

Lógica informática (2005–06)

Tema 2: Deducción natural proposicional

José A. Alonso Jiménez

Grupo de Lógica Computacional

Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial

Universidad de Sevilla

DN: Reglas de la conjunción

- Regla de introducción de la conjunción: $\frac{F \quad G}{F \wedge G} \wedge i$
- Reglas de eliminación de la conjunción: $\frac{F \wedge G}{F} \wedge e$ $\frac{F \wedge G}{G} \wedge e$
- Ejemplo: $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$:
 - 1 $p \wedge q$ premisa
 - 2 r premisa
 - 3 q $\wedge e$ 1
 - 4 $q \wedge r$ $\wedge i$ 2,3
- Adecuación de las reglas de la conjunción:
 - ▶ $\wedge i : \{F, G\} \models F \wedge G$
 - ▶ $\wedge e : F \wedge G \models F$
 - ▶ $\wedge e : F \wedge G \models G$

DN: Reglas de la doble negación

- Regla de eliminación de la doble negación:

$$\frac{\neg\neg F}{F} \neg\neg e$$

- Regla de introducción de la doble negación:

$$\frac{F}{\neg\neg F} \neg\neg i$$

- Ejemplo: $p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg p \wedge r$:

1	p	premisa
2	$\neg\neg(q \wedge r)$	premisa
3	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 1
4	$q \wedge r$	$\neg\neg e$ 2
5	r	$\wedge e$ 4
6	$\neg\neg p \wedge r$	$\wedge i$ 3,5

- Adecuación de las reglas de la doble negación:

▶ $\neg\neg e : \{\neg\neg F\} \models F$

▶ $\neg\neg i : \{F\} \models \neg\neg F$

DN: Regla de eliminación del condicional

- Regla de eliminación del condicional:
$$\frac{F \quad F \rightarrow G}{G} \rightarrow e$$
- Ejemplo: $\neg p \wedge q, \neg p \wedge q \rightarrow r \vee \neg p \vdash r \vee \neg p$:
 - 1 $\neg p \wedge q$ premisa
 - 2 $\neg p \wedge q \rightarrow r \vee \neg p$ premisa
 - 3 $r \vee \neg p$ $\rightarrow e$ 1,2
- Ejemplo: $p, p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash r$:
 - 1 p premisa
 - 2 $p \rightarrow q$ premisa
 - 3 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ premisa
 - 4 q $\rightarrow e$ 1,2
 - 5 $q \rightarrow r$ $\rightarrow e$ 1,3
 - 6 r $\rightarrow e$ 4,5
- Adecuación de la eliminación del condicional: $\{F, F \rightarrow G\} \models G$

DN: Regla derivada de modus tollens (MT)

- Regla derivada de modus tollens:
$$\frac{F \rightarrow G \quad \neg G}{\neg F} MT$$

- Ejemplo: $p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r \vdash \neg q$:

1	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	premisa
2	p	premisa
3	$\neg r$	premisa
4	$q \rightarrow r$	\rightarrow e 1,2
5	$\neg q$	MT 3,4

- Ejemplo: $\neg p \rightarrow q, \neg q \vdash p$:

1	$\neg p \rightarrow q$	premisa
2	$\neg q$	premisa
3	$\neg\neg p$	MT 1,2
4	p	$\neg\neg$ e 3

DN: Regla de introducción del condicional

- Regla de introducción del condicional:

$$\frac{\begin{array}{|c|} \hline F \\ \vdots \\ G \\ \hline \end{array}}{F \rightarrow G} \rightarrow i$$

- Ejemplo: $p \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow \neg p$:

1	$p \rightarrow q$	premisa
2	$\neg q$	supuesto
3	$\neg p$	MT 1,2
4	$\neg q \rightarrow \neg p$	$\rightarrow i$ 2 – 3

- Adecuación de la regla de introducción del condicional:
Si $F \models G$, entonces $\models F \rightarrow G$.

DN: Regla de introducción del condicional

- Ejemplo: $\neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow \neg\neg q$:

1 $\neg q \rightarrow \neg p$ premisa

2	p	supuesto
3	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 2
4	$\neg\neg q$	MT 1,3

5 $p \rightarrow \neg\neg q$ $\rightarrow i$ 2 – 4

- Ejemplo (de teorema): $\vdash p \rightarrow p$:

1	p	supuesto
---	-----	----------

2 $p \rightarrow p$ $\rightarrow i$ 1 – 1

DN: Regla de introducción del condicional

- Ejemplo: $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$:

1	$q \rightarrow r$	supuesto
2	$\neg q \rightarrow \neg p$	supuesto
3	p	supuesto
4	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 3
5	$\neg\neg q$	MT 2,4
6	q	$\neg\neg e$ 5
7	r	$\rightarrow e$ 1,6
8	$p \rightarrow r$	$\rightarrow i$ 3 – 7
9	$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r)$	$\rightarrow i$ 2 – 8
10	$(q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$	$\rightarrow i$ 1 – 9

