q, r, s\}$
- 2 $\{\neg r, q, t\}$
- 3 $\{\neg q, \neg p\}$
- 4 $\{\neg t, u\}$
- 5 $\{\neg u, \neg s\}$
- 6 $\{p\}$
- 7 $\{\neg r\}$
- 8 $\{\neg s, u\}$
- 9 $\{q, r, u\}$ Resolvente de 1 y 8
- 10 $\{q, r, \neg s\}$ Resolvente de 9 y 5
- 11 $\{q, r\}$ Resolvente de 10 y 1
- 12 $\{q\}$ Resolvente de 11 y 7
- 13 $\{\neg p\}$ Resolvente de 12 y 3
- 14 \square Resolvente de 13 y 6

Solución del apartado (d): Puesto que los modelos de U , calculados en el apartado (b), son las valoraciones v_1 y v_2 tales que

$v_1(p) = 1, v_1(q) = 0, v_1(r) = 1, v_1(s) = 0, v_1(t) = 1, v_1(u) = 1$
 $v_2(p) = 1, v_2(q) = 0, v_2(r) = 0, v_2(s) = 1, v_2(t) = 0, v_2(u) = 0$ para determinar si $\neg B$ es consecuencia de U basta calcular el valor de $\neg B$ en dichas valoraciones.

$$\begin{aligned}
 v_1(\neg((r \vee s) \wedge (u \rightarrow r))) &= H_{\neg}(v_1(r \vee s) \wedge (u \rightarrow r)) \\
 &= H_{\neg}(H_{\wedge}(v_1(r \vee s), v_1(u \rightarrow r))) \\
 &= H_{\neg}(H_{\wedge}(H_{\vee}(v_1(r), v_1(s)), H_{\rightarrow}(v_1(u), v_1(r)))) \\
 &= H_{\neg}(H_{\wedge}(H_{\vee}(1, 0), H_{\rightarrow}(1, 1))) \\
 &= H_{\neg}(H_{\wedge}(1, 1)) \\
 &= H_{\neg}(1) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Por tanto, $\neg B$ no es consecuencia de U .

Nótese que el cálculo anterior puede simplificarse (por el método de Quine) en

$$\begin{array}{ccccccc}
 \neg & (& (& r & \vee & s &) & \wedge & (& u & \rightarrow & r &) &) &) \\
 0 & & 1 & 1 & 0 & & 1 & & 1 & 1 & 1 & & & &
 \end{array}$$

Ejercicio 17 Consideremos el lenguaje de primer orden $L = \{a, P, Q\}$ (siendo a un símbolo de constante y P y Q predicados de aridad 1). Sea F la fórmula de L

$$(\forall x)[P(x) \rightarrow (Q(x) \vee Q(a))] \rightarrow ((\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)[Q(x) \vee Q(a)])$$

(a) Obténganse formas clausales para F y $\neg F$.

(b) Pruébese, utilizando resolución básica, que F es lógicamente válida.

(c) Descríbase un modelo de Herbrand de F .

Solución:

Solución del apartado (a): Cálculo de una forma clausal de F :

$$\begin{aligned}
& (\forall x)[P(x) \rightarrow (Q(x) \vee Q(a))] \rightarrow ((\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)[Q(x) \vee Q(a)]) \\
\equiv & (\forall x)[P(x) \rightarrow (Q(x) \vee Q(a))] \rightarrow ((\exists y)P(y) \rightarrow (\exists z)[Q(z) \vee Q(a)]) && \text{[rectificación]} \\
\equiv & \neg(\forall x)[\neg P(x) \vee (Q(x) \vee Q(a))] \vee (\neg(\exists y)P(y) \vee (\exists z)[Q(z) \vee Q(a)]) && \text{[por (2)]} \\
\equiv & (\exists x)\neg(\neg P(x) \vee (Q(x) \vee Q(a))) \vee ((\forall y)\neg P(y) \vee (\exists z)[Q(z) \vee Q(a)]) && \text{[por (8) y (9)]} \\
\equiv & (\exists x)[\neg\neg P(x) \wedge \neg(Q(x) \vee Q(a))] \vee ((\forall y)\neg P(y) \vee (\exists z)[Q(z) \vee Q(a)]) && \text{[por (6)]} \\
\equiv & (\exists x)[P(x) \wedge (\neg Q(x) \wedge \neg Q(a))] \vee ((\forall y)\neg P(y) \vee (\exists z)[Q(z) \vee Q(a)]) && \text{[por (7) y (6)]} \\
\equiv & (\exists x)[(P(x) \wedge (\neg Q(x) \wedge \neg Q(a)))] \vee ((\forall y)\neg P(y) \vee (\exists z)[Q(z) \vee Q(a)]) && \text{[por (14)]} \\
\equiv & (\exists x)[(P(x) \wedge (\neg Q(x) \wedge \neg Q(a)))] \vee (\exists z)[(\forall y)\neg P(y) \vee (Q(z) \vee Q(a))] && \text{[por (18)]} \\
\equiv & (\exists x)(\exists z)[(P(x) \wedge (\neg Q(x) \wedge \neg Q(a)))] \vee (\forall y)[\neg P(y) \vee (Q(z) \vee Q(a))] && \text{[por (12)]} \\
\equiv & (\exists x)(\exists z)(\forall y)[(P(x) \wedge (\neg Q(x) \wedge \neg Q(a)))] \vee (\neg P(y) \vee (Q(z) \vee Q(a))) && \text{[por (16)]} \\
\equiv_{\text{sat}} & (\forall y)[(P(b) \wedge (\neg Q(b) \wedge \neg Q(a)))] \vee (\neg P(y) \vee (Q(c) \vee Q(a))) && \text{[Skolem]} \\
\equiv & (\forall y)[(P(b) \vee (\neg P(y) \vee (Q(c) \vee Q(a)))) \wedge \\
& \quad (\neg Q(b) \vee (\neg P(y) \vee (Q(c) \vee Q(a)))) \wedge \\
& \quad (\neg Q(a) \vee (\neg P(y) \vee (Q(c) \vee Q(a))))] && \text{[distributiva]} \\
\equiv & (\forall y)[(P(b) \vee (\neg P(y) \vee (Q(c) \vee Q(a)))) \wedge \\
& \quad (\neg Q(b) \vee (\neg P(y) \vee (Q(c) \vee Q(a))))] && \text{[tautología]} \\
\equiv & \{\{P(b), \neg P(y), Q(c), Q(a)\}, \{\neg Q(b), \neg P(y), Q(c), Q(a)\}\}
\end{aligned}$$

2.- Cálculo de una forma clausal de $\neg F$:

$$\begin{aligned}
& \neg((\forall x)[P(x) \rightarrow (Q(x) \vee Q(a))] \rightarrow ((\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)[Q(x) \vee Q(a)])) \\
\equiv & \neg((\exists x)[P(x) \wedge (\neg Q(x) \wedge \neg Q(a))] \vee ((\forall y)\neg P(y) \vee (\exists z)[Q(z) \vee Q(a)])) && \text{[por anterior]} \\
\equiv & \neg(\forall y)(\exists x)(\exists z)[(P(x) \wedge (\neg Q(x) \wedge \neg Q(a)))] \vee (\neg P(y) \vee (Q(z) \vee Q(a))) && \text{[por (12)–(18)]} \\
\equiv & (\exists y)(\forall x)(\forall z)\neg[(P(x) \wedge (\neg Q(x) \wedge \neg Q(a)))] \vee (\neg P(y) \vee (Q(z) \vee Q(a))) && \text{[por (8) y (9)]} \\
\equiv_{\text{sat}} & (\forall x)(\forall z)\neg[(P(x) \wedge (\neg Q(x) \wedge \neg Q(a)))] \vee (\neg P(b) \vee (Q(z) \vee Q(a))) && \text{[por Skolem]} \\
\equiv & (\forall x)(\forall z)[\neg(P(x) \wedge (\neg Q(x) \wedge \neg Q(a)))] \wedge \neg(\neg P(b) \vee (Q(z) \vee Q(a))) && \text{[por (6)]} \\
\equiv & (\forall x)(\forall z)[(\neg P(x) \vee \neg(\neg Q(x) \wedge \neg Q(a)))] \wedge (\neg\neg P(b) \wedge \neg(Q(z) \vee Q(a))) && \text{[por (5) y (6)]} \\
\equiv & (\forall x)(\forall z)[(\neg P(x) \vee (\neg\neg Q(x) \vee \neg\neg Q(a)))] \wedge (P(b) \wedge (\neg Q(z) \wedge \neg Q(a))) && \text{[por (5), (6) y (7)]} \\
\equiv & (\forall x)(\forall z)[(\neg P(x) \vee (Q(x) \vee Q(a)))] \wedge (P(b) \wedge (\neg Q(z) \wedge \neg Q(a))) && \text{[por (7)]} \\
\equiv & \{\{\neg P(x), Q(x), Q(a)\}, \{P(b)\}, \{\neg Q(z)\}, \{\neg Q(a)\}\}
\end{aligned}$$

Solución del apartado (b): Sustituyendo en la forma clausal de $\neg F$ calculada anteriormente, la x y la z por b se obtiene un conjunto de cláusulas que tienen una refutación básica. En efecto,

- 1 $\{\neg P(b), Q(b), Q(a)\}$
- 2 $\{P(b)\}$
- 3 $\{\neg Q(b)\}$
- 4 $\{\neg Q(a)\}$
- 5 $\{Q(b), Q(a)\}$ Resolvente de 1 y 2
- 6 $\{Q(a)\}$ Resolvente de 5 y 3
- 7 \square Resolvente de 6 y 4

Solución del apartado (c): A la vista de la forma clausal de F del apartado (a), se observa que un modelo de Herbrand de F es el conjunto vacío (es decir, ningún elemento verifica P ni ninguno verifica Q).

Ejercicio 18 Consideremos el LPO $L = \{a, b, P, Q, R, T\}$. Escribanse fórmulas de L que expresen las siguientes afirmaciones:

1. Pilar dirigió algún drama pero no dirigió ninguna comedia.

2. Pedro dirigió una comedia de mayor duración que cualquiera de las dirigidas por Pilar.
3. Pedro no dirigió comedias salvo que Pilar dirigiera algún drama.
4. Pilar dirigió todo drama que no dirigió Pedro.

$P(x)$ expresará que “ x es una comedia”, $Q(x)$ que “ x es un drama”, $R(x, y)$ expresará que “ x dirigió y ” y $T(x, y)$ que “ x es de mayor duración que y ”. Las constantes a y b denotarán, respectivamente, a Pedro y a Pilar.

Solución:

1. Pilar dirigió algún drama pero no dirigió ninguna comedia.

$$(\exists y)[Q(y) \wedge R(b, y)] \wedge \neg(\exists z)[P(z) \wedge R(b, z)]$$

2. Pedro dirigió una comedia de mayor duración que cualquiera de las dirigidas por Pilar.

$$(\exists x)[P(x) \wedge R(a, x) \wedge (\forall y)[P(y) \wedge R(b, y) \rightarrow T(x, y)]]$$

3. Pedro no dirigió comedias salvo que Pilar dirigiera algún drama.

$$(\exists x)[P(x) \wedge R(a, x)] \rightarrow (\exists y)[Q(y) \wedge R(b, y)]$$

4. Pilar dirigió todo drama que no dirigió Pedro.

$$(\forall x)[Q(x) \wedge \neg R(a, x) \rightarrow R(b, x)]$$

Ejercicio 19 Consideremos las fórmulas del LPO, $L = \{P, Q\}$

$$F_1 : (\exists x)[P(x) \wedge Q(x)].$$

$$F_2 : (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x),$$

$$F_3 : (\exists x)(\exists y)[P(x) \wedge Q(y)]$$

(a) Hállese una L estructura \mathcal{I} tal que $\mathcal{I} \models F_2$ pero $\mathcal{I} \not\models F_1$.

(b) Pruébese que todo modelo de F_1 es modelo de F_2 .

(c) Pruébese que F_2 y F_3 son lógicamente equivalentes.

Solución:

Solución del apartado (a): Vamos a buscar formas clausales de F_2 y $\neg F_1$ y saturar por resolución el conjunto de las cláusulas obtenidas para hallar un modelo de Herbrand de $\{F_2, \neg F_1\}$.

$$\begin{aligned}
 F_2 : & (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \\
 \equiv & (\exists x)P(x) \wedge (\exists y)Q(y) && \text{[rectificación]} \\
 \equiv & (\exists x)(\exists y)[P(x) \wedge Q(y)] && \text{[por (11)–(18)]} \\
 \equiv_{\text{sat}} & P(a) \wedge Q(b) && \text{[por Skolem]} \\
 \equiv & \{\{P(a)\}, \{Q(b)\}\} \\
 \neg F_1 : & \neg(\exists x)[P(x) \wedge Q(x)] \\
 \equiv & (\forall x)\neg(P(x) \wedge Q(x)) && \text{[por (9)]} \\
 \equiv & (\forall x)[\neg P(x) \vee \neg Q(x)] && \text{[por (5)]} \\
 \equiv & \{\{\neg P(x), \neg Q(x)\}\}
 \end{aligned}$$

Las cláusulas obtenidas son

- 1 $\{P(a)\}$
- 2 $\{Q(b)\}$
- 3 $\{\neg P(x), \neg Q(x)\}$

Veamos el proceso de saturación, por resolución:

Al resolver 1 con 1 no se obtiene resolvente.

Al resolver 2 con 1 y 2 no se obtiene resolvente.

Al resolver 3 con 1, 2 y 3 se obtiene

4 $\{\neg Q(a)\}$ (resolvente de 3 y 1)

5 $\{\neg P(b)\}$ (resolvente de 3 y 2)

Al resolver 4 con 1, 2, 3 y 4 no se obtiene resolvente.

Al resolver 5 con 1, 2, 3, 4 y 5 no se obtiene resolvente.

A la vista del saturado, un modelo es $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{a, b\}$, $P^I = \{a\}$, $Q^I = \{b\}$.

