

Lógica informática (2005–06)

Tema 3: Formas normales

José A. Alonso Jiménez

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

Equivalencia lógica: propiedades

- Relación entre equivalencia y bicondicional:
 - ▶ $F \equiv G \text{ syss } \models F \leftrightarrow G \text{ syss } \vdash F \leftrightarrow G$.
- Propiedades básicas de la equivalencia lógica:
 - ▶ Reflexiva: $F \equiv F$.
 - ▶ Simétrica: Si $F \equiv G$, entonces $G \equiv F$.
 - ▶ Transitiva: Si $F \equiv G$ y $G \equiv H$, entonces $F \equiv H$.
- Principio de sustitución de fórmulas equivalentes:
 - ▶ Prop.: Si en la fórmula F se sustituye una de sus subfórmulas G por una fórmula G' lógicamente equivalente a G , entonces la fórmula obtenida, F' , es lógicamente equivalente a F .
 - ▶ Ejemplo:
$$\begin{aligned} F &= \neg(p \wedge q) \rightarrow \neg(p \wedge \neg r) \\ G &= \neg(p \wedge q) \\ G' &= \neg p \vee \neg q \\ F' &= (\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg(p \wedge \neg r) \end{aligned}$$

1

3

Equivalencia lógica: Fórmulas equivalentes.

- Def.: F y G son **equivalentes** si $v(F) = v(G)$ para toda valoración v .
Representación: $F \equiv G$.
- Ejemplos de equivalencias notables:
 1. Idempotencia: $F \vee F \equiv F$; $F \wedge F \equiv F$.
 2. Conmutatividad: $F \vee G \equiv G \vee F$; $F \wedge G \equiv G \wedge F$.
 3. Asociatividad: $F \vee (G \vee H) \equiv (F \vee G) \vee H$; $F \wedge (G \wedge H) \equiv (F \wedge G) \wedge H$.
 4. Absorción: $F \wedge (F \vee G) \equiv F$; $F \vee (F \wedge G) \equiv F$.
 5. Distributividad: $F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$;
 $F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$.
 6. Doble negación: $\neg\neg F \equiv F$.
 7. Leyes de De Morgan: $\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$; $\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$.
 8. Leyes de tautologías: Si F es una tautología, $F \wedge G \equiv G$; $F \vee G \equiv F$.
 9. Leyes de contradicciones: Si F es una contradicción $F \wedge G \equiv F$; $F \vee G \equiv G$.

2

Formas normales: Forma normal conjuntiva

- Átomos y literales:
 - ▶ Def.: Un **átomo** es un variable proposicional (p.e. p, q, \dots).
 - ▶ Def.: Un **literal** es un átomo o su negación (p.e. $p, \neg p, q, \neg q, \dots$).
 - ▶ Notación: L, L_1, L_2, \dots representarán literales.
- Forma normal conjuntiva:
 - ▶ Def.: Una fórmula está en **forma normal conjuntiva (FNC)** si es una conjunción de disyunciones de literales; es decir, es de la forma $(L_{1,1} \vee \dots \vee L_{1,n_1}) \wedge \dots \wedge (L_{m,1} \vee \dots \vee L_{m,n_m})$.
 - ▶ Ejemplos: $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$ está en FNC.
 $(\neg p \vee q) \wedge (q \rightarrow p)$ no está en FNC.
 - ▶ Def.: Una fórmula G es una **forma normal conjuntiva (FNC)** de la fórmula F si G está en forma normal conjuntiva y es equivalente a F .
 - ▶ Ejemplo: Una FNC de $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$ es $(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)$.

4

Formas normales: Cálculo de forma normal conjuntiva

- Algoritmo de cálculo de forma normal conjuntiva:
 - ▶ **Algoritmo:** Aplicando a una fórmula F los siguientes pasos se obtiene una forma normal conjuntiva de F , $FNC(F)$:
 - Eliminar los bicondicionales usando la equivalencia

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \quad (1)$$
 - Eliminar los condicionales usando la equivalencia

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B \quad (2)$$
 - Interiorizar las negaciones usando las equivalencias

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B \quad (3)$$

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B \quad (4)$$

$$\neg\neg A \equiv A \quad (5)$$
 - Interiorizar las disyunciones usando las equivalencias

