

# *Lógica informática (2005–06)*

## *Tema 2: Deducción natural proposicional*

José A. Alonso Jiménez

Grupo de Lógica Computacional

Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial

Universidad de Sevilla

# DN: Reglas de la conjunción

- Regla de introducción de la conjunción:  $\frac{F \quad G}{F \wedge G} \wedge i$
- Reglas de eliminación de la conjunción:  $\frac{F \wedge G}{F} \wedge e$      $\frac{F \wedge G}{G} \wedge e$
- Ejemplo:  $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$ :
  - 1     $p \wedge q$     premisa
  - 2     $r$             premisa
  - 3     $q$              $\wedge e$  1
  - 4     $q \wedge r$      $\wedge i$  2,3
- Adecuación de las reglas de la conjunción:
  - ▶  $\wedge i : \{F, G\} \models F \wedge G$
  - ▶  $\wedge e : F \wedge G \models F$
  - ▶  $\wedge e : F \wedge G \models G$

# DN: Reglas de la doble negación

- Regla de eliminación de la doble negación:

$$\frac{\neg\neg F}{F} \neg\neg e$$

- Regla de introducción de la doble negación:

$$\frac{F}{\neg\neg F} \neg\neg i$$

- Ejemplo:  $p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg p \wedge r$ :

1	$p$	premisa
2	$\neg\neg(q \wedge r)$	premisa
3	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 1
4	$q \wedge r$	$\neg\neg e$ 2
5	$r$	$\wedge e$ 4
6	$\neg\neg p \wedge r$	$\wedge i$ 3,5

- Adecuación de las reglas de la doble negación:

▶  $\neg\neg e : \{\neg\neg F\} \models F$

▶  $\neg\neg i : \{F\} \models \neg\neg F$

## DN: Regla de eliminación del condicional

---

- Regla de eliminación del condicional: 
$$\frac{F \quad F \rightarrow G}{G} \rightarrow e$$
- Ejemplo:  $\neg p \wedge q, \neg p \wedge q \rightarrow r \vee \neg p \vdash r \vee \neg p$ :
  - 1  $\neg p \wedge q$  premisa
  - 2  $\neg p \wedge q \rightarrow r \vee \neg p$  premisa
  - 3  $r \vee \neg p$   $\rightarrow e$  1,2
- Ejemplo:  $p, p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash r$ :
  - 1  $p$  premisa
  - 2  $p \rightarrow q$  premisa
  - 3  $p \rightarrow (q \rightarrow r)$  premisa
  - 4  $q$   $\rightarrow e$  1,2
  - 5  $q \rightarrow r$   $\rightarrow e$  1,3
  - 6  $r$   $\rightarrow e$  4,5
- Adecuación de la eliminación del condicional:  $\{F, F \rightarrow G\} \models G$

## DN: Regla derivada de modus tollens (MT)

---

- Regla derivada de modus tollens: 
$$\frac{F \rightarrow G \quad \neg G}{\neg F} MT$$

- Ejemplo:  $p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r \vdash \neg q$ :

1	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	premisa
2	$p$	premisa
3	$\neg r$	premisa
4	$q \rightarrow r$	$\rightarrow$ e 1,2
5	$\neg q$	MT 3,4

- Ejemplo:  $\neg p \rightarrow q, \neg q \vdash p$ :

1	$\neg p \rightarrow q$	premisa
2	$\neg q$	premisa
3	$\neg\neg p$	MT 1,2
4	$p$	$\neg\neg$ e 3

# DN: Regla de introducción del condicional

- Regla de introducción del condicional:

$$\frac{\begin{array}{|c|} \hline F \\ \vdots \\ G \\ \hline \end{array}}{F \rightarrow G} \rightarrow i$$

- Ejemplo:  $p \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow \neg p$ :

1	$p \rightarrow q$	premisa
2	$\neg q$	supuesto
3	$\neg p$	MT 1,2
4	$\neg q \rightarrow \neg p$	$\rightarrow i$ 2 – 3

- Adecuación de la regla de introducción del condicional:  
Si  $F \models G$ , entonces  $\models F \rightarrow G$ .