Solución del apartado (b): Probar que todo modelo de F_1 es modelo de F_2 , equivale a probar que $F_1 \models F_2$ que, a su vez, equivale a probar que $\{F_1, \neg F_2\}$ es inconsistente. Probaremos la última condición por resolución. Para ello, empezamos calculando unas formas clausales de F_1 y $\neg F_2$.

$$\begin{aligned}
 F_1 &: (\exists x)[P(x) \wedge Q(x)] \\
 \equiv_{sat} & P(a) \wedge Q(a) && \text{[por Skolem]} \\
 \equiv & \{\{P(a)\}, \{Q(a)\}\} \\
 \neg F_2 &: \neg((\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)) \\
 \equiv & \neg(\exists x)(\exists y)[P(x) \wedge Q(y)] && \text{[por apartado (a)]} \\
 \equiv & (\forall x)(\forall y)\neg(P(x) \wedge Q(y)) && \text{[por (9)]} \\
 \equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg P(x) \vee \neg Q(y)] && \text{[por (5)]} \\
 \equiv & \{\{\neg P(x), \neg Q(y)\}\}
 \end{aligned}$$

La resolución es

- 1 $\{P(a)\}$
- 2 $\{Q(a)\}$
- 3 $\{\neg P(x), \neg Q(y)\}$
- 4 $\{\neg Q(y)\}$ Resolvente de 1 y 3
- 5 \square Resolvente de 4 y 2

Solución del apartado (c): Para probar que F_2 y F_3 son lógicamente equivalentes, basta probar que $F_2 \models F_3$ y $F_3 \models F_2$. Lo haremos por resolución. Para ello, necesitaremos formas clausales de F_2 , $\neg F_2$, F_3 y $\neg F_3$.

$$\begin{aligned}
 F_2 &: (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \\
 \equiv_{sat} & \{\{P(a)\}, \{Q(b)\}\} && \text{[por anterior]} \\
 \neg F_2 &: \neg((\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)) \\
 \equiv & \{\{\neg P(x), \neg Q(y)\}\} && \text{[por anterior]} \\
 F_3 &: (\exists x)(\exists y)[P(x) \wedge Q(y)] \\
 \equiv_{sat} & P(c) \wedge Q(d) && \text{[por Skolem]} \\
 \equiv & \{\{P(c)\}, \{Q(d)\}\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\neg F_3 &: \neg(\exists x)(\exists y)[P(x) \wedge Q(y)] \\ \equiv & (\forall x)(\forall y)\neg(P(x) \wedge Q(y)) \quad [\text{por (9)}] \\ \equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg P(x) \vee \neg Q(y)] \quad [\text{por (5)}] \\ \equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg P(x) \vee \neg Q(y)] \quad [\text{por (5)}] \\ \equiv & \{\{\neg P(x), \neg Q(y)\}\}\end{aligned}$$

Demostración, por resolución, de $F_2 \models F_3$:

$$\begin{array}{ll}1 & \{P(a)\} \\2 & \{Q(b)\} \\3 & \{\neg P(x), \neg Q(y)\} \\4 & \{\neg Q(y)\} \quad \text{Resolvente de 1 y 3} \\5 & \square \quad \text{Resolvente de 4 y 2}\end{array}$$

Demostración, por resolución, de $F_3 \models F_2$:

$$\begin{array}{ll}1 & \{P(c)\} \\2 & \{Q(d)\} \\3 & \{\neg P(x), \neg Q(y)\} \\4 & \{\neg Q(y)\} \quad \text{Resolvente de 1 y 3} \\5 & \square \quad \text{Resolvente de 4 y 2}\end{array}$$

Examen de Junio de 2003

Ejercicio 20 Consideremos los conjuntos de fórmulas:

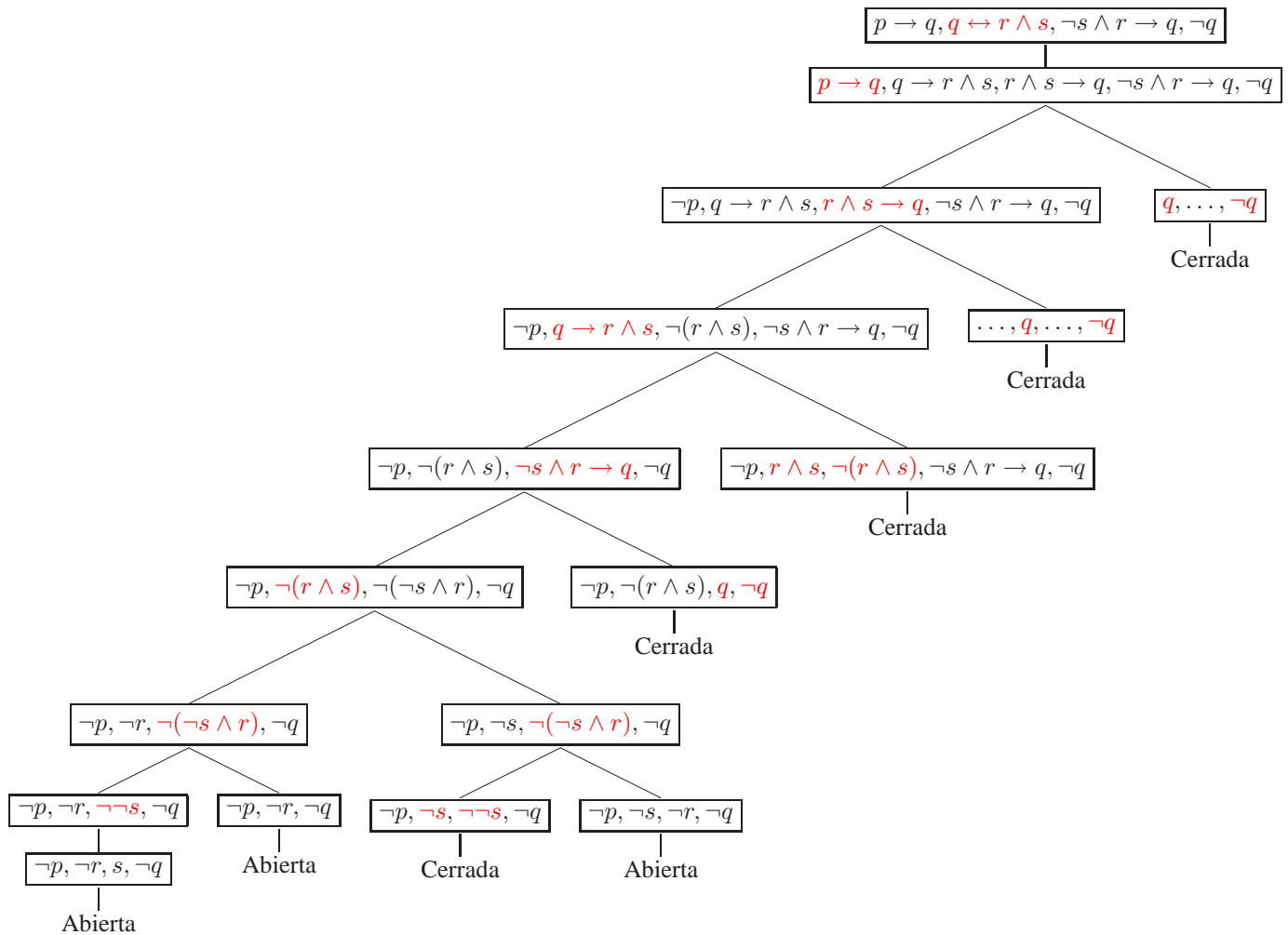
$$S = \{p \rightarrow q, q \leftrightarrow r \wedge s, \neg s \wedge r \rightarrow q, \neg q\}$$

$$T = \{q \vee r, \neg q \vee \neg r\}$$

1. Pruébese, mediante tableros semánticos, que S es consistente.
2. Obténganse, razonadamente, todos los modelos de S .
3. Pruébese, mediante resolución lineal, que $S \cup T$ es inconsistente.
4. Teniendo en cuenta los apartados anteriores, obténgase una fórmula F , formada exclusivamente por las variables q y r , tal que: $F \notin TAUT$ y $S \models F$.

Solución:

Solución del apartado 1: Un tablero semántico de S es



Al tener hojas abiertas, el conjunto S es consistente.

Solución del apartado 2: La hojas abiertas son

$$S_1 = \{\neg p, \neg q, \neg r, s\}$$

$$S_2 = \{\neg p, \neg q, \neg r\}$$

$$S_3 = \{\neg p, \neg q, \neg r, \neg s\}$$

Por tanto, los modelos de S son las valoraciones v tales que $v(p) = v(q) = v(r) = 0$.

Solución del apartado 3: En primer lugar, tenemos que calcular las formas clausales de las fórmulas de $S \cup T$.

$$\begin{aligned} p \rightarrow q &\equiv \neg p \vee q && \text{[por (2)]} \\ &\equiv \{\{\neg p, q\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q \leftrightarrow r \wedge s &\equiv (q \rightarrow r \wedge s) \wedge (r \wedge s \rightarrow q) && \text{[por (1)]} \\ &\equiv (\neg q \vee (r \wedge s)) \wedge (\neg(r \wedge s) \vee q) && \text{[por (2)]} \\ &\equiv (\neg q \vee (r \wedge s)) \wedge ((\neg r \vee \neg s) \vee q) && \text{[por (3)]} \\ &\equiv ((\neg q \vee r) \wedge (\neg q \vee s)) \wedge ((\neg r \vee \neg s) \vee q) && \text{[por (6)]} \\ &\equiv \{\{\neg q, r\}, \{\neg q, s\}, \{\neg r, \neg s, q\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg s \wedge r \rightarrow q &\equiv \neg(\neg s \wedge r) \vee q && \text{[por (2)]} \\ &\equiv (\neg\neg s \vee \neg r) \vee q && \text{[por (3)]} \\ &\equiv (s \vee \neg r) \vee q && \text{[por (5)]} \\ &\equiv \{\{s, \neg r, q\}\} \end{aligned}$$

$$\neg q \equiv \{\{\neg q\}\}$$

$$q \vee r \equiv \{\{q, r\}\}$$

$$\neg q \vee \neg r \equiv \{\{\neg q, \neg r\}\}$$

Una resolución lineal con las cláusulas obtenidas es

- 1 $\{\neg p, q\}$
- 2 $\{\neg q, r\}$
- 3 $\{\neg q, s\}$
- 4 $\{\neg r, \neg s, q\}$
- 5 $\{s, \neg r, q\}$
- 6 $\{\neg q\}$
- 7 $\{q, r\}$
- 8 $\{\neg q, \neg r\}$
- 9 $\{s, q\}$ Resolvente de 7 y 5
- 10 $\{q, \neg r\}$ Resolvente de 9 y 4
- 11 $\{q\}$ Resolvente de 10 y 7
- 12 \square Resolvente de 11 y 6

Solución del apartado 4: Puesto que en cualquier modelo v de S se verifica que $v(q) = v(r) = 0$, entonces la fórmula $\neg q \wedge \neg r$ es una consecuencia no tautológica de S .

Ejercicio 21 Supongamos conocidos los siguientes hechos acerca del número de aprobados de dos asignaturas A y B :

1. Si todos los alumnos aprueban la asignatura A , entonces todos aprueban la asignatura B .
2. Si algún delegado de la clase aprueba A y B , entonces todos los alumnos aprueban A .

3. Si nadie aprueba B, entonces ningún delegado aprueba A.
4. Si Manuel no aprueba B, entonces nadie aprueba B.

Se pide:

- (a) Formalizar los enunciados anteriores en un lenguaje de primer orden usando los siguientes símbolos de predicado: $D(x)$: “ x es un delegado”, $Ap(x, y)$: “ x aprueba la asignatura y ”. Las constantes a, b, m denotarán la asignatura A, la asignatura B y a Manuel, respectivamente.
- (b) Obtener una forma clausal para el conjunto de fórmulas del apartado anterior.
- (c) Probar, mediante resolución, que si Manuel es un delegado y aprueba la asignatura A, entonces todos los alumnos aprueban las asignaturas A y B.

Solución:

Solución del apartado (a) Formalización:

- Si todos los alumnos aprueban la asignatura A, entonces todos aprueban la asignatura B.
 $(\forall x)Ap(x, a) \rightarrow (\forall y)Ap(y, b)$.
- Si algún delegado de la clase aprueba A y B, entonces todos los alumnos aprueban A.
 $(\exists x)[D(x) \wedge Ap(x, a) \wedge Ap(x, b)] \rightarrow (\forall y)Ap(y, a)$.
- Si nadie aprueba B, entonces ningún delegado aprueba A.
 $\neg(\exists x)Ap(x, b) \rightarrow \neg(\exists y)[D(y) \wedge Ap(y, a)]$.
- Si Manuel no aprueba B, entonces nadie aprueba B.
 $\neg Ap(m, b) \rightarrow \neg(\exists x)Ap(x, b)$.

Solución del apartado (b) Formas clausales:

- $\{\neg Ap(c, a), Ap(y, b)\}$
- $\{\neg D(x), \neg Ap(x, a), \neg Ap(x, b), Ap(y, a)\}$
- $\{Ap(d, b), \neg D(y), \neg Ap(y, a)\}$
- $\{Ap(m, b), \neg Ap(x, b)\}$

donde c, d y e son constantes de Skolem.

Solución del apartado (c) Resolución:

Antes de hacer la resolución se formaliza la negación de la conclusión (Si Manuel es un delegado y aprueba la asignatura A, entonces todos los alumnos aprueban las asignaturas A y B):

$$\neg(D(m) \wedge Ap(m, a) \rightarrow (\forall x)[Ap(x, a) \wedge Ap(x, b)])$$

y se calcula las cláusulas correspondientes:

- $\{D(m)\}$
- $\{Ap(m, a)\}$
- $\{\neg Ap(e, a), \neg Ap(e, b)\}$

La resolución es

1	$\{\neg Ap(c, a), Ap(y, b)\}$	
2	$\{\neg D(x), \neg Ap(x, a), \neg Ap(x, b), Ap(y, a)\}$	
3	$\{Ap(d, b), \neg D(y), \neg Ap(y, a)\}$	
4	$\{Ap(m, b), \neg Ap(x, b)\}$	
5	$\{D(m)\}$	
6	$\{Ap(m, a)\}$	
7	$\{\neg Ap(e, a), \neg Ap(e, b)\}$	
8	$\{Ap(d, b), \neg Ap(m, a)\}$	Resolvente de 5.1 y 3.2
9	$\{Ap(d, b)\}$	Resolvente de 8.2 y 6.1
10	$\{Ap(m, b)\}$	Resolvente de 9.1 y 4.2
11	$\{\neg D(m), \neg Ap(m, a), Ap(y, a)\}$	Resolvente de 10.1 y 2.3
12	$\{\neg Ap(m, a), Ap(y, a)\}$	Resolvente de 11.1 y 5.1
13	$\{Ap(y, a)\}$	Resolvente de 12.1 y 6.1
14	$\{Ap(y, b)\}$	Resolvente de 13.1 y 1.1
15	$\{\neg Ap(e, b)\}$	Resolvente de 7.1 y 13.1
16	\square	Resolvente de 15.1 y 14.1

Ejercicio 22 *El ejercicio tiene dos apartados.*

1. Consideramos el lenguaje $L_1 = \{P, f, a, b, c\}$ y el conjunto de fórmulas:

$$S = \{P(c, a) \rightarrow (\forall z)P(z, b), (\forall x)[P(f(x), x) \rightarrow (\forall z)P(z, x)], \neg P(b, c)\}$$

Pruébese, proporcionando un modelo de Herbrand, que $S \not\models P(f(a), a) \vee \neg P(f(b), b)$.