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) \quad (6)$$

$$(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C) \quad (7)$$

5

Formas normales: Cálculo de forma normal conjuntiva

- Ejemplo de cálculo de una FNC de $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$:

$$(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$$

$$\equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \rightarrow r \quad [(1)]$$

$$\equiv \neg((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \vee r \quad [(2)]$$

$$\equiv \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \vee r \quad [(2)]$$

$$\equiv (\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p)) \vee r \quad [(3)]$$

$$\equiv ((\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg\neg q \wedge \neg p)) \vee r \quad [(4)]$$

$$\equiv ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)) \vee r \quad [(5)]$$

$$\equiv (((p \wedge \neg q) \vee q) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee \neg p)) \vee r \quad [(6)]$$

$$\equiv (((p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)) \wedge ((p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p))) \vee r \quad [(7)]$$

$$\equiv (((p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)) \vee r) \wedge (((p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p)) \vee r) \quad [(7)]$$

$$\equiv (((p \vee q) \vee r) \wedge ((\neg q \vee q) \vee r)) \wedge (((p \vee \neg p) \vee r) \wedge ((\neg q \vee \neg p) \vee r)) \quad [(7)]$$

$$\equiv (p \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee r)$$

$$\equiv (p \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee r)$$

7

Formas normales: Cálculo de forma normal conjuntiva

- Ejemplo de cálculo de una FNC de $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$:

$$\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$$

$$\equiv \neg(p \wedge (\neg q \vee r)) \quad [\text{por (2)}]$$

$$\equiv \neg p \vee \neg(\neg q \vee r) \quad [\text{por (3)}]$$

$$\equiv \neg p \vee (\neg\neg q \wedge \neg r) \quad [\text{por (4)}]$$

$$\equiv \neg p \vee (q \wedge \neg r) \quad [\text{por (5)}]$$

$$\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r) \quad [\text{por (6)}]$$
- Ejemplo de cálculo de una FNC de $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$:

$$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$$

$$\equiv (\neg p \vee q) \vee (\neg q \vee p) \quad [\text{por (2)}]$$

$$\equiv \neg p \vee q \vee \neg q \vee p$$

6

Formas normales: Forma normal disyuntiva

- Forma normal disyuntiva:
 - ▶ Def.: Una fórmula está en **forma normal disyuntiva (FND)** si es una disyunción de conjunciones de literales; es decir, es de la forma

$$(L_{1,1} \wedge \dots \wedge L_{1,n_1}) \vee \dots \vee (L_{m,1} \wedge \dots \wedge L_{m,n_m}).$$
 - ▶ Ejemplos: $(\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p)$ está en FND.
 $(\neg p \wedge q) \vee (q \rightarrow p)$ no está en FND.
 - ▶ Def.: Una fórmula G es una **forma normal disyuntiva (FND)** de la fórmula F si G está en forma normal disyuntiva y es equivalente a F .
 - ▶ Ejemplo: Una FND de $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$ es $\neg p \vee (q \wedge \neg r)$.

8

Formas normales: Cálculo de forma normal disyuntiva

- Algoritmo de cálculo de forma normal disyuntiva:
 - ▶ **Algoritmo:** Aplicando a una fórmula F los siguientes pasos se obtiene una forma normal disyuntiva de F , $FND(F)$:
 - Eliminar los bicondicionales usando la equivalencia
$$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \quad (1)$$
 - Eliminar los condicionales usando la equivalencia
$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B \quad (2)$$
 - Interiorizar las negaciones usando las equivalencias
$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B \quad (3)$$
$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B \quad (4)$$
$$\neg\neg A \equiv A \quad (5)$$
 - Interiorizar las conjunciones usando las equivalencias
$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \quad (6)$$
$$(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \quad (7)$$

9

Formas normales: Cálculo de forma normal disyuntiva

- Ejemplo de cálculo de una FND de $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$:
$$\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$$
$$\equiv \neg(p \wedge (\neg q \vee r)) \quad [\text{por (2)}]$$
$$\equiv \neg p \vee \neg(\neg q \vee r) \quad [\text{por (3)}]$$
$$\equiv \neg p \vee (\neg\neg q \wedge \neg r) \quad [\text{por (4)}]$$
$$\equiv \neg p \vee (q \wedge \neg r) \quad [\text{por (5)}]$$
- Ejemplo de cálculo de una FND de $\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))$:
$$\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))$$
$$\equiv \neg(\neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg(p \wedge q)) \quad [\text{por (2)}]$$
$$\equiv \neg\neg(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg\neg(p \wedge q) \quad [\text{por (4)}]$$
$$\equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \wedge q) \quad [\text{por (5)}]$$
$$\equiv (\neg p \wedge (p \wedge q)) \vee (\neg q \wedge (p \wedge q)) \quad [\text{por (7)}]$$
$$\equiv (\neg p \wedge p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p \wedge q)$$