## DN: Regla de introducción del condicional

---

- Ejemplo:  $\neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow \neg\neg q$ :

1  $\neg q \rightarrow \neg p$  premisa

2	$p$	supuesto
3	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 2
4	$\neg\neg q$	MT 1,3

5  $p \rightarrow \neg\neg q$   $\rightarrow i$  2 – 4

- Ejemplo (de teorema):  $\vdash p \rightarrow p$ :

1	$p$	supuesto
---	-----	----------

2  $p \rightarrow p$   $\rightarrow i$  1 – 1

## DN: Regla de introducción del condicional

- Ejemplo:  $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$ :

1	$q \rightarrow r$	supuesto
2	$\neg q \rightarrow \neg p$	supuesto
3	$p$	supuesto
4	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 3
5	$\neg\neg q$	MT 2,4
6	$q$	$\neg\neg e$ 5
7	$r$	$\rightarrow e$ 1,6
8	$p \rightarrow r$	$\rightarrow i$ 3 – 7
9	$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r)$	$\rightarrow i$ 2 – 8
10	$(q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$	$\rightarrow i$ 1 – 9



# DN: Reglas de la disyunción

- Reglas de introducción de la disyunción:  $\frac{F}{F \vee G} \vee i_1$        $\frac{G}{F \vee G} \vee i_2$

- Regla de eliminación de la disyunción:

$$\frac{F \vee G \quad \begin{array}{|c|} \hline F \\ \hline \vdots \\ \hline H \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline G \\ \hline \vdots \\ \hline H \\ \hline \end{array}}{H} \vee e$$

- Ejemplo:  $p \vee q \vdash q \vee p$ :

1  $p \vee q$  premisa

2	$p$	supuesto
3	$q \vee p$	$\vee i$ 2

4	$q$	supuesto
5	$q \vee p$	$\vee i$ 4

6  $q \vee p$   $\vee e$  1, 2 – 3, 4 – 5

## DN: Reglas de la disyunción

- Ejemplo:  $q \rightarrow r \vdash p \vee q \rightarrow p \vee r$ :

1	$p \rightarrow r$	premisa
2	$p \vee q$	supuesto
3	$p$	supuesto
4	$p \vee r$	$\vee i$ 3
5	$q$	supuesto
6	$r$	$\rightarrow e$ 1,5
7	$p \vee r$	$\vee i$ 6
8	$p \vee r$	$\vee e$ 2,3 – 4,5 – 7
9	$p \vee q \rightarrow p \vee r$	$\rightarrow i$ 2 – 8

## DN: Regla de copia

- Ejemplo (usando la regla hyp):  $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$ :

1	$p$	supuesto
2	$q$	supuesto
3	$p$	hyp 1
4	$q \rightarrow p$	$\rightarrow i$ 2 – 3
5	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$	$\rightarrow i$ 1 – 4

## DN: Reglas de la negación

- Extensiones de la lógica para usar falso:
  - ▶ Extensión de la sintaxis:  $\perp$  es una fórmula proposicional.
  - ▶ Extensión de la semántica:  $v(\perp) = 0$  en cualquier valoración.
- Reglas de la negación:

▶ Regla de eliminación de lo falso:  $\frac{\perp}{F} \perp e$

▶ Regla de eliminación de la negación:  $\frac{F \quad \neg F}{\perp} \neg e$

- Adecuación de las reglas de la negación:
  - ▶  $\perp \models F$
  - ▶  $\{F, \neg F\} \models \perp$

## DN: Reglas de la negación

- Ejemplo:  $\neg p \vee q \vdash p \rightarrow q$ :