2. Consideramos el lenguaje $L_2 = \{a, b, P\}$. Sea F la fórmula

$$\neg P(x, a) \wedge \neg P(x, b) \wedge (\exists y)(\exists z)P(y, z)$$

Pruébese que F es consistente y que NO tiene ningún modelo de Herbrand (en el lenguaje L_2). ¿Contradice esto el teorema de Herbrand? Razónese la respuesta.

Solución:

Solución del apartado (1): Las formas clausales de las fórmulas del problema son:

- de $P(c, a) \rightarrow (\forall z)P(z, b)$, $S_1 = \{\{\neg P(c, a), P(z, b)\}\}$;
- de $(\forall x)[P(f(x), x) \rightarrow (\forall z)P(z, x)]$, $S_2 = \{\{\neg P(f(x), x), P(z, x)\}\}$;
- de $\neg P(b, c)$, $S_3 = \{\{\neg P(b, c)\}\}$;
- de $\neg(P(f(a), a) \vee \neg P(f(b), b))$, $S_4 = \{\{\neg P(f(a), a)\}, \{P(f(b), b)\}\}$.

Vamos a calcular la saturación, por resolución y factorización, de $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$. Las cláusulas iniciales son

- 1 $\{\neg P(c, a), P(z, b)\}$
- 2 $\{\neg P(f(x), x), P(z, x)\}$
- 3 $\{\neg P(b, c)\}$
- 4 $\{\neg P(f(a), a)\}$
- 5 $\{P(f(b), b)\}$

Al resolver 3 con 3 no se obtiene resolvente.

Al resolver 4 con 3 y 4 no se obtiene resolvente.

Al resolver 5 con 3, 4 y 5 no se obtiene resolvente.

Al resolver 1 con 3, 4, 5 y 1 no se obtiene resolvente.

Al resolver 2 con 3, 4, 5, 1 y 2 se obtiene

6 $\{P(z, b)\}$ (resolvente de 2 y 5) y

7 $\{\neg P(f(c), c)\}$ (resolvente de 2 y 3)

La cláusula 6 subsume a la 1 y a la 5

Al resolver 6 con 3, 4, 2 y 6 no se obtiene resolvente.

Al resolver 7 con 3, 4, 2, 6 y 7 no se obtiene resolvente.

Por tanto, el saturado es

2 $\{\neg P(f(x), x), P(z, x)\}$

3 $\{\neg P(b, c)\}$

4 $\{\neg P(f(a), a)\}$

6 $\{P(z, b)\}$

7 $\{\neg P(f(c), c)\}$

El universo de Herbrand es $UH = \{a, f(a), f(f(a)), \dots, b, f(b), f(f(b)), \dots, c, f(c), f(f(c)), \dots\}$ y un modelo de Herbrand es $I = \{P(z, b) : z \in UH\}$.

Solución del apartado (2): Para demostrar que F es consistente basta mostrar una estructura \mathcal{I} de L_2 y una asignación A en \mathcal{I} tales que $\mathcal{I}_A \models F$. Sea $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{1, 2\}$, $a^I = 1$, $b^I = 1$ y $P^I = \{(1, 2)\}$. Sea A tal que $A(x) = 1$. Entonces, $\mathcal{I}_A \models F$ (ya que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_A(F) &= \mathcal{I}_A(\neg P(x, a) \wedge \neg P(x, b) \wedge (\exists y)(\exists z)P(y, z)) \\ &= \mathcal{I}_A(\neg P(x, a)) \wedge \mathcal{I}_A(\neg P(x, b)) \wedge \mathcal{I}_A((\exists y)(\exists z)P(y, z)) \\ &= \mathbf{V} \end{aligned}$$

puesto que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_A(\neg P(x, a)) &= \neg P^I(A(x), a^I) \\ &= \neg P^I(1, 1) \\ &= \neg \mathbf{F} \\ &= \mathbf{V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_A(\neg P(x, b)) &= \neg P^I(A(x), b^I) \\ &= \neg P^I(1, 1) \\ &= \neg \mathbf{F} \\ &= \mathbf{V} \end{aligned}$$

$\mathcal{I}_A((\exists y)(\exists z)P(y, z)) = \mathbf{V}$ porque

$$\mathcal{I}_{A[y/1, z/2]}(P(y, z)) = P^I(1, 2) = \mathbf{V}$$

Veamos que F no tiene ningún modelo de Herbrand (en el lenguaje L_2). El universo de Herbrand de L_2 es $UH = \{a, b\}$, la base de Herbrand es $BH = \{P(a, a), P(a, b), P(b, a), P(b, b)\}$. Las interpretaciones de Herbrand de L_2 son los 16 subconjuntos de BH . Sea I una interpretación de Herbrand de L_2 . Demostraremos que $I \not\models F$ distinguiendo tres casos:

- Caso 1: $I = \emptyset$. Entonces, $I \not\models F$ (ya que $\emptyset \not\models (\exists y)(\exists z)P(y, z)$).

- Caso 2: $P(a, a) \in I$ ó $P(b, a) \in I$. Entonces, $I \not\models F$ (ya que $I \not\models \neg P(x, a)$).
- Caso 3: $P(a, b) \in I$ ó $P(b, b) \in I$. Entonces, $I \not\models F$ (ya que $I \not\models \neg P(x, b)$).

El que F sea consistente y no tenga modelo de Herbrand no contradice el teorema de Herbrand, ya que F no está en forma clausal (tiene un cuantificador existencial).

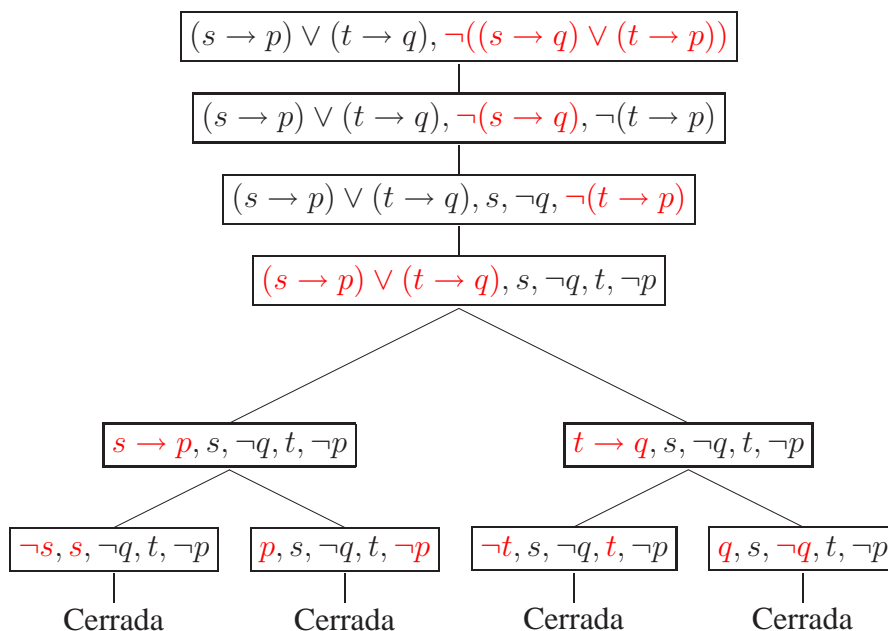
Examen de Septiembre de 2003

Ejercicio 23 Dadas las fórmulas $A : (s \rightarrow p) \vee (t \rightarrow q)$ y $B : (s \rightarrow q) \vee (t \rightarrow p)$, se pide:

1. Pruébese que $A \models B$:
 - (a) Mediante tableros semánticos.
 - (b) Mediante resolución por entradas.
2. Descríbanse, razonadamente, todos los modelos de A y, a continuación, pruébese nuevamente que $A \models B$, utilizando la definición de consecuencia lógica.
3. ¿Es $\neg B \rightarrow \neg A$ una tautología? Razónese la respuesta.

Solución:

Solución del apartado (1.a): El tablero semántico de $\{A, \neg B\}$ es



Como todas las hojas son cerradas, $A \models B$.

Solución del apartado (1.b): En primer lugar, calculamos la forma clausal de A

$$\begin{aligned} (s \rightarrow p) \vee (t \rightarrow q) &\equiv (\neg s \vee p) \vee (\neg t \vee q) \quad [\text{por (2)}] \\ &\equiv \{\{\neg s, p, \neg t, q\}\} \end{aligned}$$

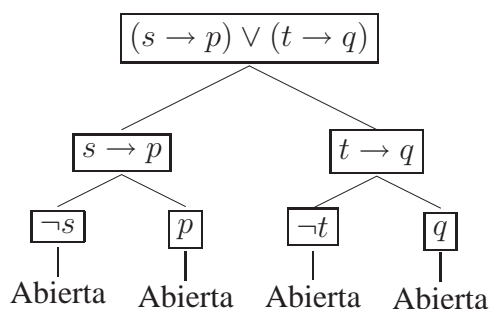
y la forma clausal de $\neg B$

$$\begin{aligned} \neg((s \rightarrow q) \vee (t \rightarrow p)) &\equiv \neg((\neg s \vee q) \vee (\neg t \vee p)) \quad [\text{por (2)}] \\ &\equiv \neg(\neg s \vee q) \wedge \neg(\neg t \vee p) \quad [\text{por (4)}] \\ &\equiv (\neg\neg s \wedge \neg q) \wedge (\neg\neg t \wedge \neg p) \quad [\text{por (4)}] \\ &\equiv (s \wedge \neg q) \wedge (t \wedge \neg p) \quad [\text{por (5)}] \\ &\equiv \{\{s\}, \{\neg q\}, \{t\}, \{\neg p\}\} \end{aligned}$$

Una resolución por entradas de las cláusulas obtenidas es

- 1 $\{\neg s, p, \neg t, q\}$
- 2 $\{s\}$
- 3 $\{\neg q\}$
- 4 $\{t\}$
- 5 $\{\neg p\}$
- 6 $\{p, \neg t, q\}$ Resolvente de 1 y 2
- 7 $\{\neg t, q\}$ Resolvente de 6 y 5
- 8 $\{q\}$ Resolvente de 6 y 4
- 9 \square Resolvente de 8 y 3

Solución del apartado 2: Para calcular los modelos de A construimos el tablero de A :



Los modelos de A son las cuatro valoraciones v_i tales que $v_1(s) = 0, v_2(p) = 1, v_3(t) = 0$ ó $v_4(q) = 0$. Como las cuatro son modelos de B , se tiene que $A \not\models B$.

Solución del apartado 3: En el apartado anterior encontramos una valoración v' tal que $v'(A) = 1$ y $v'(B) = 0$. Para dicha valoración,

$$\begin{aligned}
 v'(\neg B \rightarrow \neg A) &= H_{\rightarrow}(v'(\neg B), v'(\neg A)) \\
 &= H_{\rightarrow}(H_{\neg}(v'(B)), H_{\neg}(v'(A))) \\
 &= H_{\rightarrow}(H_{\neg}(0), H_{\neg}(1)) \\
 &= H_{\rightarrow}(1, 0) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Por tanto, $\neg B \rightarrow \neg A$ no es una tautología.

Ejercicio 24 Este ejercicio tiene dos apartados.

1. Hallar las formas prenexa, de Skolem y clausal de la fórmula:

$$\neg(\exists x)(\forall z)[P(x) \rightarrow \neg Q(z)] \vee ((\exists z)A(y, z) \rightarrow (\exists u)B(y, u))$$

2. Consideremos el lenguaje $L_1 = \{P, f, a, b\}$ y el conjunto de fórmulas:

$$S = \{(\forall x)[P(a, x) \rightarrow P(b, f(x))], (\forall x)[P(f(x), x) \rightarrow (\forall z)P(z, b)], P(a, f(a)) \wedge P(f(b), b)\}$$

Pruébese, proporcionando un modelo de Herbrand, que $S \not\models (\exists x)[P(x, a) \wedge P(f(x), b)]$.