10

Decisión de validez mediante FNC

- Literales complementarios:
 - ▶ El **complementario** de un literal L es $L^c = \begin{cases} \neg p & \text{si } L = p; \\ p & \text{si } L = \neg p. \end{cases}$
- Propiedades de reducción de tautologías:
 - ▶ $F_1 \wedge \dots \wedge F_n$ es una tautología syss F_1, \dots, F_n lo son.
 - ▶ $L_1 \vee \dots \vee L_n$ es una tautología syss $\{L_1, \dots, L_n\}$ contiene algún par de literales complementarios (i.e. existen i, j tales que $L_i = L_j^c$).
- Algoritmo de decisión de tautologías mediante FNC**
 - ▶ Entrada: Una fórmula F .
 - ▶ Procedimiento:
 - Calcular una FNC de F .
 - Decidir si cada una de las conjunciones de la FNC tiene algún par de literales complementarios.

11

Decisión de validez mediante FNC

- Ejemplos de decisión de tautologías mediante FNC
 - ▶ $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$ no es tautología:
$$FNC(\neg(p \wedge (q \rightarrow r))) = (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)$$
Contramodelos de $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$:
$$v_1 \text{ tal que } v_1(p) = 1 \text{ y } v_1(q) = 0$$
$$v_2 \text{ tal que } v_2(p) = 1 \text{ y } v_2(r) = 1$$
 - ▶ $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ es tautología:
$$FNC((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)) = \neg p \vee q \vee \neg q \vee p$$
 - ▶ $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$ no es tautología:
$$FNC((p \leftrightarrow q) \rightarrow r) = (p \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee r)$$
Contramodelos de $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$:
$$v_1 \text{ tal que } v_1(p) = 0, v_1(q) = 0 \text{ y } v_1(r) = 0$$
$$v_2 \text{ tal que } v_2(p) = 1, v_2(q) = 1 \text{ y } v_2(r) = 0$$

12

Decisión de satisfacibilidad mediante FND

- Propiedades de reducción de satisfacibilidad:
 - ▶ $F_1 \vee \dots \vee F_n$ es satisfacible syss alguna de las fórmulas F_1, \dots, F_n lo es.
 - ▶ $L_1 \wedge \dots \wedge L_n$ es satisfacible syss $\{L_1, \dots, L_n\}$ no contiene ningún par de literales complementarios.
- Algoritmo de decisión de satisfacibilidad mediante FND:
 - ▶ Entrada: Una fórmula F .
 - ▶ Procedimiento:
 1. Calcular una FND de F .
 2. Decidir si alguna de las disyunciones de la FND no tiene un par de literales complementarios.

13

Decisión de satisfacibilidad mediante FND

- Ejemplos de decisión de satisfacibilidad mediante FND:
 - ▶ $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$ es satisfacible:
FND($\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$) = $\neg p \vee (q \wedge \neg r)$
Modelos de $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$:
 v_1 tal que $v_1(p) = 0$
 v_2 tal que $v_2(q) = 1$ y $v_2(r) = 0$
 - ▶ $\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))$ es insatisfacible:
FND($\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))$) = $(\neg p \wedge p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p \wedge q)$

14

Bibliografía

1. C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal*. (Ariel, 2000)
Cap. 8 (Equivalencia lógica) y 10 (Formas normales).
2. M. Ben-Ari, *Mathematical logic for computer science (2nd ed.)*. (Springer, 2001)
Cap. 2 (Propositional calculus: formulas, models, tableaux).
3. J.A. Díez *Iniciación a la Lógica*, (Ariel, 2002)
Cap. 3 (Semántica formal. Consecuencia lógica).
4. M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems*. (Cambridge University Press, 2000)
Cap. 1 (Propositional logic).
5. E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003)
Cap. 4.4 (Formas normales).

15