1  $\neg p \vee q$  premisa

2	$p$	supuesto
3	$\neg p$	supuesto
4	$\perp$	$\neg e$ 2,3
5	$q$	$\perp e$ 4
6	$q$	supuesto
7	$q$	$\vee e$ 1,3 – 5,6 – 6

8  $p \rightarrow q$   $\rightarrow i$  2 – 7

# DN: Reglas de la negación

- Regla de introducción de la negación:

$$\frac{\begin{array}{c} F \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg F} \neg\text{i}$$

- Adecuación: Si  $F \models \perp$ , entonces  $\models \neg F$ .
- Ejemplo:  $p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash \neg p$ :

1  $p \rightarrow q$  premisa

2  $p \rightarrow \neg q$  premisa

3	$p$	supuesto
4	$q$	$\rightarrow$ e 1,3
5	$\neg q$	$\rightarrow$ e 2,3
6	$\perp$	$\neg$ e 4,5

7  $\neg p$   $\neg$ i 2 – 5

## DN: Reglas del bicondicional

- Regla de introducción del bicondicional:
- Ejemplo:  $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$ :

1	$p \wedge q$	supuesto
2	$p$	$\wedge e$ 1
3	$q$	$\wedge e$ 1
4	$q \wedge p$	$\wedge i$ 2,3

$$5 \quad p \wedge q \rightarrow q \wedge p \quad \rightarrow i \ 1 - 4$$

6	$q \wedge p$	supuesto
7	$q$	$\wedge e$ 6
8	$p$	$\wedge e$ 6
9	$p \wedge q$	$\wedge i$ 7,8

$$10 \quad q \wedge p \rightarrow p \wedge q \quad \rightarrow i \ 6 - 9$$

$$11 \quad p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p \quad \leftrightarrow i \ 5, 10$$

$$\frac{F \rightarrow G \quad G \rightarrow F}{F \leftrightarrow G} \leftrightarrow i$$

# DN: Reglas del bicondicional

- Reglas de eliminación del bicondicional:  $\frac{F \leftrightarrow G}{F \rightarrow G} \leftrightarrow e_1$      $\frac{F \leftrightarrow G}{G \rightarrow F} \leftrightarrow e_2$
- Ejemplo:  $p \leftrightarrow q, p \vee q \vdash p \wedge q$ :

1     $p \leftrightarrow q$     premisa

2     $p \vee q$     premisa

3	$p$	supuesto
4	$p \rightarrow q$	$\leftrightarrow e$ 1
5	$q$	$\rightarrow e$ 4,3
6	$p \wedge q$	$\wedge i$ 3,5

7	$q$	supuesto
8	$q \rightarrow p$	$\leftrightarrow e$ 1
9	$p$	$\rightarrow e$ 8,7
10	$p \wedge q$	$\wedge i$ 7,9

11     $p \wedge q$      $\vee e$  2,3 – 6,7 – 10



## DN: Reglas derivadas: modus tollens

---

- Regla derivada de modus tollens (MT):

$$\frac{F \rightarrow G \quad \neg G}{\neg F} \text{ MT}$$

- Derivación

1  $F \rightarrow G$  premisa

2  $\neg G$  premisa

3	$F$	supuesto
4	$G$	$\rightarrow$ e 1,3
5	$\perp$	$\neg$ e 2,4

6  $\neg F$   $\neg$ i 2 – 4

# DN: Reglas derivadas: introducción de doble negación

---

- Regla de introducción de la doble negación:

$$\frac{F}{\neg\neg F} \neg\neg i$$

- Derivación:

1	$F$	premisa
2	$\neg F$	supuesto
3	$\perp$	$\neg e$ 1,2
4	$\neg\neg F$	$\neg i$ 2 – 3

# DN: Reglas derivadas: reducción al absurdo (RAA)

---

- Regla de reducción al absurdo:

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} \neg F \\ \vdots \\ \perp \end{array}}}{F} \text{ RAA}$$