Solución:

Solución del apartado 1:

1.- Forma prenexa:

$$\begin{aligned}
& \neg(\exists x)(\forall z)[P(x) \rightarrow \neg Q(z)] \vee ((\exists z)A(y, z) \rightarrow (\exists u)B(y, u)) \\
\equiv & \neg(\exists x)(\forall z)[P(x) \rightarrow \neg Q(z)] \vee ((\exists v)A(y, v) \rightarrow (\exists u)B(y, u)) & \text{[por (2)]} \\
\equiv & \neg(\exists x)(\forall z)[\neg P(x) \vee \neg Q(z)] \vee (\neg(\exists v)A(y, v) \vee (\exists u)B(y, u)) & \text{[por (4)]} \\
\equiv & (\forall x)(\exists z)\neg(\neg P(x) \vee \neg Q(z)) \vee ((\forall v)\neg A(y, v) \vee (\exists u)B(y, u)) & \text{[por (8) y (9)]} \\
\equiv & (\forall x)(\exists z)[\neg\neg P(x) \wedge \neg\neg Q(z)] \vee ((\forall v)\neg A(y, v) \vee (\exists u)B(y, u)) & \text{[por (5)]} \\
\equiv & (\forall x)(\exists z)[P(x) \wedge Q(z)] \vee ((\forall v)\neg A(y, v) \vee (\exists u)B(y, u)) & \text{[por (7)]} \\
\equiv & (\exists u)(\forall x)(\exists z)(\forall v)[(P(x) \wedge Q(z)) \vee (\neg A(y, v) \vee B(y, u))] & \text{[por (11)–(18)]}
\end{aligned}$$

2.– Forma de Skolem:

$$\begin{aligned}
& (\exists u)(\forall x)(\exists z)(\forall v)[(P(x) \wedge Q(z)) \vee (\neg A(y, v) \vee B(y, u))] \\
\equiv_{sat} & (\exists y)(\exists u)(\forall x)(\exists z)(\forall v)[(P(x) \wedge Q(z)) \vee (\neg A(y, v) \vee B(y, u))] & \text{[cierre existencial]} \\
\equiv_{sat} & (\exists u)(\forall x)(\exists z)(\forall v)[(P(x) \wedge Q(z)) \vee (\neg A(c, v) \vee B(c, u))] & \text{[c constante de Skolem]} \\
\equiv_{sat} & (\forall x)(\exists z)(\forall v)[(P(x) \wedge Q(z)) \vee (\neg A(c, v) \vee B(c, d))] & \text{[d constante de Skolem]} \\
\equiv_{sat} & (\forall x)(\forall v)[(P(x) \wedge Q(f(x))) \vee (\neg A(c, v) \vee B(c, d))] & \text{[f función de Skolem]}
\end{aligned}$$

3.– Forma clausal:

$$\begin{aligned}
& (\forall x)(\forall v)[(P(x) \wedge Q(f(x))) \vee (\neg A(c, v) \vee B(c, d))] \\
\equiv & (\forall x)(\forall v)[(P(x) \vee \neg A(c, v) \vee B(c, d)) \wedge [(Q(f(x)) \vee \neg A(c, v) \vee B(c, d))] & \text{[por (20)]} \\
\equiv & \{\{P(x), \neg A(c, v), B(c, d)\}, \{Q(f(x)), \neg A(c, v), B(c, d)\}\}
\end{aligned}$$

Solución del apartado 2: Las formas clausales de las fórmulas del problema son:

- de $(\forall x)[P(a, x) \rightarrow P(b, f(x))]$, $S_1 = \{\{\neg P(a, x), P(b, f(x))\}\}$;
- de $(\forall x)[P(f(x), x) \rightarrow (\forall z)P(z, b)]$, $S_2 = \{\{\neg P(f(x), x), P(z, b)\}\}$;
- de $P(a, f(a)) \wedge P(f(b), b)$, $S_3 = \{\{P(a, f(a))\}, \{P(f(b), b)\}\}$;
- de $\neg(\exists x)[P(x, a) \wedge P(f(x), b)]$, $S_4 = \{\{\neg P(x, a), \neg P(f(x), b)\}\}$.

Vamos a calcular la saturación, por resolución y factorización, de $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$. Las cláusulas iniciales son

- 1 $\{\neg P(a, x), P(b, f(x))\}$
- 2 $\{\neg P(f(x), x), P(z, b)\}$
- 3 $\{P(a, f(a))\}$
- 4 $\{P(f(b), b)\}$
- 5 $\{\neg P(x, a), \neg P(f(x), b)\}$

Al resolver 3 con 3 no se obtiene resolvente.

Al resolver 4 con 3 y 4 no se obtiene resolvente.

Al resolver 1 con 3, 4 y 1 se obtiene

$$6 \{P(b, f(f(a)))\} \text{ (resolvente de 1 y 3).}$$

Al resolver 6 con 3, 4, 1 y 6 no se obtiene resolvente.

Al resolver 2 con 3, 4, 1, 6 y 2 se obtiene

$$7 \{P(z, b)\} \text{ (resolvente de 2 y 4) y}$$

$$8 \{\neg P(f(x), x), P(b, f(b))\} \text{ (resolvente de 2 y 1).}$$

La cláusula 7 subsume a la 2 y a la 4.

Al resolver 7 con 3, 1, 6 y 7 se obtiene

$$9 \{P(b, f(b))\} \text{ (resolvente de 7 y 1)}$$

La cláusula 9 subsume a la 8

Al resolver 9 con 3, 1, 6, 7 y 9 no se obtiene resolventes.

Al resolver 5 con 3, 1, 6, 7, 9 y 5 se obtiene

10 $\{\neg P(x, a)\}$ (resolvente de 5 y 7) *La cláusula 10 subsume a la 5*

Por tanto, el saturado es

1 $\{\neg P(a, x), P(b, f(x))\}$

3 $\{P(a, f(a))\}$

6 $\{P(b, f(f(a)))\}$

7 $\{P(z, b)\}$

9 $\{P(b, f(b))\}$

10 $\{\neg P(x, a)\}$

El universo de Herbrand es $UH = \{a, f(a), f(f(a)), \dots, b, f(b), f(f(b)), \dots\}$ y un modelo de Herbrand es $I = \{P(a, f(a)), P(b, f(f(a))), P(b, f(b)), P(z, b) : z \in UH\}$

Ejercicio 25 Consideremos los siguientes hechos acerca de la sucesión de los integrantes de la monarquía inglesa:

1. El primogénito de un rey hereda la corona de dicho rey.
2. Si alguien derrota a un rey entonces hereda su corona.
3. Si alguien hereda la corona de un rey entonces se convierte en rey.
4. Enrique VIII era el primogénito de Enrique VII.
5. Ricardo III era rey y Enrique VII derrotó a Ricardo III.

Se pide:

(a) Formalizar los enunciados anteriores en un lenguaje de primer orden usando los símbolos de predicado: $D(x, y)$: x derrota a y , $H(x, y)$: x hereda la corona de y , $R(x)$: x es rey, $P(x, y)$: x es el primogénito de y . Las constantes a, b, c denotarán, respectivamente, a Ricardo III, Enrique VII y Enrique VIII.

(b) A partir de la información anterior, probar, mediante resolución, que Enrique VIII fue rey.

Solución:

Solución del apartado (a) La formalización del problema es:

1. El primogénito de un rey hereda la corona de dicho rey:
 $(\forall x)(\forall y)[R(y) \wedge P(x, y) \rightarrow H(x, y)].$
2. Si alguien derrota a un rey entonces hereda su corona:
 $(\forall x)(\forall y)[D(x, y) \wedge R(y) \rightarrow H(x, y)].$
3. Si alguien hereda la corona de un rey entonces se convierte en rey :
 $(\forall x)[(\exists y)[R(y) \wedge H(x, y)] \rightarrow R(x)].$
4. Enrique VIII era el primogénito de Enrique VII:
 $P(c, b).$

5. Ricardo III era rey y Enrique VII derrotó a Ricardo III:

$$R(a) \wedge D(b, a).$$

Solución del apartado (b) Resolución:

Para realizar la refutación tenemos que formalizar la negación de la conclusión y obtener las correspondientes formas clausales.

La formalización de la negación de la conclusión es $\neg R(c)$.

Las cláusulas correspondientes a los hechos y a la negación de la conclusión son

- 1 $\{\neg R(y), \neg P(x, y), H(x, y)\}$
- 2 $\{\neg D(x, y), \neg R(y), H(x, y)\}$
- 3 $\{\neg R(y), \neg H(x, y), R(x)\}$
- 4 $\{P(c, b)\}$
- 5 $\{R(a)\}$
- 6 $\{D(b, a)\}$
- 7 $\{\neg R(c)\}$

Una refutación es

- | | | |
|----|--|-----------------------|
| 1 | $\{\neg R(y), \neg P(x, y), H(x, y)\}$ | |
| 2 | $\{\neg D(x, y), \neg R(y), H(x, y)\}$ | |
| 3 | $\{\neg R(y), \neg H(x, y), R(x)\}$ | |
| 4 | $\{P(c, b)\}$ | |
| 5 | $\{R(a)\}$ | |
| 6 | $\{D(b, a)\}$ | |
| 7 | $\{\neg R(c)\}$ | |
| 8 | $\{\neg R(y), \neg H(c, y)\}$ | Resolvente 7.1 y 3.3 |
| 9 | $\{\neg R(y), \neg P(c, y)\}$ | Resolvente 8.2 y 1.3 |
| 10 | $\{\neg R(b)\}$ | Resolvente 9.2 y 4.1 |
| 11 | $\{\neg R(y), \neg H(b, y)\}$ | Resolvente 10.1 y 3.3 |
| 12 | $\{\neg H(b, a)\}$ | Resolvente 11.1 y 5.1 |
| 13 | $\{\neg D(b, a), \neg R(a)\}$ | Resolvente 12.1 y 2.3 |
| 14 | $\{\neg R(a)\}$ | Resolvente 13.1 y 6.1 |
| 15 | \square . | Resolvente 14.1 y 5.1 |

Examen de Diciembre de 2003

Ejercicio 26 Sean F y G las siguientes fórmulas:

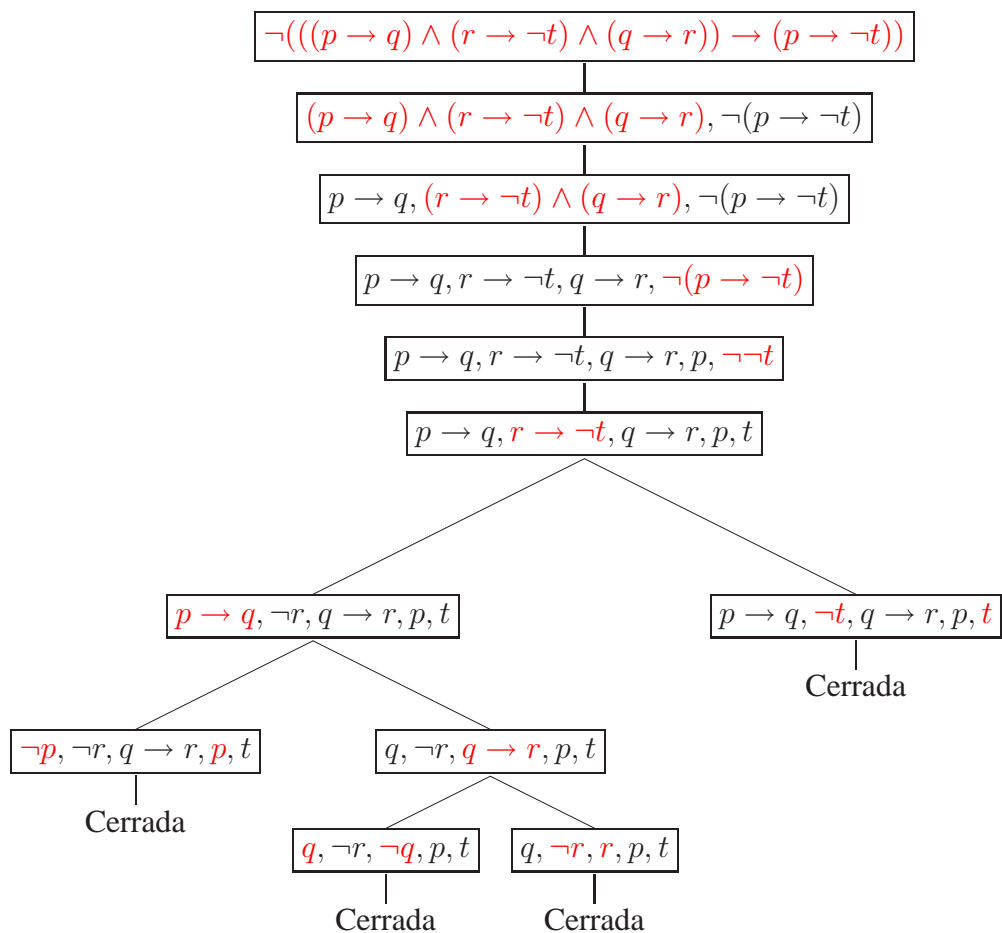
$$F : (p \rightarrow q) \wedge ((r \rightarrow \neg t) \wedge (q \rightarrow r))$$

$$G : \neg(\neg t \leftrightarrow (\neg t \wedge p)) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg t)$$

1. Pruébese mediante un tablero semántico que $F \rightarrow (p \rightarrow \neg t)$ es una tautología.
2. Utilizando una forma normal, pruébese que G es satisfactible.
3. Pruébese mediante resolución que $\{F, G\} \models r \rightarrow p$.

Solución:

Solución del apartado 1: El tablero semántico de $\neg(F \rightarrow (p \rightarrow \neg t))$ es



Al ser todas las hojas cerradas, $F \rightarrow (p \rightarrow \neg t)$ es una tautología.

Solución del apartado 2: Demostraremos la satisfactibilidad de G calculando una FND (forma normal disyuntiva) de G :

$$\begin{aligned}
& \neg(\neg t \leftrightarrow (\neg t \wedge p)) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg t) \\
& \equiv \neg((\neg t \rightarrow (\neg t \wedge p)) \wedge ((\neg t \wedge p) \rightarrow \neg t)) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg t) & \text{[por (1)]} \\
& \equiv \neg\neg((\neg\neg t \vee (\neg t \wedge p)) \wedge (\neg(\neg t \wedge p) \vee \neg t)) \vee \neg(\neg p \vee \neg t) & \text{[por (2)]} \\
& \equiv ((t \vee (\neg t \wedge p)) \wedge (\neg(\neg t \wedge p) \vee \neg t)) \vee \neg(\neg p \vee \neg t) & \text{[por (5)]} \\
& \equiv ((t \vee (\neg t \wedge p)) \wedge ((\neg\neg t \vee \neg p) \vee \neg t)) \vee (\neg\neg p \wedge \neg\neg t) & \text{[por (3) y (4)]} \\
& \equiv ((t \vee (\neg t \wedge p)) \wedge ((t \vee \neg p) \vee \neg t)) \vee (p \wedge t) & \text{[por (5)]} \\
& \equiv ((t \vee (\neg t \wedge p)) \wedge \mathbf{V}) \vee (p \wedge t) \\
& \equiv t \vee (\neg t \wedge p) \vee (p \wedge t)
\end{aligned}$$

Por tanto, G es satisfacible y tiene dos modelos principales: v_1 tal que $v_1(t) = 1$ y v_2 tal que $v_2(t) = 0$ y $v_2(p) = 1$.