DN: Reglas de la disyunción

- Reglas de introducción de la disyunción: $\frac{F}{F \vee G} \vee i_1$ $\frac{G}{F \vee G} \vee i_2$

- Regla de eliminación de la disyunción:

$$\frac{F \vee G \quad \begin{array}{|c|} \hline F \\ \hline \vdots \\ \hline H \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline G \\ \hline \vdots \\ \hline H \\ \hline \end{array}}{H} \vee e$$

- Ejemplo: $p \vee q \vdash q \vee p$:

1	$p \vee q$	premisa
2	p	supuesto
3	$q \vee p$	$\vee i 2$
4	q	supuesto
5	$q \vee p$	$\vee i 4$
6	$q \vee p$	$\vee e 1, 2 - 3, 4 - 5$

DN: Reglas de la disyunción

- Ejemplo: $q \rightarrow r \vdash p \vee q \rightarrow p \vee r$:

1	$p \rightarrow r$	premisa
2	$p \vee q$	supuesto
3	p	supuesto
4	$p \vee r$	$\vee i$ 3
5	q	supuesto
6	r	$\rightarrow e$ 1,5
7	$p \vee r$	$\vee i$ 6
8	$p \vee r$	$\vee e$ 2,3 – 4,5 – 7
9	$p \vee q \rightarrow p \vee r$	$\rightarrow i$ 2 – 8

DN: Regla de copia

- Ejemplo (usando la regla hyp): $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$:

1	p	supuesto
2	q	supuesto
3	p	hyp 1
4	$q \rightarrow p$	$\rightarrow i$ 2 – 3
5	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$	$\rightarrow i$ 1 – 4

DN: Reglas de la negación

- Extensiones de la lógica para usar falso:
 - ▶ Extensión de la sintaxis: \perp es una fórmula proposicional.
 - ▶ Extensión de la semántica: $v(\perp) = 0$ en cualquier valoración.
- Reglas de la negación:

▶ Regla de eliminación de lo falso: $\frac{\perp}{F} \perp e$

▶ Regla de eliminación de la negación: $\frac{F \quad \neg F}{\perp} \neg e$

- Adecuación de las reglas de la negación:
 - ▶ $\perp \models F$
 - ▶ $\{F, \neg F\} \models \perp$

DN: Reglas de la negación

- Ejemplo: $\neg p \vee q \vdash p \rightarrow q$:

1 $\neg p \vee q$ premisa

2	p	supuesto
3	$\neg p$	supuesto
4	\perp	$\neg e$ 2,3
5	q	$\perp e$ 4
6	q	supuesto
7	q	$\vee e$ 1,3 – 5,6 – 6

8 $p \rightarrow q$ $\rightarrow i$ 2 – 7

DN: Reglas de la negación

- Regla de introducción de la negación:

$$\frac{\begin{array}{c} F \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg F} \neg\text{i}$$

- Adecuación: Si $F \models \perp$, entonces $\models \neg F$.
- Ejemplo: $p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash \neg p$:

1 $p \rightarrow q$ premisa

2 $p \rightarrow \neg q$ premisa

3	p	supuesto
4	q	\rightarrow e 1,3
5	$\neg q$	\rightarrow e 2,3
6	\perp	\neg e 4,5

7 $\neg p$ \neg i 2-5

DN: Reglas del bicondicional

- Regla de introducción del bicondicional:
- Ejemplo: $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$:

1	$p \wedge q$	supuesto
2	p	$\wedge e$ 1
3	q	$\wedge e$ 1
4	$q \wedge p$	$\wedge i$ 2,3

$$5 \quad p \wedge q \rightarrow q \wedge p \quad \rightarrow i \ 1 - 4$$

6	$q \wedge p$	supuesto
7	q	$\wedge e$ 6
8	p	$\wedge e$ 6
9	$p \wedge q$	$\wedge i$ 7,8

$$10 \quad q \wedge p \rightarrow p \wedge q \quad \rightarrow i \ 6 - 9$$

$$11 \quad p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p \quad \leftrightarrow i \ 5, 10$$

$$\frac{F \rightarrow G \quad G \rightarrow F}{F \leftrightarrow G} \leftrightarrow i$$

DN: Reglas del bicondicional

- Reglas de eliminación del bicondicional: $\frac{F \leftrightarrow G}{F \rightarrow G} \leftrightarrow e_1$ $\frac{F \leftrightarrow G}{G \rightarrow F} \leftrightarrow e_2$
- Ejemplo: $p \leftrightarrow q, p \vee q \vdash p \wedge q$:

1 $p \leftrightarrow q$ premisa

2 $p \vee q$ premisa

3	p	supuesto
---	-----	----------

4	$p \rightarrow q$	$\leftrightarrow e$ 1
---	-------------------	-----------------------

5	q	$\rightarrow e$ 4, 3
---	-----	----------------------

6	$p \wedge q$	$\wedge i$ 3, 5
---	--------------	-----------------

7	q	supuesto
---	-----	----------

8	$q \rightarrow p$	$\leftrightarrow e$ 1
---	-------------------	-----------------------