- Derivación:

1  $\neg F \rightarrow \perp$  premisa

2	$\neg F$	supuesto
3	$\perp$	$\rightarrow$ e 1,2

4  $\neg\neg F$   $\neg$ i 2 – 3

5  $F$   $\neg$ e  $\neg$ 4

## DN: Reglas derivadas: ley del tercio excluido (LEM)

---

- Ley del tercio excluido (LEM):

$$\frac{}{F \vee \neg F} \text{LEM}$$

- Derivación:

1	$\neg(F \vee \neg F)$	supuesto
2	$F$	supuesto
3	$F \vee \neg F$	$\vee i$ 2
4	$\perp$	$\neg e$ 1,3
5	$\neg F$	$\neg i$ 2 – 4
6	$F \vee \neg F$	$\vee i$ 5
7	$\perp$	$\neg e$ 1,6
8	$F \vee \neg F$	RAA 1 – 7

## DN: Reglas derivadas: ley del tercio excluido (LEM)

---

- Ejemplo:  $p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$ :

1  $p \rightarrow q$  premisa

2  $p \vee \neg p$  LEM

3	$p$	supuesto
---	-----	----------

4	$q$	$\rightarrow$ e 1,3
---	-----	---------------------

5	$\neg p \vee q$	$\vee$ i 4
---	-----------------	------------

6	$\neg p$	supuesto
---	----------	----------

7	$\neg p \vee q$	$\vee$ i 6
---	-----------------	------------

8  $\neg p \vee q$   $\vee$ e 2,3 – 5,6 – 7

# DN: Reglas de deducción natural

- Reglas de deducción natural:

	Introducción	Eliminación
$\wedge$	$\frac{F \quad G}{F \wedge G} \wedge i$	$\frac{F \wedge G}{F} \wedge e_1 \quad \frac{F \wedge G}{G} \wedge e_2$
$\vee$	$\frac{F}{F \vee G} \vee i_1 \quad \frac{G}{F \vee G} \vee i_2$	$\frac{F \vee G \quad \begin{array}{ c } \hline F \\ \hline \vdots \\ \hline H \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{ c } \hline G \\ \hline \vdots \\ \hline H \\ \hline \end{array}}{H} \vee e$
$\rightarrow$	$\frac{\begin{array}{ c } \hline F \\ \hline \vdots \\ \hline G \\ \hline \end{array}}{F \rightarrow G} \rightarrow i$	$\frac{F \quad F \rightarrow G}{G} \rightarrow e$

# DN: Reglas de deducción natural

- Reglas de deducción natural:

	Introducción	Eliminación
$\neg$	$\frac{\boxed{\begin{array}{c} F \\ \vdots \\ \perp \end{array}}}{\neg F} \neg i$	$\frac{F \quad \neg F}{\perp} \neg e$
$\perp$		$\frac{\perp}{F} \perp e$
$\neg\neg$		$\frac{\neg\neg F}{F} \neg\neg e$
$\leftrightarrow$	$\frac{F \rightarrow G \quad G \rightarrow F}{F \leftrightarrow G} \leftrightarrow i$	$\frac{F \leftrightarrow G}{F \rightarrow G} \leftrightarrow e_1 \quad \frac{F \leftrightarrow G}{G \rightarrow F} \leftrightarrow e_2$

- Adecuación y completitud del cálculo de deducción natural.

# Bibliografía

---

1. C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal*. (Ariel, 2000).  
Cap. 16: Cálculo deductivo.
2. R. Bornat *Using ItL Jape with X* (Department of Computer Science, QMW, 1998).
3. J.A. Díez *Iniciación a la Lógica*, (Ariel, 2002).  
Cap. 4: Cálculo deductivo. Deducibilidad.
4. M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems*. (Cambridge University Press, 2000)  
Cap. 1: Propositional logic.
5. E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003)  
Cap. 3.6: El método de la deducción natural.