Solución del apartado 3: En primer lugar, calculamos las formas clausales:

$$\begin{aligned}
& (p \rightarrow q) \wedge ((r \rightarrow \neg t) \wedge (q \rightarrow r)) \\
& \equiv (\neg p \vee q) \wedge ((\neg r \vee \neg t) \wedge (\neg q \vee r)) & \text{[por (2)]} \\
& \equiv \{\{\neg p, q\}, \{\neg r, \neg t\}, \{\neg q, r\}\} \\
& \neg(\neg t \leftrightarrow (\neg t \wedge p)) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg t) \\
& \equiv (t \vee (\neg t \wedge p)) \vee (p \wedge t) & \text{[por el apartado anterior]} \\
& \equiv ((t \vee \neg t) \wedge (t \vee p)) \vee (p \wedge t) & \text{[por (6)]} \\
& \equiv (\mathbf{V} \wedge (t \vee p)) \vee (p \wedge t) \\
& \equiv (t \vee p) \vee (p \wedge t) \\
& \equiv (t \vee p \vee p) \wedge (t \vee p \vee t) & \text{[por (6)]} \\
& \equiv \{\{t, p\}\} \\
& \neg(r \rightarrow p) \\
& \equiv \neg(\neg r \vee p) & \text{[por (2)]} \\
& \equiv \neg\neg r \wedge \neg p & \text{[por (4)]} \\
& \equiv r \wedge \neg p & \text{[por (5)]} \\
& \equiv \{\{r\}, \{\neg p\}\}
\end{aligned}$$

Una resolución de las cláusulas obtenidas es

- 1 $\{\neg p, q\}$
- 2 $\{\neg r, \neg t\}$
- 3 $\{\neg q, r\}$
- 4 $\{t, p\}$
- 5 $\{r\}$
- 6 $\{\neg p\}$
- 7 $\{\neg t\}$ Resolvente de 2 y 5
- 8 $\{p\}$ Resolvente de 7 y 4
- 9 \square Resolvente de 8 y 6

Ejercicio 27 Consideremos el lenguaje de primer orden $L = \{a, f, P, Q, R\}$ y el conjunto de fórmulas de L

$$S = \{ (\forall x)[Q(x) \rightarrow R(x)], \\ (\forall x)(\forall y)[P(x, y) \rightarrow P(y, x)], \\ (\forall x)\neg P(x, x), \\ (\forall x)[P(f(x), x) \rightarrow Q(f(x))], \\ (\forall x)[R(x) \leftrightarrow P(x, f(x))], \\ Q(f(a)) \}$$

1. Defínase razonadamente un modelo \mathcal{I} de S cuyo universo sea $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
2. Pruébese utilizando un modelo de Herbrand que $S \not\models (\forall x)[R(x) \rightarrow Q(x)]$.
3. Pruébese mediante resolución que $S \models (\forall x)[R(x) \rightarrow R(f(x))]$.

Solución:

Solución del apartado 1: Tenemos que encontrar una estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ de L , con $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, que sea modelo de las 6 fórmulas de S :

$$F_1 : (\forall x)[Q(x) \rightarrow R(x)], \\ F_2 : (\forall x)(\forall y)[P(x, y) \rightarrow P(y, x)], \\ F_3 : (\forall x)\neg P(x, x), \\ F_4 : (\forall x)[P(f(x), x) \rightarrow Q(f(x))], \\ F_5 : (\forall x)[R(x) \leftrightarrow P(x, f(x))], \\ F_6 : Q(f(a))$$

Calculamos las consecuencias básicas de las fórmulas anteriores con sus argumentos limitados a los 5 primeros elementos del universo de Herbrand de L ; es decir, $a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), f(f(f(f(a))))$ y $f(f(f(f(f(a))))$)

$F_7 : R(f(a))$	[de F_6 y F_1]
$F_8 : P(f(a), f(f(a)))$	[de F_7 y F_5]
$F_9 : P(f(f(a)), f(a))$	[de F_8 y F_2]
$F_{10} : Q(f(f(a)))$	[de F_9 y F_4]
$F_{11} : R(f(f(a)))$	[de F_{10} y F_1]
$F_{12} : P(f(f(a)), f(f(f(a))))$	[de F_{11} y F_5]
$F_{13} : P(f(f(f(a))), f(f(a)))$	[de F_{12} y F_2]
$F_{14} : Q(f(f(f(a))))$	[de F_{13} y F_4]
$F_{15} : R(f(f(f(a))))$	[de F_{14} y F_1]
$F_{16} : P(f(f(f(a))), f(f(f(f(a))))$	[de F_{15} y F_5]
$F_{17} : P(f(f(f(f(a))), f(f(f(a))))$	[de F_{16} y F_2]
$F_{18} : Q(f(f(f(f(a))))$	[de F_{17} y F_4]
$F_{19} : R(f(f(f(f(a))))$	[de F_{18} y F_1]
$F_{20} : P(f(f(f(f(a))), f(f(f(f(f(a))))$	[de F_{19} y F_5]
$F_{21} : P(f(f(f(f(f(a))), f(f(f(f(a))))$	[de F_{20} y F_2]
$F_{22} : Q(f(f(f(f(f(a))))$	[de F_{21} y F_4]
$F_{23} : R(f(f(f(f(f(a))))$	[de F_{22} y F_1]

Las consecuencias anteriores, ordenadas, son:

$P(f(a), f(f(a)))$
 $P(f(f(a)), f(a))$
 $P(f(f(a)), f(f(f(a))))$
 $P(f(f(f(a))), f(f(a)))$
 $P(f(f(f(a))), f(f(f(f(a))))$
 $P(f(f(f(f(a))))$
 $P(f(f(f(f(a))))$
 $P(f(f(f(f(a))))$
 $P(f(f(f(f(f(a))))$
 $P(f(f(f(f(f(a))))$
 $Q(f(a))$
 $Q(f(f(a)))$
 $Q(f(f(f(a))))$
 $Q(f(f(f(f(a))))$
 $Q(f(f(f(f(f(a))))$
 $R(f(a))$
 $R(f(f(a)))$
 $R(f(f(f(a))))$
 $R(f(f(f(f(a))))$
 $R(f(f(f(f(f(a))))$

Un modelo de las consecuencias es

$$\begin{aligned}
 a^I &= 1, \\
 f^I &= \{(1, 2), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1)\}, \\
 P^I &= \{(1, 2), (2, 1)\}, \\
 Q^I &= \{1, 2\}, \\
 R^I &= \{1, 2\}
 \end{aligned}$$

que puede comprobarse fácilmente que es un modelo de S .

Solución del apartado 2: El universo de Herbrand de L es $\text{UH} = \{a, f(a), f(f(a)), \dots\}$. Un modelo de Herbrand de S en el que no se cumple la fórmula $(\forall x)[R(x) \rightarrow Q(x)]$ es

$$I = \{P(x, f(x)), P(f(x), x), Q(f(x)), R(x) : x \in \text{UH}\}.$$

Vamos a comprobarlo,

- $I \models (\forall x)[Q(x) \rightarrow R(x)]$, ya que R se cumple para todos los elementos de UH .
- $I \models (\forall x)(\forall y)[P(x, y) \rightarrow P(y, x)]$, ya que en P es simétrica en I .
- $I \models (\forall x)\neg P(x, x)$, ya que todas las ocurrencias de P en I tiene sus dos argumentos distintos.
- $I \models (\forall x)[P(f(x), x) \rightarrow Q(f(x))]$, ya que para todo $x \in \text{UH}$, $Q(f(x)) \in I$.
- $I \models (\forall x)[R(x) \leftrightarrow P(x, f(x))]$, ya que $R(x)$ y $P(x, f(x))$ se verifican en I para todo $x \in \text{UH}$.
- $I \models Q(f(a))$, ya que $Q(f(a)) \in \text{UH}$.
- $I \not\models (\forall x)[R(x) \rightarrow Q(x)]$, ya que $R(a) \in \text{UH}$ pero $Q(a) \notin \text{UH}$.

Solución del apartado 3: En primer lugar, calculamos las formas clausales de las fórmulas de S y de la negación de $(\forall x)[R(x) \rightarrow R(f(x))]$:

$F_1 : (\forall x)[Q(x) \rightarrow R(x)]$	
$\equiv (\forall x)[\neg Q(x) \vee R(x)]$	[por (2)]
$\equiv \{\{\neg Q(x), R(x)\}\}$	
$F_2 : (\forall x)(\forall y)[P(x, y) \rightarrow P(y, x)]$	
$\equiv (\forall x)(\forall y)[\neg P(x, y) \vee P(y, x)]$	[por (2)]
$\equiv \{\{\neg P(x, y), P(y, x)\}\}$	
$F_3 : (\forall x)\neg P(x, x)$	
$\equiv \{\{\neg P(x, x)\}\}$	
$F_4 : (\forall x)[P(f(x), x) \rightarrow Q(f(x))]$	
$\equiv (\forall x)[\neg P(f(x), x) \vee Q(f(x))]$	[por (2)]
$\equiv \{\{\neg P(f(x), x), Q(f(x))\}\}$	
$F_5 : (\forall x)[R(x) \leftrightarrow P(x, f(x))]$	
$\equiv (\forall x)[(R(x) \rightarrow P(x, f(x))) \wedge (P(x, f(x)) \rightarrow R(x))]$	[por (1)]
$\equiv (\forall x)[(\neg R(x) \vee P(x, f(x))) \wedge (\neg P(x, f(x)) \vee R(x))]$	[por (2)]
$\equiv \{\{\neg R(x), P(x, f(x))\}, \{\neg P(x, f(x)), R(x)\}\}$	
$F_6 : Q(f(a))$	
$\equiv \{\{Q(f(a))\}\}$	
$\equiv \neg(\forall x)[R(x) \rightarrow R(f(x))]$	
$\equiv \neg(\forall x)[\neg R(x) \vee R(f(x))]$	[por (2)]
$\equiv (\exists x)\neg(\neg R(x) \vee R(f(x)))$	[por (8)]
$\equiv (\exists x)(\neg\neg R(x) \wedge \neg R(f(x)))$	[por (6)]
$\equiv (\exists x)(R(x) \wedge \neg R(f(x)))$	[por (7)]
$\equiv_{sat} R(b) \wedge \neg R(f(b))$	[b constante de Skolem]
$\equiv_{sat} \{\{R(b)\}, \{\neg R(f(b))\}\}$	

Una resolución de las cláusulas obtenidas es

1	$\{\neg Q(x), R(x)\}$	
2	$\{\neg P(x, y), P(y, x)\}$	
3	$\{\neg P(x, x)\}$	
4	$\{\neg P(f(x), x), Q(f(x))\}$	
5	$\{\neg R(x), P(x, f(x))\}$	
6	$\{\neg P(x, f(x)), R(x)\}$	
7	$\{R(b)\}$	
8	$\{\neg R(f(b))\}$	
9	$\{\neg Q(f(b))\}$	Resolvente de 8 y 1
10	$\{P(b, f(b))\}$	Resolvente de 7 y 5
11	$\{P(f(b), b)\}$	Resolvente de 10 y 2
12	$\{Q(f(b))\}$	Resolvente de 11 y 4
13	\square	Resolvente de 12 y 9

Ejercicio 28 Hállense formas prenexa, de Skolem y clausal de la siguiente fórmula:

$$(\forall x)[(\exists z)P(z) \rightarrow Q(x)] \rightarrow ((\forall z)A(y, z) \rightarrow (\exists u)B(y, u))$$

Solución:

1.– Forma prenexa:

$$\begin{aligned}
& (\forall x)[(\exists z)P(z) \rightarrow Q(x)] \rightarrow ((\forall z)A(y, z) \rightarrow (\exists u)B(y, u)) \\
\equiv & (\forall x)[(\exists z)P(z) \rightarrow Q(x)] \rightarrow ((\forall v)A(y, v) \rightarrow (\exists u)B(y, u)) && \text{[por rectificación]} \\
\equiv & \neg(\forall x)[\neg(\exists z)P(z) \vee Q(x)] \vee (\neg(\forall v)A(y, v) \vee (\exists u)B(y, u)) && \text{[por (2)]} \\
\equiv & (\exists x)[\neg(\neg(\exists z)P(z) \vee Q(x))] \vee ((\exists v)\neg A(y, v) \vee (\exists u)B(y, u)) && \text{[por (8)]} \\
\equiv & (\exists x)[\neg\neg(\exists z)P(z) \wedge \neg Q(x)] \vee ((\exists v)\neg A(y, v) \vee (\exists u)B(y, u)) && \text{[por (6)]} \\
\equiv & (\exists x)[(\exists z)P(z) \wedge \neg Q(x)] \vee ((\exists v)\neg A(y, v) \vee (\exists u)B(y, u)) && \text{[por (7)]} \\
\equiv & (\exists x)(\exists z)(\exists v)(\exists u)[(P(z) \wedge \neg Q(x)) \vee (\neg A(y, v) \vee B(y, u))] && \text{[por (11)–(18)]}
\end{aligned}$$

2.– Forma de Skolem:

$$\begin{aligned}
& (\forall x)[(\exists z)P(z) \rightarrow Q(x)] \rightarrow ((\forall z)A(y, z) \rightarrow (\exists u)B(y, u)) \\
\equiv_{sat} & (\exists y)[(\forall x)[(\exists z)P(z) \rightarrow Q(x)] \rightarrow ((\forall z)A(y, z) \rightarrow (\exists u)B(y, u))] && \text{[cierre existencial]} \\
\equiv & (\exists y)(\exists x)(\exists z)(\exists v)(\exists u)[(P(z) \wedge \neg Q(x)) \vee (\neg A(y, v) \vee B(y, u))] && \text{[por anterior]} \\
\equiv & (P(c) \wedge \neg Q(b)) \vee (\neg A(a, d) \vee B(a, e)) && \text{[constantes de Skolem]}
\end{aligned}$$

3.– Forma clausal

$$\begin{aligned}
& (\forall x)[(\exists z)P(z) \rightarrow Q(x)] \rightarrow ((\forall z)A(y, z) \rightarrow (\exists u)B(y, u)) \\
\equiv_{sat} & (P(c) \wedge \neg Q(b)) \vee (\neg A(a, d) \vee B(a, e)) && \text{[anterior]} \\
\equiv & (P(c) \vee (\neg A(a, d) \vee B(a, e))) \wedge (\neg Q(b) \vee (\neg A(a, d) \vee B(a, e))) && \text{[por (20)]} \\
\equiv & \{\{P(c), \neg A(a, d), B(a, e)\}, \{\neg Q(b), \neg A(a, d), B(a, e)\}\}
\end{aligned}$$

Examen de Junio de 2004

Ejercicio 29 Probar $(E \vee F) \rightarrow G \models (E \rightarrow G) \wedge (F \rightarrow G)$

(a) Mediante deducción natural.