9	p	$\rightarrow e$ 8, 7
---	-----	----------------------

10	$p \wedge q$	$\wedge i$ 7, 9
----	--------------	-----------------

11 $p \wedge q$ $\vee e$ 2, 3 – 6, 7 – 10

DN: Reglas derivadas: modus tollens

- Regla derivada de modus tollens (MT):

$$\frac{F \rightarrow G \quad \neg G}{\neg F} \text{ MT}$$

- Derivación

1 $F \rightarrow G$ premisa

2 $\neg G$ premisa

3	F	supuesto
4	G	\rightarrow e 1,3
5	\perp	\neg e 2,4

6 $\neg F$ \neg i 2 – 4

DN: Reglas derivadas: introducción de doble negación

- Regla de introducción de la doble negación:

$$\frac{F}{\neg\neg F} \neg\neg i$$

- Derivación:

1	F	premisa
2	$\neg F$	supuesto
3	\perp	$\neg e$ 1,2
4	$\neg\neg F$	$\neg i$ 2 – 3

DN: Reglas derivadas: reducción al absurdo (RAA)

- Regla de reducción al absurdo:

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} \neg F \\ \vdots \\ \perp \end{array}}}{F} \text{ RAA}$$

- Derivación:

1 $\neg F \rightarrow \perp$ premisa

2	$\neg F$	supuesto
3	\perp	\rightarrow e 1,2

4 $\neg\neg F$ \neg i 2 – 3

5 F \neg e \neg 4

DN: Reglas derivadas: ley del tercio excluido (LEM)

- Ley del tercio excluido (LEM):

$$\frac{}{F \vee \neg F} \text{LEM}$$

- Derivación:

1	$\neg(F \vee \neg F)$	supuesto
2	F	supuesto
3	$F \vee \neg F$	$\vee i$ 2
4	\perp	$\neg e$ 1,3
5	$\neg F$	$\neg i$ 2 – 4
6	$F \vee \neg F$	$\vee i$ 5
7	\perp	$\neg e$ 1,6
8	$F \vee \neg F$	RAA 1 – 7

DN: Reglas derivadas: ley del tercio excluido (LEM)

- Ejemplo: $p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$:

1 $p \rightarrow q$ premisa

2 $p \vee \neg p$ LEM

3	p	supuesto
---	-----	----------

4	q	\rightarrow e 1,3
---	-----	---------------------

5	$\neg p \vee q$	\vee i 4
---	-----------------	------------

6	$\neg p$	supuesto
---	----------	----------

7	$\neg p \vee q$	\vee i 6
---	-----------------	------------

8 $\neg p \vee q$ \vee e 2,3 – 5,6 – 7

DN: Reglas de deducción natural

- Reglas de deducción natural:

	Introducción	Eliminación
\wedge	$\frac{F \quad G}{F \wedge G} \wedge i$	$\frac{F \wedge G}{F} \wedge e_1 \quad \frac{F \wedge G}{G} \wedge e_2$
\vee	$\frac{F}{F \vee G} \vee i_1 \quad \frac{G}{F \vee G} \vee i_2$	$\frac{F \vee G \quad \begin{array}{ c } \hline F \\ \hline \vdots \\ \hline H \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{ c } \hline G \\ \hline \vdots \\ \hline H \\ \hline \end{array}}{H} \vee e$
\rightarrow	$\frac{\begin{array}{ c } \hline F \\ \hline \vdots \\ \hline G \\ \hline \end{array}}{F \rightarrow G} \rightarrow i$	$\frac{F \quad F \rightarrow G}{G} \rightarrow e$

DN: Reglas de deducción natural

- Reglas de deducción natural:

	Introducción	Eliminación
\neg	$\frac{\boxed{\begin{array}{c} F \\ \vdots \\ \perp \end{array}}}{\neg F} \neg i$	$\frac{F \quad \neg F}{\perp} \neg e$
\perp		$\frac{\perp}{F} \perp e$
$\neg\neg$		$\frac{\neg\neg F}{F} \neg\neg e$
\leftrightarrow	$\frac{F \rightarrow G \quad G \rightarrow F}{F \leftrightarrow G} \leftrightarrow i$	$\frac{F \leftrightarrow G}{F \rightarrow G} \leftrightarrow e_1 \quad \frac{F \leftrightarrow G}{G \rightarrow F} \leftrightarrow e_2$

- Adecuación y completitud del cálculo de deducción natural.

Bibliografía

1. C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal*. (Ariel, 2000).
Cap. 16: Cálculo deductivo.
2. R. Bornat *Using ItL Jape with X* (Department of Computer Science, QMW, 1998).
3. J.A. Díez *Iniciación a la Lógica*, (Ariel, 2002).
Cap. 4: Cálculo deductivo. Deducibilidad.
4. M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems*. (Cambridge University Press, 2000)
Cap. 1: Propositional logic.
5. E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003)
Cap. 3.6: El método de la deducción natural.