(b) Por resolución.

Solución:

Solución del apartado (a): Demostración por deducción natural:

1	$(E \vee F) \rightarrow G$	premisa
2	E	supuesto
3	$E \vee F$	$\vee I2$
4	G	$\rightarrow \mathcal{E}1, 3$
5	$E \rightarrow G$	$\rightarrow I2 - 4$
6	F	supuesto
7	$E \vee F$	$\vee I6$
8	G	$\rightarrow \mathcal{E}1, 7$
9	$F \rightarrow G$	$\rightarrow I6 - 8$
10	$(E \rightarrow G) \wedge (F \rightarrow G)$	$\wedge I5, 9$

Solución del apartado (b): Demostración por resolución: En primer lugar se transforma la premisa a forma clausal:

$$\begin{aligned}
 & (E \vee F) \rightarrow G \\
 \equiv & \neg(E \vee F) \vee G && [\text{por (2)}] \\
 \equiv & (\neg E \wedge \neg F) \vee G && [\text{por (4)}] \\
 \equiv & (\neg E \vee G) \wedge (\neg F \vee G) && [\text{por (7)}] \\
 \equiv & \{\{\neg E, G\}, \{\neg F, G\}\}
 \end{aligned}$$

A continuación, se transforma la negación de la conclusión a forma clausal:

$$\begin{aligned}
 & \neg((E \rightarrow G) \wedge (F \rightarrow G)) \\
 \equiv & \neg((\neg E \vee G) \wedge (\neg F \vee G)) && [\text{por (2)}] \\
 \equiv & \neg(\neg E \vee G) \vee \neg(\neg F \vee G) && [\text{por (3)}] \\
 \equiv & (\neg\neg E \wedge \neg G) \vee (\neg\neg F \wedge \neg G) && [\text{por (4)}] \\
 \equiv & (E \wedge \neg G) \vee (F \wedge \neg G) && [\text{por (5)}] \\
 \equiv & ((E \wedge \neg G) \vee F) \wedge ((E \wedge \neg G) \vee \neg G) && [\text{por (6)}] \\
 \equiv & ((E \vee F) \wedge (\neg G \vee F)) \wedge ((E \vee \neg G) \wedge (\neg G \vee \neg G)) && [\text{por (7)}] \\
 \equiv & \{\{E, F\}, \{\neg G, F\}, \{E, \neg G\}, \{\neg G\}\}
 \end{aligned}$$

Finalmente, se construye una refutación de las cláusulas obtenidas:

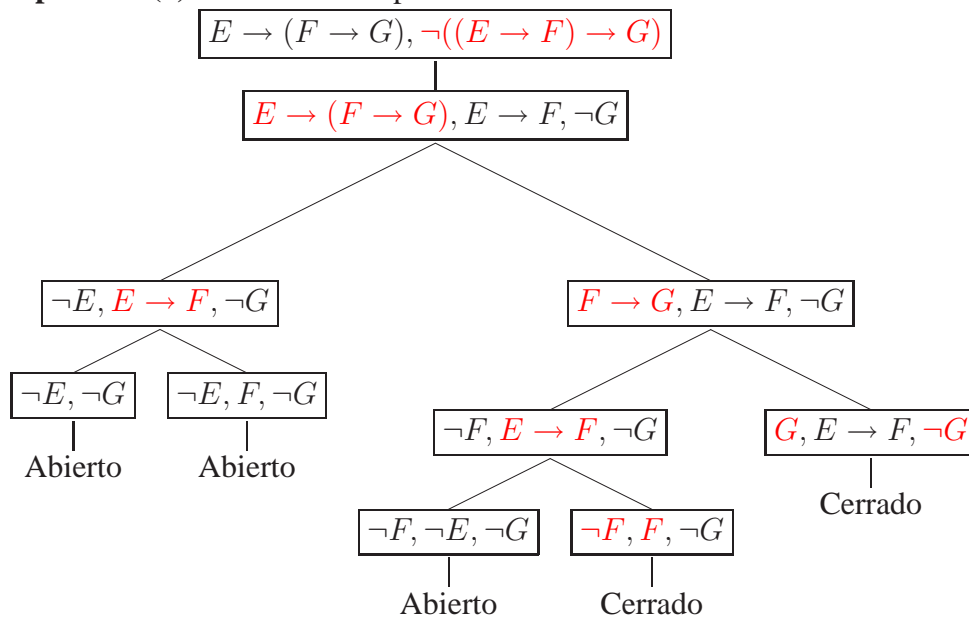
1	$\{\neg E, G\}$	
2	$\{\neg F, G\}$	
3	$\{E, F\}$	
4	$\{\neg G, F\}$	
5	$\{E, \neg G\}$	
6	$\{\neg G\}$	
7	$\{\neg E\}$	Resolvente de 1 y 6
8	$\{\neg F\}$	Resolvente de 2 y 6
9	$\{F\}$	Resolvente de 3 y 7
10	\square	Resolvente de 8 y 9

Ejercicio 30 *El ejercicio tiene tres apartados.*

- (a) *Pruébese que $E \rightarrow (F \rightarrow G) \not\models (E \rightarrow F) \rightarrow G$ mediante tableros semánticos.*
- (b) *Descríbanse todos los modelos de $E \rightarrow (F \rightarrow G)$ que no son modelos de $(E \rightarrow F) \rightarrow G$.*
- (c) *La fórmula $E \rightarrow (F \rightarrow G) \rightarrow (E \rightarrow F) \rightarrow G$, ¿es una tautología? Razónese la respuesta.*

Solución:

Solución del apartado (a): Demostración por tableros semánticos:



Solución del apartado (b): Los modelos de $E \rightarrow (F \rightarrow G)$ que no son modelos de la fórmula $(E \rightarrow F) \rightarrow G$ son los modelos de las hojas abiertas del árbol anterior; es decir, cualquier valoración v tal que $v(E) = 0$ y $v(G) = 0$.

Solución del apartado (c): La fórmula $E \rightarrow (F \rightarrow G) \rightarrow (E \rightarrow F) \rightarrow G$ no es una tautología, porque si lo fuera se tendría que $E \rightarrow (F \rightarrow G) \models (E \rightarrow F) \rightarrow G$ en contradicción con el apartado (a).

Ejercicio 31 *Sea L un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado, Q , (de aridad 2) y un símbolo de función, f , (de aridad 1). Se considera la estructura \mathcal{I} dada por: Universo: $\{a, b\}$, $Q^{\mathcal{I}} =$*

$\{(a, b), (b, a)\}$, $f^I(a) = a$ y $f^I(b) = a$. Decidir cuáles de las siguientes fórmulas se satisfacen en la estructura:

1. $(\forall x)[Q(f(x), x) \rightarrow Q(x, x)]$
2. $(\exists x)[Q(f(x), x) \rightarrow Q(x, x)]$

Solución:**Solución para la primera fórmula:**

$$\mathcal{I}((\forall x)[Q(f(x), x) \rightarrow Q(x, x)]) = \mathbf{V} \Leftrightarrow \mathcal{I}_{[x/a]}(Q(f(x), x) \rightarrow Q(x, x)) = \mathbf{V} \text{ y } \mathcal{I}_{[x/b]}(Q(f(x), x) \rightarrow Q(x, x)) = \mathbf{V}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{[x/a]}(Q(f(x), x) \rightarrow Q(x, x)) &= Q^I(f^I(a), a) \rightarrow Q^I(a, a) = \\ &= Q^I(a, a) \rightarrow Q^I(a, a) = \\ &= \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F} = \\ &= \mathbf{V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{[x/b]}(Q(f(x), x) \rightarrow Q(x, x)) &= Q^I(f^I(b), b) \rightarrow Q^I(b, b) = \\ &= Q^I(a, b) \rightarrow Q^I(b, b) = \\ &= \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{F} = \\ &= \mathbf{F} \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathcal{I}((\forall x)[Q(f(x), x) \rightarrow Q(x, x)]) = \mathbf{F}$

Solución para la segunda fórmula:

$$\mathcal{I}((\exists x)[Q(f(x), x) \rightarrow Q(x, x)]) = \mathbf{V} \Leftrightarrow \mathcal{I}_{[x/a]}(Q(f(x), x) \rightarrow Q(x, x)) = \mathbf{V} \text{ ó } \mathcal{I}_{[x/b]}(Q(f(x), x) \rightarrow Q(x, x)) = \mathbf{V}$$

$$\mathcal{I}_{[x/a]}(Q(f(x), x) \rightarrow Q(x, x)) = \mathbf{V}$$

Por tanto, $\mathcal{I}((\exists x)[Q(f(x), x) \rightarrow Q(x, x)]) = \mathbf{V}$

Ejercicio 32 *Sabemos que*

1. Cualquiera que estudie lo suficiente aprueba todas las asignaturas.
2. Cuando alguien que celebra su cumpleaños en julio ha aprobado todas las asignaturas, se le obsequia con un regalo.
3. Quien recibe un regalo sin estudiar lo suficiente, nunca es obsequiado con un móvil.
4. Pablo es un alumno que, a pesar de no estudiar lo suficiente, recibió un móvil como regalo.

Se pide:

- (a) Formalizar los conocimientos anteriores teniendo en cuenta que los predicados del texto se representan así: $C(x)$ = “ x celebra su cumpleaños en julio”; $A(x)$ = “ x ha aprobado todas las asignaturas”; $S(x)$ = “ x estudia lo suficiente”; $R(x, y)$ = “ x recibe el regalo y ”. Y las constantes a y b representan respectivamente a Pablo y al móvil.
- (b) Obtener el conjunto de cláusulas de las fórmulas anteriores y probar que es inconsistente dando un subconjunto de su extensión de Herbrand que lo sea.

(c) Probar, mediante resolución, que el enunciado “Si Pablo recibe un móvil como regalo, entonces ha aprobado todas las asignaturas” es consecuencia lógica de los enunciados 1 y 3.

Solución:

Solución del apartado (a): Formalización del discurso:

$$\begin{aligned} F_1 &: (\forall x)[S(x) \rightarrow A(x)] \\ F_2 &: (\forall x)[C(x) \wedge A(x) \rightarrow (\exists y)R(x, y)] \\ F_3 &: (\forall x)[(\exists y)R(x, y) \wedge \neg S(x) \rightarrow \neg R(x, b)] \\ F_4 &: \neg S(a) \wedge R(a, b) \end{aligned}$$

Solución del apartado (b.1): Cálculo del conjunto de cláusulas de las fórmulas anteriores:

$$\begin{aligned} F_1 &: (\forall x)[S(x) \rightarrow A(x)] \\ \equiv & (\forall x)[\neg S(x) \vee A(x)] \quad [\text{por (4)}] \\ \equiv & \{\{\neg S(x), A(x)\}\} \quad [\text{por (4)}] \\ \\ F_2 &: (\forall x)[C(x) \wedge A(x) \rightarrow (\exists y)R(x, y)] \\ \equiv & (\forall x)[\neg(C(x) \wedge A(x)) \vee (\exists y)R(x, y)] \quad [\text{por (4)}] \\ \equiv & (\forall x)[(\neg C(x) \vee \neg A(x)) \vee (\exists y)R(x, y)] \quad [\text{por (5)}] \\ \equiv & (\forall x)(\exists y)[\neg C(x) \vee \neg A(x) \vee R(x, y)] \quad [\text{por (18)}] \\ \equiv_{\text{sat}} & (\forall x)[\neg C(x) \vee \neg A(x) \vee R(x, f(x))] \quad [f \text{ función de Skolem}] \\ \equiv & \{\{\neg C(x), \neg A(x), R(x, f(x))\}\} \\ \\ F_3 &: (\forall x)[(\exists y)R(x, y) \wedge \neg S(x) \rightarrow \neg R(x, b)] \\ \equiv & (\forall x)[\neg((\exists y)R(x, y) \wedge \neg S(x)) \vee \neg R(x, b)] \quad [\text{por (4)}] \\ \equiv & (\forall x)[(\neg(\exists y)R(x, y) \vee \neg\neg S(x)) \vee \neg R(x, b)] \quad [\text{por (5)}] \\ \equiv & (\forall x)[\neg(\exists y)R(x, y) \vee S(x) \vee \neg R(x, b)] \quad [\text{por (7)}] \\ \equiv & (\forall x)[((\forall y)\neg R(x, y) \vee S(x)) \vee \neg R(x, b)] \quad [\text{por (9)}] \\ \equiv & (\forall x)[(\forall y)[\neg R(x, y) \vee S(x)] \vee \neg R(x, b)] \quad [\text{por (12)}] \\ \equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg R(x, y) \vee S(x) \vee \neg R(x, b)] \quad [\text{por (12)}] \\ \equiv & \{\{\neg R(x, y), S(x), \neg R(x, b)\}\} \\ \\ F_4 &: \neg S(a) \wedge R(a, b) \\ \equiv & \{\{\neg S(a)\}, \{R(a, b)\}\} \end{aligned}$$

Solución del apartado (b.2): Demostración de la inconsistencia del conjunto de cláusulas:

$$\begin{aligned} 1 & \{\neg S(x), A(x)\} \\ 2 & \{\neg C(x), \neg A(x), R(x, f(x))\} \\ 3 & \{\neg R(x, y), S(x), \neg R(x, b)\} \\ 4 & \{\neg S(a)\} \\ 5 & \{R(a, b)\} \\ 6 & \{S(a)\} && \text{Resolvente de 3 y 5 con } \sigma_1 = [x/a, y/b] \\ 7 & \square && \text{Resolvente de 6 y 4 con } \sigma_2 = \epsilon \end{aligned}$$

Por tanto, un subconjunto de su extensión de Herbrand inconsistente es el formado por

$$C_3\sigma_1 = \{\neg R(a, b), S(a)\}$$

$$C_5\sigma_1 = \{R(a, b)\}$$

$$C_4\sigma_2 = \{\neg S(a)\}$$

Solución del apartado (c): La formalización de la conclusión es

$$R(a, b) \rightarrow A(a)$$

La forma clausal de su negación es

$$\{\{R(a, b)\}, \{\neg A(a)\}\}$$

La demostración por resolución es

$$1 \quad \{\neg S(x), A(x)\}$$

$$2 \quad \{\neg R(x, y), S(x), \neg R(x, b)\}$$

$$3 \quad \{R(a, b)\}$$

$$4 \quad \{\neg A(a)\}$$

$$5 \quad \{S(a)\}$$

$$6 \quad \{A(a)\}$$

$$6 \quad \square$$

Resolvente de 3 y 5 con $\sigma = [x/a, y/b]$

Resolvente de 5 y 1 con $\sigma = [x/a]$

Resolvente de 6 y 4 con $\sigma_2 = \epsilon$

Examen de Septiembre de 2004

Ejercicio 33 En un texto de Lewis Carroll, el tío Jorge y el tío Jaime discuten acerca de la barbería del pueblo, atendida por tres barberos: Alberto, Benito y Carlos. Los dos tíos aceptan las siguientes premisas:

1. Si Carlos no está en la barbería, entonces ocurrirá que si tampoco está Alberto, Benito tendrá que estar para atender el establecimiento.
2. Si Alberto no está, tampoco estará Benito.

El tío Jorge concluye de todo esto que Carlos no puede estar ausente, mientras que el tío Jaime afirma que sólo puede concluirse que Carlos y Alberto no pueden estar ausentes a la vez. Decidir con el método de los tableros semánticos cuál de los dos tiene razón.

Solución:

En la representación del problema usaremos los siguientes símbolos proposicionales

- a representa que Alberto está en la barbería
- b representa que Benito está en la barbería
- c representa que Carlos está en la barbería

Luego,

- $\neg a$ representa que Alberto está ausente
- $\neg b$ representa que Benito está ausente
- $\neg c$ representa que Carlos está ausente

Con dicha notación, la representación de la primera premisa es

$$\neg c \rightarrow (\neg a \rightarrow b)$$

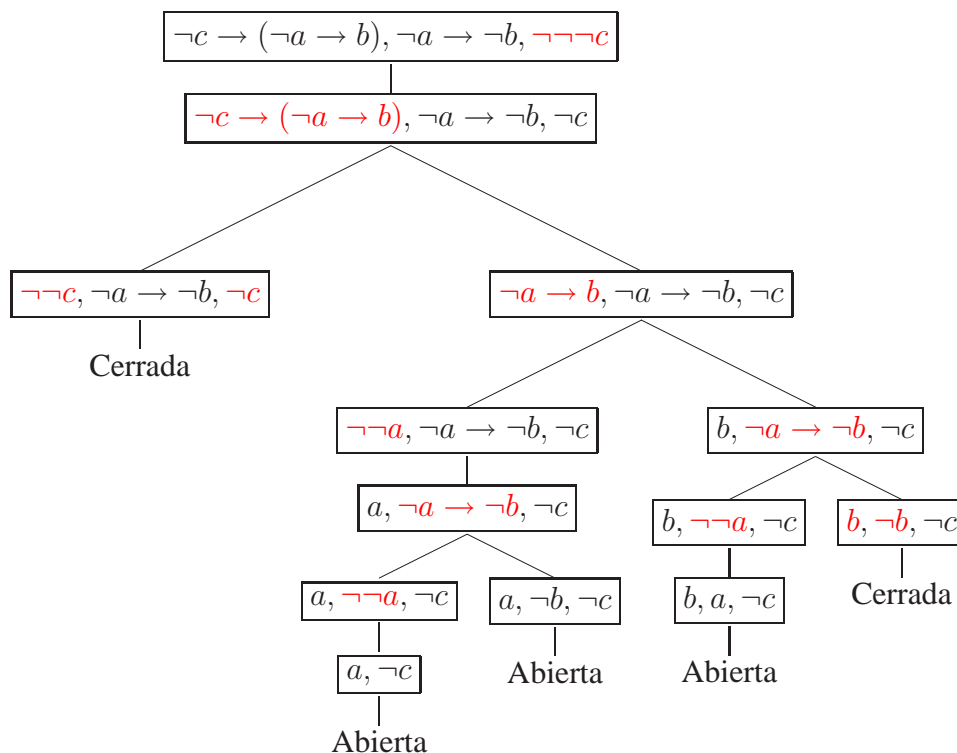
y la de la segunda es

$$\neg a \rightarrow \neg b$$

La representación de la conclusión del tío Jorge es $\neg \neg c$. Por tanto, el tío Jorge tiene razón si

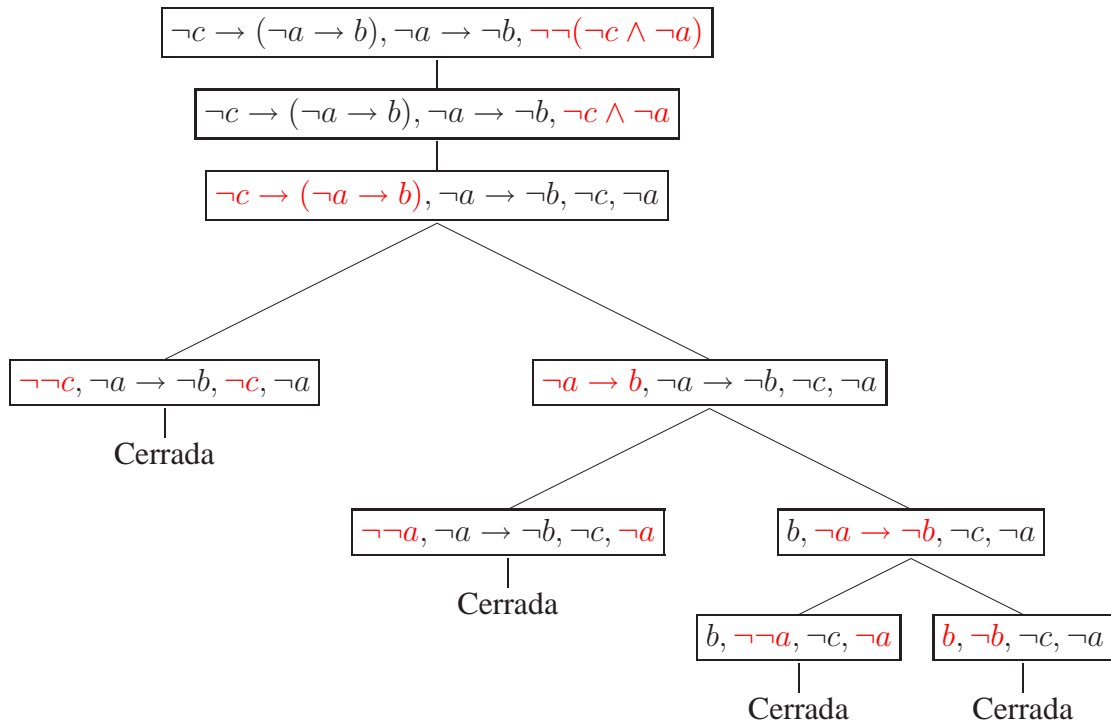
$$\{\neg c \rightarrow (\neg a \rightarrow b), \neg a \rightarrow \neg b\} \models \neg \neg c$$

o, equivalentemente, si $\{\neg c \rightarrow (\neg a \rightarrow b), \neg a \rightarrow \neg b, \neg \neg c\}$ es inconsistente. Puesto que el árbol



no es cerrado, el conjunto $\{\neg c \rightarrow (\neg a \rightarrow b), \neg a \rightarrow \neg b, \neg c\}$ es consistente (por ejemplo, es posible que Alberto esté en la barbería y Carlos no esté). Por tanto, el tío Jorge no tiene razón.

La representación de la conclusión del tío Jaime es $\neg(\neg c \wedge \neg a)$. Por tanto, el tío Jaime tiene razón si $\{\neg c \rightarrow (\neg a \rightarrow b), \neg a \rightarrow \neg b\} \models \neg(\neg c \wedge \neg a)$ o, equivalentemente, si $\{\neg c \rightarrow (\neg a \rightarrow b), \neg a \rightarrow \neg b, \neg\neg(\neg c \wedge \neg a)\}$ es inconsistente. Puesto que el árbol



es cerrado, el conjunto $\{\neg c \rightarrow (\neg a \rightarrow b), \neg a \rightarrow \neg b, \neg\neg(\neg c \wedge \neg a)\}$ es inconsistente. Por tanto, el tío Jaime tiene razón.

Ejercicio 34 Probar que la fórmula $(E \rightarrow (F \wedge G)) \rightarrow (E \rightarrow F) \vee (E \rightarrow G)$ es una tautología

- (a) Mediante deducción natural.
- (b) Usando formas normales.
- (c) Por tableros semánticos.

Solución:

Solución del apartado (a): Deducción natural:

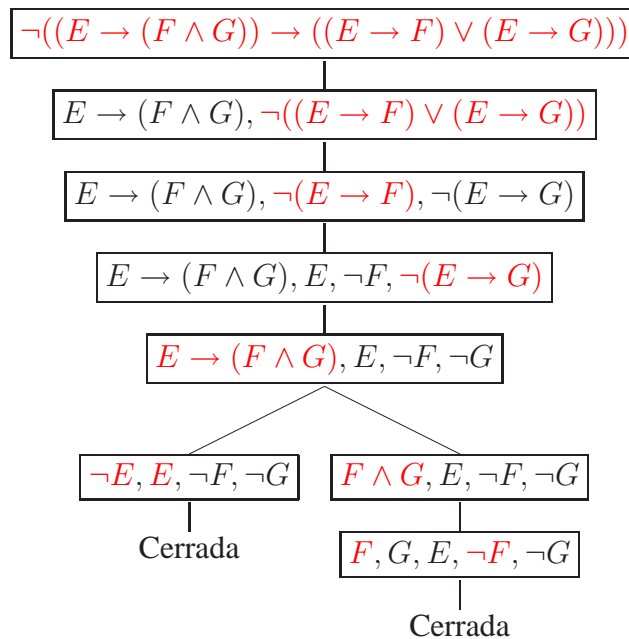
1	$(E \rightarrow (F \wedge G))$	supuesto
2	E	supuesto
3	$F \wedge G$	$\rightarrow\mathcal{E}1, 2$
4	F	$\wedge\mathcal{E}3$
5	$E \rightarrow F$	$\rightarrow\mathcal{I}2 - 4$
6	$(E \rightarrow F) \vee (E \rightarrow G)$	$\vee\mathcal{I}5$
7	$(E \rightarrow (F \wedge G)) \rightarrow (E \rightarrow F) \vee (E \rightarrow G)$	$\rightarrow\mathcal{I}1 - 6$

Solución del apartado (b): Forma normal conjuntiva:

$$\begin{aligned}
 & (E \rightarrow (F \wedge G)) \rightarrow (E \rightarrow F) \vee (E \rightarrow G) \\
 \equiv & \neg(\neg E \vee (F \wedge G)) \vee (\neg E \vee F) \vee (\neg E \vee G) && [\text{por (2)}] \\
 \equiv & (\neg\neg E \wedge \neg(F \wedge G)) \vee (\neg E \vee F) \vee (\neg E \vee G) && [\text{por (4)}] \\
 \equiv & (E \wedge (\neg F \vee \neg G)) \vee (\neg E \vee F) \vee (\neg E \vee G) && [\text{por (3) y (5)}] \\
 \equiv & (E \wedge (\neg F \vee \neg G)) \vee (\neg E \vee F \vee G) \\
 \equiv & (E \vee (\neg E \vee F \vee G)) \wedge ((\neg F \vee \neg G) \vee (\neg E \vee F \vee G)) && [\text{por (7)}] \\
 \equiv & (E \vee \neg E \vee F \vee G) \wedge (\neg F \vee \neg G \vee \neg E \vee F \vee G)
 \end{aligned}$$

Puesto que en cada una de las dos conjunciones hay un par de literales complementarios, la fórmula es una tautología.

Solución del apartado (c): Tablero semántico:



Ejercicio 35 Probar la inconsistencia del conjunto de fórmulas:

$$U = \{\neg E \rightarrow F \vee G, E \rightarrow F \vee G, G \rightarrow F, F \rightarrow E, E \rightarrow \neg F\}$$

(a) Demostrando que no tiene modelos.

(b) Por resolución

Solución:

Solución del apartado (a): Cálculo de modelos de U

E	F	G	$\neg E \rightarrow F \vee G$	$E \rightarrow F \vee G$	$G \rightarrow F$	$F \rightarrow E$	$E \rightarrow \neg F$
1	1	1					0
1	1	0					0
1	0	1			0		
1	0	0		0			
0	1	1				0	
0	1	0				0	
0	0	1			0		
0	0	0	0				

Puesto que cada una de las 8 interpretaciones falsifica alguna fórmula de U , el conjunto U no tiene modelos.

Solución del apartado (b): Las formas clausales de las fórmulas de U son

$$\begin{aligned} & \neg E \rightarrow F \vee G \\ \equiv & \neg \neg E \vee F \vee G \quad [\text{por (2)}] \\ \equiv & E \vee F \vee G \quad [\text{por (5)}] \\ \equiv & \{\{E, F, G\}\} \\ & E \rightarrow F \vee G \\ \equiv & \neg E \vee F \vee G \quad [\text{por (2)}] \\ \equiv & \{\{\neg E, F, G\}\} \\ & G \rightarrow F \\ \equiv & \neg G \vee F \quad [\text{por (2)}] \\ \equiv & \{\{\neg G, F\}\} \\ & F \rightarrow E \\ \equiv & \neg F \vee E \quad [\text{por (2)}] \\ \equiv & \{\{\neg F, E\}\} \\ & E \rightarrow \neg F \\ \equiv & \neg E \vee \neg F \quad [\text{por (2)}] \\ \equiv & \{\{\neg E, \neg F\}\} \end{aligned}$$

Una refutación de U por resolución es

- 1 $\{E, F, G\}$
- 2 $\{\neg E, F, G\}$
- 3 $\{\neg G, F\}$
- 4 $\{\neg F, E\}$
- 5 $\{\neg E, \neg F\}$
- 6 $\{\neg F\}$ Resolvente de 4 y 5
- 7 $\{\neg G\}$ Resolvente de 6 y 3
- 8 $\{E, G\}$ Resolvente de 1 y 6
- 9 $\{E\}$ Resolvente de 8 y 7
- 10 $\{F, G\}$ Resolvente de 2 y 10
- 11 $\{G\}$ Resolvente de 10 y 6
- 12 \square Resolvente de 11 y 7

Ejercicio 36 Sea L un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado P de aridad 2.

(a) Probar que las fórmulas $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$ y $(\exists x)(\forall y)P(x, y)$ no son equivalentes dando una estructura que sea modelo de la primera pero no de la segunda.

(b) En la estructura M cuyo universo es $|M| = \{a, b, c\}$ y $P^M = \{(a, a), (a, b), (a, c)\}$, ¿cuáles de las siguientes fórmulas se satisfacen y cuáles no?

1. $(\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\exists x)(\forall y)P(x, y)$
2. $(\exists x)(\forall y)P(x, y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x, y)$
3. $\neg[(\forall x)(\exists y)P(x, y) \wedge (\exists x)(\forall y)P(x, y)]$

Solución:

Solución del apartado (a): Basta encontrar un modelo de Herbrand de

$$S = \{(\forall x)(\exists y)P(x, y), \neg(\exists x)(\forall y)P(x, y)\}$$

Para ello calculamos una forma clausal del conjunto anterior

$$\begin{aligned} & (\forall x)(\exists y)P(x, y) \\ \equiv_{sat} & (\forall x)P(x, f(x)) \quad [f \text{ función de Skolem}] \\ \equiv & \{\{P(x, f(x))\}\} \\ & \neg(\exists x)(\forall y)P(x, y) \\ \equiv & (\forall x)(\exists y)\neg P(x, y) \\ \equiv_{sat} & (\forall x)\neg P(x, g(x)) \quad [g \text{ función de Skolem}] \\ \equiv & \{\{\neg P(x, g(x))\}\} \end{aligned}$$

Una forma clausal de S es $\{\{P(x, f(x))\}, \{\neg P(x, g(x))\}\}$.

El universo de Herbrand de S es $\text{UH}(S) = \{a, f(a), f(f(a)), \dots, g(a), g(g(a)), \dots\}$. Un modelo de Herbrand de S es $\mathcal{I} = \{P(x, f(x)) : x \in \text{UH}(S)\}$.

Solución del apartado (b.1):

$$\mathcal{M}((\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\exists x)(\forall y)P(x, y)) = H_{\rightarrow}(\mathcal{M}((\forall x)(\exists y)P(x, y)), \mathcal{M}((\exists x)(\forall y)P(x, y))) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}((\forall x)(\exists y)P(x, y)) = \mathbf{V} & \iff \mathcal{M}_{[x/a]}((\exists y)P(x, y)) = \mathbf{V} \text{ y} \\ & \mathcal{M}_{[x/b]}((\exists y)P(x, y)) = \mathbf{V} \text{ y} \\ & \mathcal{M}_{[x/c]}((\exists y)P(x, y)) = \mathbf{V} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{[x/b]}((\exists y)P(x, y)) = \mathbf{V} & \iff \mathcal{M}_{[x/b, y/a]}(P(x, y)) = \mathbf{V} \text{ o} \\ & \mathcal{M}_{[x/b, y/b]}(P(x, y)) = \mathbf{V} \text{ o} \\ & \mathcal{M}_{[x/b, y/c]}(P(x, y)) = \mathbf{V} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\mathcal{M}_{[x/b, y/a]}(P(x, y)) = P^M(b, a) = \mathbf{F} \quad (4)$$

$$\mathcal{M}_{[x/b, y/b]}(P(x, y)) = P^M(b, b) = \mathbf{F} \quad (5)$$

$$\mathcal{M}_{[x/b, y/c]}(P(x, y)) = P^M(b, c) = \mathbf{F} \quad (6)$$

De (3), (4), (5) y (6) se tiene

$$\mathcal{M}_{[x/b]}((\exists y)P(x, y)) = F \quad (7)$$

De (7) y (2) se tiene

$$\mathcal{M}((\forall x)(\exists y)P(x, y)) = F \quad (8)$$

De (8) y (1) se tiene

$$\mathcal{M}((\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\exists x)(\forall y)P(x, y)) = V$$

Solución del apartado (b.2):

$$\mathcal{M}((\exists x)(\forall y)P(x, y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x, y)) = H_{\rightarrow}(\mathcal{M}((\exists x)(\forall y)P(x, y)), \mathcal{M}((\forall x)(\exists y)P(x, y))) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}((\exists x)(\forall y)P(x, y)) = V &\iff \mathcal{M}_{[x/a]}((\forall y)P(x, y)) = V \text{ o} \\ &\mathcal{M}_{[x/b]}((\forall y)P(x, y)) = V \text{ o} \\ &\mathcal{M}_{[x/c]}((\forall y)P(x, y)) = V \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{[x/a]}((\forall y)P(x, y)) = V &\iff \mathcal{M}_{[x/a, y/a]}(P(x, y)) = V \text{ y} \\ &\mathcal{M}_{[x/a, y/b]}(P(x, y)) = V \text{ y} \\ &\mathcal{M}_{[x/a, y/c]}(P(x, y)) = V \end{aligned} \quad (11)$$

$$\mathcal{M}_{[x/a, y/a]}(P(x, y)) = P^M(a, a) = V \quad (12)$$

$$\mathcal{M}_{[x/a, y/b]}(P(x, y)) = P^M(a, b) = V \quad (13)$$

$$\mathcal{M}_{[x/a, y/c]}(P(x, y)) = P^M(a, c) = V \quad (14)$$

De (11), (12), (13) y (14) se tiene

$$\mathcal{M}_{[x/a]}((\forall y)P(x, y)) = V \quad (15)$$

De (10) y (15) se tiene

$$\mathcal{M}((\exists x)(\forall y)P(x, y)) = V \quad (16)$$

De (9), (16) y (8) se tiene

$$\mathcal{M}((\exists x)(\forall y)P(x, y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x, y)) = H_{\rightarrow}(V, F) = F$$

Solución del apartado (b.3):

$$\begin{aligned} &\mathcal{M}(\neg[(\forall x)(\exists y)P(x, y) \wedge (\exists x)(\forall y)P(x, y)]) \\ &= H_{\neg}(\mathcal{M}((\forall x)(\exists y)P(x, y) \wedge (\exists x)(\forall y)P(x, y))) \\ &= H_{\neg}(H_{\wedge}(\mathcal{M}((\forall x)(\exists y)P(x, y)), \mathcal{M}((\exists x)(\forall y)P(x, y)))) \\ &= H_{\neg}(H_{\wedge}(F, V)) && \text{[por (8) y (16)]} \\ &= H_{\neg}(F) \\ &= V \end{aligned}$$

Ejercicio 37 Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones se cumplen. Para ello, dar una prueba por resolución y otra por deducción natural de cada una de las válidas y calcular un modelo de Herbrand de las que no lo son.

1. $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \models (\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$
2. $(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \models (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$
3. $(\exists x)[P(x) \wedge Q(x)] \models (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$

Solución:

Solución del apartado (1): Para decidir si $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \models (\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$, basta comprobar si $S = \{(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x), \neg(\forall x)[P(x) \vee Q(x)]\}$ es inconsistente. Comprobaremos la inconsistencia de S por resolución. Para ello, comenzamos calculando una forma clausal de S .

$$\begin{aligned}
 & (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \\
 \equiv & (\forall x)P(x) \vee (\forall y)Q(y) \\
 \equiv & (\forall x)(\forall y)[P(x) \vee Q(y)] \\
 \equiv & \{\{P(x), Q(y)\}\} \\
 & \neg(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \\
 \equiv & (\exists x)\neg(P(x) \vee Q(x)) \\
 \equiv & (\exists x)[\neg P(x) \wedge \neg Q(x)] \\
 \equiv_{sat} & \neg P(a) \wedge \neg Q(a) \\
 \equiv & \{\{\neg P(a)\}, \{\neg Q(a)\}\}
 \end{aligned}$$

Una demostración por resolución de S es

- 1 $\{P(x), Q(y)\}$
- 2 $\{\neg P(a)\}$
- 3 $\{\neg Q(a)\}$
- 4 $\{Q(a)\}$ Resolvente de 1 y 2
- 5 \square Resolvente de 3 y 4

La demostración por deducción natural se muestra en la figura 4 (67).

Solución del apartado (2): Para decidir si $(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \models (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$ basta comprobar si $S = \{(\forall x)[P(x) \vee Q(x)], \neg((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x))\}$ es inconsistente. Comprobaremos la inconsistencia de S por resolución. Para ello, comenzamos calculando una forma clausal de S .

$$\begin{aligned}
 & (\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \\
 \equiv & \{\{P(x), Q(x)\}\} \\
 & \neg((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)) \\
 \equiv & \neg((\forall x)P(x) \vee (\forall y)Q(y)) \\
 \equiv & \neg(\forall x)P(x) \wedge \neg(\forall y)Q(y) \\
 \equiv & (\exists x)\neg P(x) \wedge (\exists y)\neg Q(y) \\
 \equiv & (\exists x)(\exists y)[\neg P(x) \wedge \neg Q(y)] \\
 \equiv_{sat} & \neg P(a) \wedge \neg Q(b) \quad [a \text{ y } b \text{ constantes de Skolem}] \\
 \equiv & \{\{\neg P(a)\}, \{\neg Q(b)\}\}
 \end{aligned}$$

Las cláusulas de la forma clausal de S son:

1	$(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$	premisa
2	$\forall xP(x)$	supuesto
3	actual i	supuesto
4	$P(i)$	$\forall\mathcal{E}2, 3$
5	$P(i) \vee Q(i)$	$\vee\mathcal{I}4$
6	$(\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$	$\forall\mathcal{I}3 - 5$
7	$\forall xQ(x)$	supuesto
8	actual j	supuesto
9	$P(j)$	$\forall\mathcal{E}7, 8$
10	$P(j) \vee Q(j)$	$\vee\mathcal{I}9$
11	$(\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$	$\forall\mathcal{I}7 - 10$
12	$(\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$	$\forall\mathcal{E}1, 2 - 6, 7 - 11$

Figura 4: Deducción natural del ejercicio 5.1

- 1 $\{P(x), Q(x)\}$
- 2 $\{\neg P(a)\}$
- 3 $\{\neg Q(b)\}$

Veamos el proceso de saturación por resolución:

Al resolver 2 con 2 no se obtiene resolvente.

Al resolver 3 con 2 y 3 no se obtiene resolvente.

Al resolver 1 con 2, 3 y 1 se obtiene

4 $\{Q(a)\}$ (resolvente de 1 y 2)

5 $\{P(b)\}$ (resolvente de 1 y 3)

Al resolver 4 con 2, 3, 1 y 4 no se obtiene resolvente.

Al resolver 5 con 2, 3, 1, 4 y 5 no se obtiene resolvente.

Al no obtenerse la cláusula vacía, se tiene que S es consistente y, por tanto,

$$(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \not\models (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x).$$

Además, un modelo de Herbrand de S es $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{a, b\}$, $P^I = \{b\}$ y $Q^I = \{a\}$.

Solución del apartado (3): Para decidir si $(\exists x)[P(x) \wedge Q(x)] \models (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$ basta comprobar si $S = \{(\exists x)[P(x) \wedge Q(x)], \neg((\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x))\}$ es inconsistente. Comprobaremos la inconsistencia de S por resolución. Para ello, comenzamos calculando una forma clausal de S .

$$\begin{aligned} & (\exists x)[P(x) \wedge Q(x)] \\ \equiv_{sat} & P(a) \wedge Q(a) \\ \equiv & \{\{P(a)\}, \{Q(a)\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \neg((\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)) \\
\equiv & \neg((\exists x)P(x) \wedge (\exists y)Q(y)) \\
\equiv & \neg(\exists x)P(x) \vee \neg(\exists y)Q(y) \\
\equiv & (\forall x)\neg P(x) \vee (\forall y)\neg Q(y) \\
\equiv & (\forall x)(\forall y)[\neg P(x) \vee \neg Q(y)] \\
\equiv & \{\{\neg P(x), \neg Q(y)\}\}
\end{aligned}$$

Una demostración por resolución de S es

- 1 $\{P(a)\}$
- 2 $\{Q(a)\}$
- 3 $\{\neg P(x), \neg Q(y)\}$
- 4 $\{\neg Q(y)\}$ Resolvente de 1 y 3
- 5 \square Resolvente de 2 y 4

Demostración por deducción natural:

1	$(\exists x)[P(x) \wedge Q(x)]$	premisa
2	actual $i, P(i) \wedge Q(i)$	supuestos
3	$P(i)$	$\wedge\mathcal{E}2$
4	$(\exists x)P(x)$	$\exists\mathcal{I}3$
5	$Q(i)$	$\wedge\mathcal{E}2$
6	$(\exists x)Q(x)$	$\exists\mathcal{I}5$
7	$(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$	$\wedge\mathcal{I}4, 6$
8	$(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$	$\exists\mathcal{E}1, 2 - 7$

Índice alfabético

- Cálculo de modelos, 4, 19, 25
- Cálculo de modelos en LPO, 29, 35
- Cálculo de modelos por tableros, 30, 38, 44, 56
- Consecuencia en LPO, 35
- Consistencia en LPO, 41
- Construcción de modelos, 51

- Deducción natural, 55, 61
- Deducción natural en LPO, 66
- Depuración de base de conocimiento, 25

- Equivalencia en LPO, 35
- Equivalencia por tableros, 30
- Evaluación de fórmulas, 57
- Evaluación en estructuras, 64

- Forma clausal en LPO, 5, 10, 12, 15, 23, 27, 33, 40, 45, 53
- Forma normal, 7, 61
- Formalización en LPO, 10, 16, 27, 35, 40, 47, 58

- Inconsistencia por resolución, 63
- Independencia por Herbrand, 5, 15, 41, 45, 51

- Modelos de Herbrand, 29, 33, 41, 64, 66

- Resolución, 7, 14, 19, 49, 55
- Resolución básica, 33
- Resolución en LPO, 5, 10, 16, 21, 27, 40, 47, 51, 58, 66
- Resolución lineal, 4, 25, 30, 38
- Resolución por entradas, 44

- Satisfacibilidad por FND, 49
- Subconjunto de $EH(S)$ inconsistente, 58

- Tablero semánticos, 60
- Tableros semánticos, 7, 19, 38, 44, 49, 56
- Tautología por FNC, 4
- Tautología por tableros semánticos, 4, 7, 14, 25, 61